

Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. II

Данная работа является продолжением [1] и посвящена в основном построению многопараметрических семейств точных решений нестационарных 3-мерных уравнений (обозначения см. в [1])

$$i\psi_t = k\Delta\psi + \lambda\psi|\psi|^{4/3}, \quad k \in \mathbb{R}^1, \lambda \in \mathbb{C}^1, \quad (1)$$

$$i\psi_t = k\Delta\psi + \lambda\psi \frac{\partial|\psi|}{\partial x_a} \frac{\partial|\psi|}{\partial x_a} |\psi|^{-2}. \quad (2)$$

Приведены также некоторые результаты симметричного анализа систем нелинейных уравнений с логарифмической нелинейностью.

1. Точные решения уравнения (1). Редукция уравнения (1) по оператору $X_1 = P_1$ [1] приводит к нелинейному трехмерному уравнению

$$i\varphi_t = \Delta_2\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad (3)$$

где $\Delta_2 = \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$, $\varphi = \varphi(t, x_2, x_3)$. Для получения частных решений уравнения (3) рассмотрим систему [2]

$$\begin{aligned} i\varphi_t &= \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad \lambda \neq 0, \\ \Delta_2\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, что произвольное решение системы (4) удовлетворяет уравнению (3), а следовательно, и (1). Представляя комплексную функцию φ через пару действительных функций $R(t, x_2, x_3)$ и $P(t, x_2, x_3)$ по формуле $\varphi = R \exp iP$, получаем общее решение системы (4)

$$\varphi = \begin{cases} \left(-\frac{d_2}{\lambda}\right)^{3/4} \exp i(d_1 + d_2 t), & \lambda \in \mathbb{R}^1, d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1 \\ \left(d_2 - \frac{4}{3}\beta t\right)^{-\frac{3}{4}(1-i\frac{\alpha}{\beta})} e^{id_1}, & \lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \quad (5)$$

которое является частным решением нелинейного уравнения (1).

Множитель e^{id_1} в дальнейшем будем опускать, так как любое решение уравнения (1) или (2), умноженное на e^{id_1} , будет снова решением этого же уравнения.

Редукция уравнения (1) по оператору $X_2 = J$ приводит к линейному уравнению (19) [1] с дополнительным нелинейным условием $\varphi\varphi^* = \gamma^2$, $\gamma > 0$. Используя представление комплексной функции φ через пару действительных функций $R(t, x)$ и $P(t, x)$, получаем

$$\varphi = \gamma \exp iP(t, x). \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (19) [1], после некоторых преобразований приходим к системе

$$\frac{\partial P^1}{\partial t} = k \frac{\partial P^1}{\partial x_a} \frac{\partial P^1}{\partial x_a}, \quad \Delta P^1 = 0 \quad (7)$$

где

$$P^1(t, x) = P(t, x) + \lambda\gamma^{4/3}t. \quad (8)$$

В предположении $P_t^1 = \alpha = \text{const}$ с учетом результатов работы [3] удается построить общее решение системы (7), которое приводит к решению

уравнения (1) в виде плоской волны

$$\psi = \gamma \exp i((kb_a b_a - \lambda \gamma^{4/3})t + b_a x_a), \quad (9)$$

где b_1, b_2, b_3 — произвольные действительные параметры.

Проверкой нетрудно убедиться, что система (7) не имеет радиальных решений вида $P^1 = P^1(t, |x|^2)$.

Редукция уравнения (1) по оператору X_3 при $\alpha_0 = 0$ [1] приводит к нелинейному эллиптическому уравнению

$$k\Delta\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0, \quad \varphi = \varphi(x). \quad (10)$$

Пусть в уравнении (10)

$$\varphi = \varphi(\omega), \quad \omega = \alpha_a x_a, \quad \alpha_a \in \mathbb{R}^1. \quad (11)$$

Тогда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка

$$k|\alpha|^2 \varphi_{\omega\omega} + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0, \quad |\alpha|^2 = \alpha_a \alpha_a.$$

В случае действительной функции φ это уравнение является уравнением Эмдена—Фаулера, частным решением которого является функция [4] $\varphi = \beta/\omega^{3/2}$, $\beta = (-15|\alpha|^2 k/4\lambda)^{3/4}$, $\lambda k < 0$.

Таким образом, получаем стационарное решение уравнения (1)

$$\psi(x) = \left[\frac{15|\alpha|^2 k}{-4\lambda(\alpha_a x_a)^2} \right]^{3/4}, \quad \alpha_a \in \mathbb{R}^1, \quad \lambda k < 0. \quad (12)$$

Отметим также, что в случае $\lambda k > 0$ выражение (12) задает комплексное решение уравнения (1).

Если в уравнении (10) положить

$$\varphi = \varphi(r), \quad r = |x|^2, \quad (13)$$

то получим ОДУ второго порядка

$$4r \frac{d^2\varphi}{dr^2} + 6 \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\lambda}{k} \varphi|\varphi|^{4/3} = 0,$$

которое имеет частное решение $\varphi = (-15k/4\lambda r)^{3/4}$.

Следовательно, с учетом (13) находим еще одно стационарное решение уравнения (1)

$$\psi(x) = \left(\frac{15k}{-4\lambda|x|^2} \right)^{3/4}. \quad (14)$$

Решение (14) в отличие от предыдущих решений обладает свойством $\psi(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Отметим, что решение (12) стремится к нулю при $\alpha_a x_a \rightarrow \infty$.

Для получения солитоноподобных решений уравнения (1) рассмотрим редукционное уравнение (20) [1] при $\alpha_0 \neq 0$, соответствующее алгебре X_3 . С помощью анзаца (11) в случае действительных φ и λ уравнение (20) [1] сводится к нелинейному ОДУ второго порядка

$$k|\alpha|^2 \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + \alpha_0 \varphi + \lambda\varphi^{7/3} = 0. \quad (15)$$

Общее решение уравнения (15) в элементарных функциях получить не удастся, так как его решение сводится к интегрированию выражения

$$c_2 \pm \omega = \int (c_1 - \beta_1 \varphi^2 - \lambda_1 \varphi^{10/3})^{-1/2} d\varphi, \quad (16)$$

где $\beta_1 = \frac{\alpha_0}{|\alpha|^2 k}$, $\lambda_1 = \frac{3\lambda}{5k|\alpha|^2}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^1$.

Интеграл в правой части (16) подстановкой $\varphi_1 = \varphi^{-2/3}$ преобразуется к интегралу $-\frac{3}{2} \int (c_1 \varphi_1^5 - \beta_1 \varphi_1^2 - \lambda_1)^{-1/2} d\varphi_1$, который при $c_1 \neq 0$ в элементарных функциях не выражается и даже не сводится к эллиптическому [5].

Если $c_1 = 0, \beta_1 = 0$ (т. е. $\alpha_0 = 0$), то из соотношения (16) с учетом (11) получаем решение (12) уравнения (1).

Пусть в выражении (16) $c_1 = 0$ и $\beta_1 \lambda_1 \neq 0$, так как φ — действительная функция, то возможны три случая:

а) $\beta_1 < 0, \lambda_1 < 0$, т. е. $\alpha_0 k < 0, \lambda k < 0$;

б) $\beta_1 > 0, \lambda_1 < 0$, т. е. $\alpha_0 k > 0, \lambda k < 0$;

в) $\beta_1 < 0, \lambda_1 > 0$, т. е. $\alpha_0 k < 0, \lambda k > 0$.

В случае а) получаем решение нелинейного ОДУ (15)

$$\varphi = \left[\sqrt{\frac{3\lambda}{5\alpha_0}} \operatorname{sh} \left(c_2 \pm \frac{2\omega}{3|\alpha| \sqrt{-k/\alpha_0}} \right) \right]^{-3/2},$$

в случае б) —

$$\varphi = \left[\sqrt{\frac{-3\lambda}{5\alpha_0}} \cos \left(c_2 \pm \frac{2\omega}{3|\alpha| \sqrt{k/\alpha_0}} \right) \right]^{-3/2},$$

в случае в) —

$$\varphi = \left[\sqrt{\frac{-3\lambda}{5\alpha_0}} \operatorname{ch} \left(c_2 \pm \frac{2\omega}{3|\alpha| \sqrt{-k/\alpha_0}} \right) \right]^{-3/2}.$$

Следовательно, с учетом (11) и соответствующего оператору X_3 анзаца (см. таблицу 1 [1]) из этих решений при $c_2 = 0$ получаем решения исходного уравнения (1)

$$\psi(t, x) = \frac{\exp(i\alpha_0 t)}{[\sqrt{\gamma} \operatorname{sh}(\alpha_a x_a)]^{3/2}}, \quad \lambda k < 0, \alpha_0 k < 0, \quad (17a)$$

$$\psi(t, x) = \frac{\exp(i\alpha_0 t)}{[\sqrt{-\gamma} \cos(\alpha_a x_a)]^{3/2}}, \quad \lambda k < 0, \alpha_0 k > 0, \quad (17b)$$

$$\psi(t, x) = \frac{\exp(i\alpha_0 t)}{[\sqrt{-\gamma} \operatorname{ch}(\alpha_a x_a)]^{3/2}}, \quad \lambda k > 0, \alpha_0 k < 0, \quad (17c)$$

где $\gamma = 3\lambda/5\alpha_0, \alpha_a \alpha_a = 4|\alpha_0|/9|k|, \alpha_a$ — произвольные действительные параметры.

Редукция нелинейного уравнения (1) по оператору $X_4 = J_{12} + \alpha J, \alpha \geq 0$, приводит к трехмерному нелинейному уравнению (21) [1], которое в случае действительной функции $\varphi = \varphi(\omega), \omega = x_1 + x_2^2$ сводится к ОДУ второго порядка

$$\omega^2 \frac{d^2 \varphi}{d\omega^2} + \omega \frac{d\varphi}{d\omega} - \frac{\alpha^2}{4} \varphi + \frac{\lambda}{4k} \omega \varphi^{7/3} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1$$

с частным решением

$$\varphi = \left[\frac{k \left(\alpha^2 - \frac{9}{4} \right)}{\lambda \omega} \right]^{3/4}. \quad (18)$$

Воспользовавшись табл. [1] и формулой (39) [1] из решения (18) получим решение нелинейного уравнения (1)

$$\psi(t, x) = A^{3/4} \exp \left(i\beta \operatorname{arctg} \frac{C^{(2)} x}{C^{(1)} x} \right) \|x\|^2 - (C^{(3)} x)^2 \|^{-3/4}, \quad (19)$$

где $A = k(\alpha^2 - 9/4)/\lambda > 0, C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}$ — трехмерные ортонормированные действительные векторы.

Ко всем построенным решениям уравнения (1) можно применить формулу разложения (37) [1] и тогда получим неразмножаемые многопараметрические семейства решений. Поскольку выражения получаются довольно громоздкими, мы приводим в таблице результаты разложения построенных решений с помощью более простых формул (34) и (38) [1].

В случае $\alpha_2 = \alpha_3 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_1 = v$, $k = -1$ из решения (*) (см. таблицу) получаем решение

$$\psi(t, x_1) = \frac{\exp \frac{-iv}{2} \left(x_1 + \left(\frac{v}{2} - \frac{9\alpha_1^2}{2v} \right) t \right)}{|\sqrt{-\gamma \operatorname{ch}(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 v t)}|^{3/2}} \quad (20)$$

одномерного ($n = 1$) нелинейного уравнения

$$i\psi_t = -\partial^2 \psi / \partial x_1^2 + \lambda \psi |\psi|^{4/3}, \quad \lambda < 0.$$

№ п/п	№ формулы исходного решения	Новое решение, полученное применением формулы (34) [1]	Новое решение, полученное применением формулы (38) [1]
1	(5) $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$	$\left(d_2 - \frac{4}{3} \beta t \right)^{-\frac{3}{4} \left(1 - \frac{i\alpha}{\beta} \right)} \times$ $\times \exp \left(\frac{i}{2k} \left(\varepsilon_a x_a + \frac{ \varepsilon ^2}{2} t \right) \right)$	$t^{-\frac{3}{2}} \left(d_2 + \frac{4\beta}{3t} \right)^{-\frac{3}{4} \left(1 - \frac{i\alpha}{\beta} \right)} \times$ $\times \exp \left(-\frac{i x ^2}{4kt} \right)$
2	(9) $\lambda \in \mathbb{R}^1$	$\gamma \exp i \left(b_a x_a + (k b_a b_a - \lambda \gamma^{4/3}) t \right)$	$\times \exp i \left(\frac{\gamma t^{-3/2} \times}{\left(\lambda \gamma^{4/3} - k b_a b_a + b_a x_a - \frac{ x ^2}{4kt} \right)} \right)$
3	(12) $\lambda \in \mathbb{R}^1$	$\left[\frac{15k \alpha ^2}{-4\lambda (\alpha_a x_a + \alpha_a \varepsilon_a t)^2} \right]^{3/4} \times$ $\times \exp \left[\frac{i}{2k} \left(\varepsilon_a x_a + \frac{ \varepsilon ^2}{2} t \right) \right]$	$\left[\frac{15k \alpha ^2}{-4\lambda (\alpha x)^2} \right]^{3/4} \exp \left(-\frac{i x ^2}{4kt} \right)$
4	(14) $\lambda \in \mathbb{R}^1$	$\left(\frac{15k}{-4\lambda x + \varepsilon t ^2} \right)^{3/4} \times$ $\times \exp \left[\frac{i}{2k} \left(\varepsilon_a x_a + \frac{ \varepsilon ^2}{2} t \right) \right]$	$\left(\frac{15k}{-4\lambda x ^2} \right)^{3/4} \exp \left(\frac{-i x ^2}{4kt} \right)$
5	(17a) $\lambda k < 0$, $\alpha_0 k < 0$	$\frac{\exp \frac{i}{2k} \left(\varepsilon_a x_a + \left(\frac{ \varepsilon ^2}{2} + 2k\alpha_0 \right) t \right)}{ \sqrt{\gamma} \operatorname{sh}(\alpha_a x_a + \alpha_a \varepsilon_a t) ^{3/2}}$	$\frac{\exp \left[-\frac{i}{4kt} (x ^2 + 4\alpha_0) \right]}{\left(\sqrt{\gamma} t \operatorname{sh} \frac{\alpha_a x_a}{t} \right)^{3/2}}$
6	(17) $\lambda k < 0$, $\alpha_0 k > 0$	$\frac{\exp \frac{i}{2k} \left(\varepsilon_a x_a + \left(\frac{ \varepsilon ^2}{2} + 2k\alpha_0 \right) t \right)}{ \sqrt{-\gamma} \cos(\alpha_a x_a + \alpha_a \varepsilon_a t) ^{3/2}}$	$\frac{\exp \left[-\frac{i}{4kt} (x ^2 + 4\alpha_0) \right]}{\left[\sqrt{-\gamma} t \cos \frac{\alpha_a x_a}{t} \right]^{3/2}}$
7	(17c) $\lambda k > 0$, $\alpha_0 k < 0$	$\frac{\exp \frac{i}{2k} \left(\varepsilon_a x_a + \left(\frac{ \varepsilon ^2}{2} + 2k\alpha_0 \right) t \right)}{ \sqrt{-\gamma} \operatorname{ch}(\alpha_a x_a + \alpha_a \varepsilon_a t) ^{3/2}}$	$\frac{\exp \left[-\frac{i}{4kt} (x ^2 + 4\alpha_0) \right]}{\left[\sqrt{-\gamma} t \operatorname{ch} \frac{\alpha_a x_a}{t} \right]^{3/2}}$
8	(18) $\lambda \in \mathbb{R}^1$	$A^{3/4} \exp \frac{i}{2k} \left(\varepsilon_a x_a + \frac{ \varepsilon ^2}{2} t + \right.$ $\left. + 2k\beta \operatorname{arctg} \frac{C^{(2)}_x}{C^{(1)}_x} \right)$ $\frac{1}{\left[x + \varepsilon t ^2 - (C^{(3)}(x + \varepsilon t))^2 \right]^{3/4}}$	$A^{3/4} \exp i \left(\beta \operatorname{arctg} \frac{C^{(2)}_x}{C^{(1)}_x} - \frac{ x ^2}{4kt} \right)$ $\frac{1}{\left[x ^2 - (C^{(3)}_x)^2 \right]^{3/4}}$

Решение (20) естественно назвать солитонным по аналогии с известным решением Захарова—Шабата [6]

$$\psi(t, x_1) = \sqrt{-\frac{\lambda}{2}} \alpha_1 \frac{\exp\left[-\frac{iv}{2}\left(x_1 + \left(\frac{v}{2} - \frac{2\alpha_1^2}{v}\right)t\right)\right]}{\operatorname{ch}(\alpha_1 x_1 + \alpha_1 vt)}$$

нелинейного уравнения Шредингера

$$i\psi_t = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \lambda\psi|\psi|^2, \quad \lambda < 0.$$

2. Точные решения уравнения (2). Редукция уравнения (2) по оператору X_2 [1] преобразует его к свободному уравнению Шредингера (1) [1] с дополнительным условием (6). Подстановка (6) в уравнение (1) [1] приводит к системе (7) для функции $P(t, x)$. Следовательно, получаем плосковолновое решение нелинейного уравнения (2)

$$\psi = \gamma \exp i(kb_a b_a t + b_a x_a), \quad b_a \in \mathbb{R}^1. \quad (21)$$

Рассмотрим теперь нелинейное эллиптическое уравнение

$$k\Delta\varphi + \lambda\varphi \frac{\partial|\varphi|}{\partial x_a} \frac{\partial|\varphi|}{\partial x_a} |\varphi|^{-2} = 0, \quad (22)$$

которое получается из уравнения (2) редукцией по оператору X_3 при $\alpha_0 = 0$ [1]. Любое решение уравнения (22) будет стационарным решением уравнения (2). Но из этих стационарных решений, применяя формулы разности, полученные в [1], мы можем построить многопараметрические семейства нестационарных решений. Таким образом, представляется важным построить классы точных решений уравнения (22).

Пусть в уравнении (22)

$$\varphi = \varphi(\omega), \quad \omega = c_a x_a, \quad c_a \in \mathbb{C}^1, \quad (23)$$

тогда для φ получаем ОДУ второго порядка

$$c_a c_a \left[\frac{d^2 \varphi}{d\omega^2} + \frac{\lambda}{k} \varphi \left(\frac{d|\varphi|}{d\omega} \right)^2 |\varphi|^{-2} \right] = 0. \quad (24)$$

Если $c_a c_a = 0$, то уравнение (24) превращается в тождество и получаем решение уравнения (2)

$$\varphi = F(c_a x_a), \quad (25)$$

где F — произвольная дважды дифференцируемая комплексная функция.

Если $c_a c_a > 0$, $c_a \in \mathbb{R}^1$, то уравнение (24) в случае $\lambda/k = -1$ удается полностью проинтегрировать и получить решение исходного нелинейного уравнения (2)

$$\psi(x) = \frac{\exp[d_3 - d_1 \omega \pm i\sqrt{2} \operatorname{arctg} \exp(2d_1 \omega + d_2/2)]}{\sqrt{1 + \exp(4d_1 \omega + d_2)}}, \quad (26)$$

где $d_1 > 0$, $d_2, d_3 \in \mathbb{R}^1$, $\omega = c_a x_a$.

Если $c_a c_a > 0$ и $\lambda/k = -1$, то нетрудно построить частное решение уравнения (24), которое приводит к решению

$$\varphi = (c_a x_a + c_0)^{1/\lambda_1}, \quad \lambda_1 = 1 + \lambda/k \neq 0 \quad (27)$$

уравнения (2).

Для построения новых решений уравнения (22) преобразуем его к системе двух действительных уравнений с помощью замены

$$\varphi = R(x) \exp iP(x), \quad (28)$$

где R, P — действительные функции.

Подставляя (28) в уравнение (22), получаем систему нелинейных уравнений

$$\Delta R = R P_a P_a - \frac{\lambda}{k} R_a R_a / R, \quad (29)$$

$$R \Delta P = -2 P_a R_a,$$

которая заменой

$$R = \begin{cases} \exp R^1(x), & \lambda/k = -1, \\ (R^1)^{1/\lambda}, & \lambda/k \neq -1, \lambda_1 = 1 + \lambda/k \end{cases} \quad (30)$$

сводится соответственно к системам

$$\Delta R^1 = P_a P_a, \quad \Delta P = -2 R_a^1 P_a, \quad \lambda_1 = 0, \quad (31)$$

$$\Delta R^1 = \lambda_1 R^1 P_a P_a, \quad R^1 \Delta P = -\frac{2}{\lambda_1} R_a^1 P_a, \quad \lambda_1 \neq 0 \quad (32)$$

(индексы $a = 1, 2, 3$ у функций P, R, R^1 обозначают дифференцирование по переменным x_a).

Так как в случае $P(x) = \text{const}$, $\Delta R^1 = 0$, т. е. R^1 — решение уравнения Лапласа, системы уравнений превращаются в тождества, воспользовавшись (28) и (30), получим семейство стационарных решений уравнения (2)

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp R^1(x), & \lambda_1 = 0, \\ (R^1(x))^{1/\lambda_1}, & \lambda_1 \neq 0. \end{cases} \quad (33)$$

В частности, для фундаментального решения $R^1 = \frac{1}{|x|}$ трехмерного уравнения Лапласа получаем решение уравнения (2)

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp \frac{1}{|x|}, & \frac{\lambda}{k} = -1, \\ |x|^{-1/\lambda_1}, & \frac{\lambda}{k} \neq -1. \end{cases} \quad (34)$$

Рассмотрим теперь систему (31) с дополнительным условием

$$\Delta P = 0. \quad (35)$$

Как известно, частное решение уравнения (35) задается формулой

$$P = f(c_a x_a) + f^*(c_a^* x_a), \quad (36)$$

где $c_a c_a = 0$, f — произвольная дважды дифференцируемая действительная функция.

Подставляя выражение (36) в систему (31), после соответствующих преобразований, в предположении, что $R^1 = R^1(c_a x_a, c_a^* x_a)$ получаем ОДУ

$$d^2 R^1 / dV^2 = 1, \quad V(x) = if(c_a x_a) - if^*(c_a^* x_a). \quad (37)$$

Решая уравнение (37) и пользуясь формулами (28), (30), получаем еще одно семейство решений уравнения (2) при $\lambda/k = -1$, которое содержит произвольную функцию

$$\psi(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (f(c_a x_a) - f^*(c_a^* x_a))^2 + id_1 (f(c_a x_a) - f^*(c_a^* x_a)) + \right. \\ \left. + i(f(c_a x_a) + f^*(c_a^* x_a)) \right\},$$

где $c_a c_a = 0$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1$.

Подстановка выражения (36) в систему (32) после соответствующих выкладок позволяет получить решение нелинейного уравнения (2).

$$\psi(x) = \begin{cases} [d_1 \exp(\sqrt{\lambda_1} V(x)) + d_2 \exp(-\sqrt{\lambda_1} V(x))]^{1/\lambda_1} \times \\ \times \exp i(f(c_a x_a) + f^*(c_a x_a)), \quad \lambda_1 > 0, \\ [d_1 \cos(\sqrt{-\lambda_1} V(x)) + d_2 \sin(\sqrt{-\lambda_1} V(x))]^{1/\lambda_1} \times \\ \times \exp i(f(c_a x_a) + f^*(c_a x_a)), \quad \lambda_1 < 0, \end{cases}$$

где $c_a c_a = 0$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1$, $V(x)$ см. (37).

Все построенные выше стационарные решения нелинейного уравнения (2) легко размножить с помощью соответствующих формул [1] до многопараметрических семейств нестационарных решений.

В заключение отметим, что в данной работе мы воспользовались только несколькими редуцированными уравнениями из четырнадцати, полученных в [1], для нахождения точных решений нелинейных уравнений (1), (2). С большим или меньшим успехом можно воспользоваться и другими редуцированными уравнениями. К сожалению, при дальнейшей редукации этих уравнений очень часто получаются нелинейные ОДУ второго порядка, которые не интегрируются в элементарных функциях.

3. Нелинейные ДУЧП с логарифмической нелинейностью. В работе [7] доказано, что уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$\lambda U_t = \Delta U + \lambda U \ln U, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1, \quad U = U(t, x_1, \dots, x_n) \quad (38)$$

инвариантно относительно алгебры Ли $A\mathfrak{G}(1, n)$ с базисными операторами

$$P_i = \partial_t, \quad P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \quad a, b = \overline{1, n} \quad (39a)$$

$$I = \frac{\lambda}{2} e^t U \partial_U, \quad \mathfrak{G}_a = e^t \partial_a - x_a I. \quad (39b)$$

Алгебра $A\mathfrak{G}(1, n)$ (39) принципиально отличается от алгебры Галилея $AG(1, n)$ коммутационными соотношениями $[P_t, \mathfrak{G}_a] = \mathfrak{G}_a$, $[P_t, I] = I$. Операторы \mathfrak{G}_a генерируют группу преобразований

$$t' = t, \quad x'_a = x_a + v_a e^t, \quad a = \overline{1, n},$$

$$U' = U \exp \left[-\frac{\lambda}{2} e^t \left(x_a v_a + e^t \frac{v_a v_a}{2} \right) \right],$$

где v_a — произвольные действительные параметры.

Представляется полезным найти системы нелинейных ДУЧП, инвариантные относительно алгебры $A\mathfrak{G}(1, n)$. С этой целью рассмотрим системы нелинейных эволюционных уравнений вида (3) [1]

$$\begin{aligned} \lambda_1 \psi_t^{(1)} &= A_{ab}^{(1)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) \psi_{ab}^{(1)} + B^{(1)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}), \\ \lambda_2 \psi_t^{(2)} &= A_{ab}^{(2)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) \psi_{ab}^{(2)} + B^{(2)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}), \end{aligned} \quad (40)$$

где $A_{ab}^{(m)}, B^{(m)}$, $m = 1, 2$, — произвольные дифференцируемые комплексные или действительные функции

Теорема. Система уравнений (40) инвариантна относительно алгебры $A\mathfrak{G}(1, n)$ с базисными операторами (39a) и

$$I_\lambda = \frac{e^t}{2} (\lambda_1 \psi^{(1)} \partial_{\psi^{(1)}} + \lambda_2 \psi^{(2)} \partial_{\psi^{(2)}}), \quad \mathfrak{G}_a = e^t \partial_a - x_a I_\lambda$$

тогда и только тогда, когда $A_{ab}^{(m)} = 0$, $a \neq b$, $A_{aa}^{(m)} = C_m(v)$, $B^{(m)}(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = \psi^{(m)} F_m(v, \theta) + (1 - C_m(v)) \psi_a^{(m)} \psi_a^{(m)} I \psi^{(m)} + \lambda_m C_m(v) \psi^{(m)} \times \int [C_m(v) \psi^{(m)}]^{-1} d\psi^{(m)}$, $m = 1, 2$, \sum_m ,

C_m, F_m — произвольные функции, $v = (\psi^{(1)})^{\lambda_2} (\psi^{(2)})^{-\lambda_1}$, $\theta = \frac{\partial v}{\partial x_a} \frac{\partial v}{\partial x_a}$, $\lambda_m \in \mathbb{C}^1$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теорем 1, 2, 3 в работе [1].

Следствие. Если в системе (40) функции $V^{(m)}$ не зависят от производных, то система инвариантна относительно алгебры $A \mathfrak{G}(1, n)$ только тогда, когда имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 \psi_t^{(1)} &= \Delta \psi^{(1)} + \lambda_1 \psi^{(1)} \ln \psi^{(1)} + \psi^{(1)} F_1(v), \\ \lambda_2 \psi_t^{(2)} &= \Delta \psi^{(2)} + \lambda_2 \psi^{(2)} \ln \psi^{(2)} + \psi^{(2)} F_2(v). \end{aligned} \quad (41)$$

В случае системы комплексно-сопряженных уравнений шредингеровского типа вместо системы (41) получаем уравнение

$$i\psi_t = k\Delta\psi + i\psi \ln \psi + \psi F(|\psi|),$$

где F — произвольная функция, $|\psi| = \sqrt{\psi^* \psi}$, $k \in \mathbb{R}^1$.

1. Фуцич В. И., Чернига Р. М. Симметрия и точные решения многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа. I. // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 10.— С. 1349—1357.
2. Фуцич В. И. О симметрии и точных решениях многомерных волновых уравнений // Там же.— 1987.— 39, № 1.— С. 116—123.
3. Collins C. B. Complex potential equations. I. A technique for solution // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1976.— 80.— P. 165—171.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1976.— 576 с.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.— 1108 с.
6. Захаров В. Е., Шабст А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // Журн. эксперим. и теор. физики.— 1971.— 61, № 1.— С. 118—134.
7. Дородницын В. А., Князева И. В., Свирицевский С. Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения.— 1983.— 19.— С. 1215—1223.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 28.03.89