УДК 515.162.8

Ю. М. МАЛЮТА, д-р физ.-мат. наук (Ин-т ядер. исслед. АН Украины, Киев)

Топологическая квантовая электродинамика

Показано, что теория Дирака, описывающая электрон в кулоновском поле, является топологической квантовой теорией.

Показано, що теорія Дірака, яка описує електрон в кулонівському полі, є топологічною квантовою теорією.

1. Введение. Наиболее популярным представителем топологической квантовой теории поля, в последнее время привлекшей пристальное внимание теоретиков, является теория Чженя — Саймонса [1]. В этой теории функция распределения

$$Z = \int DA \exp(iS) \prod_l W(C_l)$$

выражается через топологические инварианты — полиномы Джонса. Действие

$S = \frac{k}{4\pi} \int\limits_{S^3} \mathrm{Tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A\right)$ — также топологический инвариант — класс Чженя — Саймонса; $\prod_l W(C_l)$ — это произведение операторов Вильсона для узлов C_l, образующих зацепление,

$$W(C_l) = \operatorname{Tr} P \exp\left(\int_{C_l} A dx\right),$$

A — связность на тривиальном расслоении $SU(N) \times S^3$, константа k — целое число.

Цель настоящей работы — показать, что теория Дирака, описывающая электрон в кулоновском поле, является топологической квантовой теорией. Будет показано, что функция распределения и действие в теории Дирака — топологические инварианты.

2. Функция распределения. Рассмотрим функцию распределения в теории Дирака

$$Z = \int D\overset{+}{\Psi} D\Psi \exp(-S), \tag{1}$$

где

$$S = \int_{R^3} d^3x \overset{+}{\Psi} H \Psi,$$

$$H = i\gamma^0\gamma^m\partial_m - \gamma^0 + eA_0,$$

$$\Psi = \sum_n a_n \psi_n, \tag{2}$$

ψ_n — собственная функция гамильтониана H с собственным значением ε_n; a_n — оператор уничтожения электрона с главным квантовым числом n, $A_0 = -e/r$ — кулоновский потенциал, e — заряд электрона, масса электрона принята равной единице.

Вычисляя в (1) континуальный интеграл, находим

$$Z = \det H = \prod_n \varepsilon_n.$$

Воспользуемся для ε_n приближенным значением [2]

$$\varepsilon_n = 1 - \frac{e^4}{2n^2} = 1 - \frac{\omega^2}{\pi^2 n^2},$$

тогда

$$Z = \frac{1}{\dfrac{\omega}{\sin\omega}}.$$

Выполним в (1) переход к эвклидову случаю, т. е. заменим A_0 на iA_0, что равносильно замене e^2 на ie^2 или ω на $i\omega$. Тогда функция распределения будет равна

$$Z = \frac{1}{\dfrac{\omega}{\operatorname{sh}\omega}}. \tag{3}$$

Фигурирующее в (3) выражение

$$\mathbf{A} = \frac{\omega}{\operatorname{sh}\omega},$$

является $\mathbf{A}$- родом Атьи — Хирцебруха [3] для расслоения

$$\begin{array}{c} U(1) \to E \\ \quad\quad\ \downarrow \\ \quad\quad\ S^2, \end{array} \tag{4}$$

ω — это первый класс Чженя расслоения (4), т. е. элемент когомологической группы $H^2(S^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Согласно классификационной теореме Стинрода [4] классы эквивалентности расслоений (4) находятся во взаимнооднозначном соответствии с элементами гомотопической группы

$$\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}.$$

Так как согласно (3) функция распределения Z выражается через A-род, то она является топологическим инвариантом. Заметим, что база расслоения (4) двумерна. Это согласуется с тем фактом, что кеплеровы орбиты в атоме водорода — плоские кривые. Волновая функция Ψ — сечение расслоения (4).

3. Действие. Рассмотрим теперь действие

$$S = \int_{R^3} d^3x \overset{+}{\Psi} H \Psi.$$

Используя разложение (2) и ортонормируемость функций ψ_n, находим

$$S = \sum_n \overset{+}{a}_n a_n \left(1 + \frac{\omega^2}{\pi^2 n^2}\right) = \mathrm{const}\, \omega^2 \bmod \mathbb{Z}.$$

Так как S выражается через квадрат класса Чженя, то оно является топологическим инвариантом.

4. Заключительные замечания. Отметим идейную аналогию между приведенными вычислениями и вычислениями Виттена [1]. Обе теории приводят к однотипному результату: действие и функция распределения являются топологическими инвариантами.

1. *E. Witten.* Quantum field theory and the Jones polynomial // Commun. Math. Phys.— 1989.— 121.— P. 351—399.
2. *Л. Шифф.* Квантовая механика.— М. : Изд-во иностр. лит., 1957.— 476 с.
3. *Д. Хьюзмоллер.* Расслоенные пространства.— М. : Мир, 1970.— 442 с.
4. *Н. Стинрод.* Топология косых произведений.— М. : Изд-во иностр. лит., 1953.— 274 с.

Получено 14.06.91