УДК 517.5

Б. В. Винницкий, А. В. Шаповаловский

О полноте систем экспонент с весом

Пусть (λ_n) — последовательность различных комплексных чисел таких, что $\operatorname{Re}\lambda_n > 0$, $0 < |\lambda_n| \nearrow \infty$. Исследованию полноты системы

$$\{\exp(-\gamma(t) + t\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{1}$$

в пространстве $L^2 \overset{\text{df}}{=} L^2(-\infty; +\infty)$ посвящены многие работы (см., например, [1—3]). Цель настоящей статьи — доказать следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\gamma(t) = e^t$ *и* $s(t) = \sum\limits_{|\lambda_n| \leqslant t} \operatorname{Re}\lambda_n/|\lambda_n|$. *Тогда система* (1) *полна в* L^2, *если*

$$\varliminf_{t\to\infty} s(t)/t > 1/2 \tag{2}$$

и не является полной, если

$$\varlimsup_{t\to\infty} s(t)/t < 1/2. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть* $\gamma(t) = e^t$, $S(r) = \int\limits_0^r (s(t)/t^2)\,dt$,

$$|\arg\lambda_n| \leqslant \alpha_0 < \pi/2, \tag{4}$$

$$|\lambda_n| - |\lambda_{n-1}| \geqslant h > 0. \tag{5}$$

Тогда для того чтобы система (1) *была полной в* L^2, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_1^\infty \frac{\exp(2S(t))}{t^2}\,dt = \infty. \tag{6}$$

В случае $\operatorname{Im}\lambda_n = 0$ теорема 2 и вторая часть теоремы 1, а также приведенные ниже леммы 1—3, доказаны Фуксом [1].

Через $K, K_1, K_2, \ldots, c, c_1, c_2, \ldots$ обозначаем положительные постоянные. Пусть $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $z = x + iy$, $\varphi_n = \arg\lambda_n$, $\lambda_n = \mu_n + i\nu_n$.

Сформулированные утверждения являются следствиями ряда лемм.

Лемма 1. *Пусть* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$,

$$W_n(z) = \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\bar\lambda_n}\exp(z/\lambda_n + z/\bar\lambda_n).$$

Тогда при $|z/\lambda_n| \leqslant 1/8$ *имеем*

$$|\ln|W_n(z)|| \leqslant Kxr\operatorname{Re}\lambda_n/|\lambda_n|^3. \tag{7}$$

Действительно,

$$|\ln|W_n|| = \left|\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{4\mu_n x}{|\bar\lambda_n + z|^2}\right) + \frac{2x\mu_n}{|\lambda_n|^2}\right| = \left|\frac{2x\mu_n}{|\lambda_n|^2}(1 - |\lambda_n|^2/|\bar\lambda_n + \right.$$

$$+ z|^2) - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{4\mu_n x}{|\bar\lambda_n + z|^2}\right)^k \Bigg| \leqslant K_2 \frac{rx\mu_n}{|\lambda_n|^3} +$$

$$+\left(\frac{4\mu_n x}{|\bar\lambda_n + z|^2}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (32/49)^k \leqslant K_3 \frac{rx\mu_n}{|\lambda_n|^3}.$$

Лемма 2. *Пусть*

$$\varlimsup_{t\to\infty} s(t)/t = \tau < \infty. \tag{8}$$

Тогда произведение

$$H(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\bar\lambda_n} \exp(z/\lambda_n + z/\bar\lambda_n) \tag{9}$$

равномерно сходится на каждом компакте из полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ *и в этой полуплоскости* $|H(z)| \leqslant \exp(2xS(r) + c_1 x)$.

Доказательство. В [4, с. 35] показано, что при $r/|\lambda_n| \leqslant 1/2$ выполняется $|\ln W_n(z)| \leqslant 4r^2 \operatorname{Re}\lambda_n / |\lambda_n|^3$. Поэтому

$$\sum_{|\lambda_n| > 2r} |\ln W_n(z)| \leqslant 4r^2 \int_{2r}^{\infty} \frac{ds(t)}{t^2}.$$

Отсюда и из (8) следует сходимость произведения (9). Поскольку $|(z - \lambda_n)/(\bar\lambda_n + z)| \leqslant 1$ при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, то из (8) и леммы 1 при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ получаем

$$\ln|H(z)| \leqslant 2x \sum_{|\lambda_n| \leqslant 8r} \operatorname{Re}\lambda_n/|\lambda_n|^2 + c_2 xr \sum_{|\lambda_n| > 8r} \operatorname{Re}\lambda_n/|\lambda_n|^3 \leqslant$$

$$\leqslant 2xS(8r) + c_3 x \leqslant 2xS(r) + c_4 x.$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (4) *и* (5). *Тогда в полуплоскости* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ *вне множества* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z : |z - \lambda_n| < h/3\}$ *выполняется* $|H(z)| \geqslant \exp(2xS(r) - c_2 x)$.

Доказательство. Имеем

$$\ln|H(z)| \geqslant \ln \prod_{|\lambda_n| \leqslant 8r} |W_n(z)| - \sum_{|\lambda_n| > 8r} |\ln|W_n(z)|| = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2. \tag{10}$$

В силу леммы 1 $\mathcal{J}_2 = O(x)$ при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Пусть $\eta_1 = |\cos(\alpha_0 + \pi/2)|$. Очевидно, $0 < \eta_1 < 1$. Выберем α_1, $\alpha_0 < \alpha_1 < \pi/2$, настолько близким к $\pi/2$, чтобы $\cos\alpha_1 \leqslant (1 - \eta_1)/4$. Оценим $\mathcal{J}_1$. Пусть сначала z лежит в одном из углов $\alpha_1 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2$ и $-\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant -\alpha_1$. Тогда

$$\left|\frac{\lambda_n - z}{\bar\lambda_n + z}\right|^2 = 1 - \frac{4r|\lambda_n|\cos\varphi\cos\varphi_n}{|\lambda_n|^2 + r^2 + 2|\lambda_n| r\cos(\varphi + \varphi_n)} \geqslant 1 -$$

$$- \frac{2x\cos\varphi_n}{r(1 + \cos(\varphi + \varphi_n))} \geqslant 1 - \frac{2x}{r(1 - \eta_1)} \geqslant \exp(-2c_1 x/r),$$

ибо $2x/r(1 - \eta_1) \leqslant 1/2$. Пусть $n(t) = \sum_{|\lambda_n| \leqslant t} 1$. В силу (5) $n(t) = O(t)$ при $t > 0$. Поэтому в данном случае

$$\mathcal{J}_1 \geqslant - n(8r) c_1 x_1/r + 2x \sum_{|\lambda_n| \leqslant 8r} \operatorname{Re}\lambda_n/|\lambda_n|^2 \geqslant 2xS(r) - c_2 x. \tag{11}$$

Пусть теперь $|\arg z| \leqslant \alpha_1$ и $z \notin A$. Пусть, кроме того, $n(8r) = N$ и

$|\lambda_p| \leqslant r < |\lambda_{p+1}|$. Тогда

$$\prod_{|\lambda_n| \leqslant 8r} |\lambda_n - z| \geqslant \left(\frac{h}{3}\right)^2 (|\lambda_p| - |\lambda_1|)(|\lambda_p| - |\lambda_2|) \ldots (|\lambda_p| - |\lambda_{p-1}|) \times$$

$$\times (|\lambda_{p+2}| - |\lambda_{p+1}|) \times \ldots \times (|\lambda_N| - |\lambda_{p+1}|) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{h^N}{9} (p-1)!\,(N-p-1)! \geqslant c_1 (N/c_4)^N.$$

Следовательно,

$$\prod_{|\lambda_n| \leqslant 8r} \left| \frac{\lambda_n - z}{\bar{\lambda}_n + z} \right| \geqslant c_1 (N/9c_4 r)^N \geqslant c_3 \exp(-c_5 r).$$

Поскольку $|\arg z| \leqslant \alpha_1$, то отсюда следует, что и в данном случае $\dot{\mathcal{I}}_1 \geqslant \geqslant 2xS(r) - c_2 x$. Поэтому лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $f = f_1 + f_2 \neq 0$, где f_1 — целая функция, а f_2 принадлежит классу Харди H^2 в верхней полуплоскости и $Q_R = \{z: |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$. Тогда при любом $R > 0$ и $z \in Q_R$ имеем*

$$\ln |f(z)| = \sum_{\lambda_k \in Q_R} \ln \left| \frac{R(z-\lambda_k)}{R^2 - \bar{\lambda}_k z} \frac{R^2 - \lambda_k z}{R(z - \bar{\lambda}_k)} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{R^2 - |z|^2}{|\mathrm{Re}^{i\theta} - z|^2} - \frac{R^2 - |z|^2}{|\mathrm{Re}^{-i\theta} - z|^2} \right) \ln |f(\mathrm{Re}^{i\theta})|\, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} \left(\frac{r \sin\varphi}{|t-z|^2} - \frac{R^2 r \sin\varphi}{|R^2 - zt|^2} \right) (\ln |f(t)|\, dt + dq(t)),$$

где q — невозрастающая функция на $[-R; R]$, $f(t)$, $t \in [-R; R]$,— угловые предельные значения f и λ_n — ее нули.

Для круга лемма 4 хорошо известна [5, с. 111]. В случае, когда f ограничена в Q_R, она следует из [4, с. 22]. Для получения леммы 4 в приведенной редакции нужно повторить доказательство теоремы 2 1 из [4] и учесть следующие обстоятельства: а) в силу известных свойств классов Харди функции $\ln^+ |f(t)|$, $|f(t)|^2$ и $|f(t)|$ суммируемы на $[-R; R]$; б) справедливы неравенства

$$\exp\left(\frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta \ln(1 + |f(x + i\varepsilon)|)\, dx \right) \leqslant 1 + \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta |f_2(x + i\varepsilon)|\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta |f_1(x + i\varepsilon)|\, dx \leqslant 1 + K_1 + \frac{1}{(\beta - \alpha)^{1/2}} \times$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(x + i\varepsilon)|^2\, dx \right)^{1/2} \leqslant 1 + K_1 + K_2/(\beta - \alpha)^{1/2},$$

где K_1 и K_2 от $\varepsilon \in (0; 1)$ и $\alpha, \beta \in [-R; R]$ не зависят; в) в силу б) семейство функций

$$\int_{-R}^{x} \ln^+ |f(t + i\varepsilon_n)|\, dt, \quad 0 < \varepsilon_n \to 0, \quad -R \leqslant x \leqslant R,$$

равностепенно абсолютно непрерывно и, следовательно, [5, с. 22]

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-R}^{x} \ln^+ |f(t + i\varepsilon_n)|\, dt = \int_{-R}^{x} \ln^+ |f(t)|\, dt.$$

Л е м м а 5. *Пусть* $f = f_1 + f_2 \neq 0$, *где* f_1 — *целая функция, а* f_2 *принадлежит классу* H^2 *в правой полуплоскости. Тогда при* $R > 1$ *имеем*

$$\sum_{1<|\lambda_n|\leqslant R} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{R^2}\right) \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|} = \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln|f(Re^{i\varphi})|\cos\varphi d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_1^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2}\right) \ln|f(it) f(-it)|\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_1^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2}\right) d(q(t) - q(-t)) + O(1),$$

где λ_n — *нули* f, *лежащие в* $\operatorname{Re} z > 0$, *а* q — *невозрастающая функция на* $[-R; R]$ *и* $f(it)$, $t \in [-R; R]$, — *угловые предельные значения* f.

Для получения леммы 5 из леммы 4 нужно перейти от правой к верхней полуплоскости и затем дословно повторить доказательство теоремы 2.2 из [4].

Л е м м а 6. *Пусть* $\gamma(t) = e^{\rho t}$, $0 < \rho < \infty$,

$$S_0(R) = \int_1^R s(t)\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{R^2}\right) dt.$$

Тогда если

$$\varlimsup_{r\to\infty} (2\rho S_0(r) - \ln r) = +\infty, \tag{12}$$

то система (1) *полна в* L^2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда найдется $\alpha \in L^2$, $\alpha \neq 0$, для которого

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) \exp(-\gamma(t) + t\lambda_n)\, dt = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Пусть

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) \exp(-\gamma(t) + tz)\, dt. \tag{14}$$

Имеем $f = f_1 + f_2 \neq 0$, где

$$f_2(z) = \int_{-\infty}^{1} \alpha(t) \exp(-\gamma(t) + tz)\, dt, \qquad f_1(z) = \int_0^{+\infty} \alpha(t) \exp(-\gamma(t) + tz)\, dt.$$

Очевидно, $\alpha(t)\exp(-\gamma(t)) \in L^2(-\infty,; 0)$. Поэтому по теореме Пэли — Винера [6, с. 20] f_2 принадлежит H^2 в правой полуплоскости, а f_1, очевидно, — целая функция. Кроме того, $f_1(iy) = O(1)$ и $\ln^+|f_2(iy)| \leqslant \leqslant |f_2(iy)|^2$ при $y \in R$. Поэтому

$$\ln|f(iy)| \leqslant \ln^+|f_1(iy)| + \ln^+|f_2(iy)| + \ln 2 \leqslant |f_2(iy)|^2 + O(1), \quad y \in R. \tag{15}$$

Далее, при $\operatorname{Re} z > 0$ имеем

$$|f(z)| \leqslant \|\alpha\| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2e^{\rho t} + 2tx)\, dt\right)^{1/2} \leqslant \|\alpha\| \left(\frac{1}{2x} + \sup_{t\geqslant 0}\left\{\exp\left(-2e^{\rho t} +\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + 2t(x+1)\right)\int_0^\infty e^{-2x} dx\right\}\right)^{1/2} \leqslant \|\alpha\| \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\exp\left(\frac{2}{\rho}(x+1)\ln\frac{x+1}{\rho} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2(x+1)}{\rho}\right)\right)^{1/2} \leqslant K \exp\left(\frac{x}{\rho}\ln\frac{x}{\rho}\right)/\sqrt{x}. \tag{16}$$

К тому же в силу (13) $f(\lambda_n) = 0$ при $n \geqslant 1$. Следовательно, используя лемму 5 и учитывая монотонность функции q, имеем

$$\sum_{1<|\lambda_n|<R} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{R^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|} \leqslant \frac{\ln R}{2\rho} + O(1), \quad R \geqslant 1,$$

т. е. $2\rho S_0(R) - \ln R \leqslant O(1)$ при $R \geqslant 1$, а это противоречит (12).

Из леммы 6 вытекает справедливость первой части теоремы 1. Докажем достаточную часть теоремы 2. Предположим противное. Тогда будет выполняться (13), функция (14) будет аналитической в $\operatorname{Re} z > 0$, причем $f(\lambda_n) = 0$ при всех $n \geqslant 1$ и для нее справедлива оценка (16) при $\rho = 1$. Кроме того, функция $G(z) = K \exp(-az)\, g(z + a_0)$, где $a_0 = \min\{1/2; |\lambda_1|/2\}$ и $g(z) = f(z)/H(z)$, аналитична в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ и при соответствующем выборе постоянных K и a удовлетворяет в силу леммы 3 в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ неравенству

$$|G(z)| \leqslant (x/\exp(2S(r)))^x. \tag{17}$$

В [1] доказано следующее утверждение. Пусть положительная непрерывная возрастающая на $]0; +\infty[$ функция S удовлетворяет условию (6). Тогда если для аналитической в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ функции G выполняется (17), то $G = 0$. Следовательно, и в нашем случае $G = 0$. Поэтому и $\alpha = 0$, а это противоречит допущению.

Л е м м а 7. *Пусть γ — положительная возрастающая выпуклая книзу на $]-\infty, +\infty[$ функция, причем $t = o(\gamma(t))$ при $t \to +\infty$. Тогда если выполняется* (8) *и для некоторого $b \in R$*

$$\int_1^\infty \frac{\gamma(2S(t) - b)}{t^2}\, dt < \infty, \tag{18}$$

то система (1) *не полна в L^2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S_1(r) = \gamma(2S(r) - b)$ при $r \geqslant 0$ и $S_1(r) = S_1(-r)$ при $r < 0$, а

$$U(z) = -\frac{4(x+1)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_1(t)\, dt}{(1+x)^2 + (t-y)^2} - bx.$$

Функция U гармонична в $\operatorname{Re} z > -1$ и удовлетворяет при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ неравенству (см. [1, 7], а также [8]) $U(z) \leqslant -2S_1(r) - bx$. Пусть V — сопряженная к U гармоническая функция, $T(z) = U(z) + iV(z)$, а $\gamma_*(x) = \sup\limits_{t\geqslant 0}\{xt - \gamma(t)\}$. Тогда [9, с. 186] при $t \geqslant 0$ имеем $\gamma(t) = \sup\limits_{x\geqslant 0}\{xt - \gamma_*(x)\}$ и $2\gamma(t) = 2\sup\limits_{x\geqslant 0}\{tx/2 - \gamma_*(x/2)\} \geqslant xt - 2\gamma_*(x/2)$ для всех $x \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$. Поэтому, полагая $Q(z) = H(z)\exp(-cz + T(z))/(1+z)^2$ и учитывая лемму 2, при подходящем выборе постоянных c, K и K_1 в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ имеем

$$\begin{aligned}|Q(z)| &\leqslant K\exp(2xS(r) - 2\gamma(2S(r) - b) - bx)/(1+y^2) \leqslant \\ &\leqslant K_1 \exp(2\gamma_*(x/2))/(1+y^2).\end{aligned} \tag{19}$$

Пусть

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} Q(z)\, e^{-zt} dz.$$

В силу (19) последний интеграл от $x \geqslant 0$ не зависит и

$$\alpha_0(t)\, e^{xt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} Q(x+iy)\, e^{-iyt} dy, \tag{20}$$

т. е. функцию $\alpha_0(x)e^{xt}$ при фиксированном $x \geqslant 0$ можно рассматривать как преобразование Фурье функции $Q(x+iy)$. Поэтому

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_0(t) e^{tz} dt.$$

Взяв в (19) и (20) $x=0$, убеждаемся, что $\alpha_0 \in L^2$ и тем более $\alpha_0 \in L^2(-\infty; 0)$. Кроме того, из (19) и (20) при $t \geqslant 0$ имеем

$$|\alpha_0(t)| \leqslant K \exp(-\sup_{x \geqslant 0} \{xt - 2\gamma_*(x/2)\}) = K \exp(-2\gamma(t)),$$

откуда следует, что $\alpha(t) = \alpha_0(t) \exp(\gamma(t)) \in L^2$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) \exp(-\gamma(t) + t\lambda_n)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_0(t) e^{t\lambda_n} dt = \sqrt{2\pi} Q(\lambda_n) = 0$$

при всех $n \geqslant 1$ и поэтому система (1) не полна в L^2.

Необходимая часть теоремы 2 и вторая часть теоремы 1 являются очевидными следствиями доказанной леммы 7.

1. *Fuchs W. H. J.* On the closure of $\{e^{-t}t^{a_\nu}\}$ // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1946.— **18**, N 2.— P. 91—105.
2. *Boas R. P.* Density theorems for power series and complete sets // Trans. Amer. Math. Soc.— 1947.— **61**, N 1.— P. 54—68.
3. *Седлецкий А. М.* Аппроксимация сдвигами и полнота взвешенных систем экспонент в $L^2(R)$ // Мат. сб.— 1984.— **123**. № 1.— С. 92—107.
4. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом.— М. : Наука, 1986.— 240 с.
5. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций.— М. : ГИТТЛ, 1950.— 336 с.
6. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области.— М. : Наука, 1964.— — 268 с.
7. *Malliavin P.* Sur Quelgues procedes d'extrapolation // Acta Math.— 1955.— **93**, N 3-4.— P. 179—255.
8. *Винницкий Б. В., Сорокивский В. М.* О росте целых функций, представленных рядами Дирихле.— Дрогобыч, 1982.— 22 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 176—82 Деп.
9. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции.— М. : Наука, 1979.— 320 с.

Дрогобыч пед. ин-т Получено 08.02.88

УДК 519.21

В. Л. Гирко, Т. В. Павленко

G-оценка квадратичной дискриминантной функции

Настоящая работа посвящена построению и изучению свойств G-оценки квадратичной дискриминантной функции в случае двух многомерных нормальных генеральных совокупностей. Вопросы применения методов общего статистического анализа (G-анализа) к построению оценок некоторых статистик многомерного статистического анализа рассматривались в работах [1—4].

Рассмотрим задачу классификации случайного m-мерного вектора x, т. е. задачу отнесения его к той или иной совокупности, соответствующей одному из нормальных распределений $N(a_1, R_1)$ и $N(a_2, R_2)$, a_1, a_2— векторы средних значений, R_1, R_2 — ковариационные матрицы. Будем предполагать, что априорные вероятности наблюдения над совокупностями $N(a_1, R_1)$ и $N(a_2, R_2)$ равны. Цены неправильной классификации также равны. В этом случае квадратичная дискриминантная функция имеет следую-