УДК 512.54

Е. Г. Косман

Изоморфизмы силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы. I. Сохранение трансвекций

В [1—3] был развит геометрический подход О'Миры при изучении изоморфизмов классических линейных групп, богатых или достаточно богатых трансвекциями. Эти идеи можно использовать при описании изоморфизмов, получающихся пополнением силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы над конечным полем характеристики p, которые не являются группами, богатыми и, вообще говоря, достаточно богатыми трансвекциями. В случае изоморфности силовских p-подгрупп P и S с помощью результатов [4—6] удалось доказать существование изоморфизма $f: P \to S$, сохраняющего трансвекции.

Ниже используются обозначения и определения из [4—6]. Большинство утверждений приводятся без доказательств, полные тексты которых можно найти в [7]. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Пусть P и S — две изоморфные силовские p-подгруппы из $\mathfrak{P}(V)$. Тогда существует изоморфизм $f: P \to S$, сохраняющий трансвекции.*

Замечание 1. По теореме 1 из [4] любая силовская p-подгруппа $P \in \mathfrak{P}(V)$ изоморфна некоторой силовской p-подгруппе $T \in \mathfrak{S}(V)$, причем существует такое взаимно однозначное линейное отображение $\eta: V \to V$, что $\eta \overline{GL}(V)\eta^{-1} = \overline{GL}(V)$ и $\eta P \eta^{-1} = T$ Поскольку отображение η переводит любую трансвекцию $\tau_{x,\rho} \in P$ в трансвекцию $\tau_{\eta x, \rho\eta^{-1}}$, то далее будем считать, не ограничивая общности, что $P \in \mathfrak{S}(V)$, причем η всегда можно выбрать таким, что любое конечное множество элементов из P содержится в $UT(V_n) = P_n \subset P$ для некоторого n.

Пусть $P \simeq S$, а f — изоморфизм P и S.

Лемма 1. *Пусть $Z(P)$ — нетривиальный центр группы P, трансвекция $\tau_{a,\rho} \in Z(P)$ Тогда $f(\tau_{a,\rho})$ — трансвекция.*

Это результат очевиден по следствию 2 из [5].

Лемма 2. *Если* $\dim W^0(P) = 1$ *и* $a \in W^0(P)$ $(\dim V^0(P) = 1$ *и* $\rho \in V^0(P))$, *то* $N(\tau_{a,\mu}; P)$ $(N(\tau_{b,\rho}; P))$ *состоит только из трансвекций.*

При доказательстве леммы 2 используется результат 1.22 из [2].

Определение 1. *Для любого элемента* σ *группы* G $A^n(\sigma; G) = A(A^{n-1}(\sigma; G); G)$, $A^1(\sigma; G) = A(\sigma; G) = N(\langle [\sigma, g] \mid g \in G\rangle)$.

Лемма 3. *Пусть* $a \in W^0(P)$, $\tau_{a,\mu}$ *и* $\tau_{a,\nu}$ — *трансвекции из* $N(\tau_{a,\rho})$. *Тогда выполняется одно из следующих условий:* 1) $\tau_{a,\mu} \in A(\tau_{a,\nu}) \subset N(\tau_{a,\nu})$; 2) $\tau_{a,\nu} \in A(\tau_{a,\mu}) \subset N(\tau_{a,\mu})$; 3) $A(\tau_{a,\mu}) = A(\tau_{a,\nu})$.

При доказательстве леммы 3 используются результаты [8, 9] о классах сопряженных элементов в $UT(V_n)$ и замечание 1.

Лемма 4. *Пусть $\tau_{y,\nu}$ — трансвекция из $UT(V_n)$. Тогда* $y = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i$, $\nu = \sum_{j=k}^{n} \beta_j \rho_j$, *где* $x_1, \ldots, x_n$ — *базис* V_n, $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — *базис* V'_n *такой, что* $\rho_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Учитывая замечание 1, получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Для любых двух трансвекций $\tau_{a,\rho}$ и $\tau_{b,\varphi}$, принадлежащих силовской p-подгруппе P из $\mathfrak{P}(V)$, либо $\rho(b) = 0$, либо $\varphi(a) = 0$.*

В [5] доказано, что силовская p-подгруппа P содержит единственную максимальную нормальную подгруппу, состоящую только из трансвекций, если либо $\dim W^0(P) = 1$, либо $\dim V^0(P) = 1$. В первом случае такой подгруппой будет $MN(a) = MN(a; P) = \langle \tau_{a,\mu} \mid \langle a \rangle = W^0(P), \mu \in W(P)\rangle$, а во втором — $MN(\rho) = MN(\rho; P) = \langle \tau_{x,\rho} \mid \langle \rho \rangle = V^0(P), x \in V(P)\rangle$. Если же $\dim V^0(P) +$

$+ \dim W^0(P) = 2$, то P содержит и $MN(a)$, и $MN(\rho)$; при этом P имеет нетривиальный центр $Z(P) = \langle \tau_{\alpha a,\rho} \mid \alpha \in F\rangle$.

Если $MN(a) = N(\langle \tau_{\alpha a,\mu} \mid \alpha \in F\rangle)$ для фиксированного функционала $\mu \in W(P)$, то согласно замечанию 1 можно считать $\tau_{\alpha a,\mu} \in UT(V_n)$. Тогда $a = x_1$, $\mu = \sum_{i=2}^{n} \beta_i \rho_i$, причем $\beta_2 \neq 0$. А поскольку $\tau_{\alpha x_1,\mu}$ сопряжена с трансвекцией $\tau_{\alpha x_1,\beta_2\rho_2}$ в $UT(V_n)$ [8, 9], то $MN(x_1) = N(\langle \tau_{\alpha x_1,\rho_2} \mid \alpha \in F\rangle)$.

Аналогично, если $MN(\rho) = N(\langle \tau_{\alpha x,\rho} \mid \alpha \in F\rangle)$ для фиксированного вектора $x \in V(P)$, то можно считать $\tau_{\alpha x,\rho} \in UT(V_n)$. Тогда $\rho = \rho_n$, $x = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i x_i$, причем $\gamma_{n-1} \neq 0$. А поскольку $\tau_{\alpha x,\rho_n}$ сопряжена с трансвекцией $\tau_{\alpha\gamma_{n-1}x_{n-1},\rho_n}$ в $UT(V_n)$, то $MN(\rho_n) = N(\langle \tau_{\alpha x_{n-1},\rho_n} \mid \alpha \in F\rangle)$.

Обозначим $\overline{MN}(a) = P \setminus MN(a)$, $\overline{MN}(\rho) = P \setminus MN(\rho)$.

Лемма 5. 1). *Пусть* $MN(x_1) = N(\langle \tau_{\alpha x_1,\rho_2} \mid \alpha \in F\rangle)$. *Тогда*: а) *множество трансвекций* $TR(x_1) = \{\langle \tau_{\alpha x_1,\rho_2} \mid \alpha \in F\rangle,\ \tau_{y,\nu} \in \overline{MN}(x_1)\}$ *является системой образующих* P; б) *для любой трансвекции* $\tau_{y,\nu} \in \overline{MN}(x_1)$ $\nu(x_2) = 0$.

2). *Пусть* $MN(\rho_n) = N(\langle \tau_{\alpha x_{n-1},\rho_n} \mid \alpha \in F\rangle)$. *Тогда*: а) *множество трансвекций* $TR(\rho_n) = \{\langle \tau_{\alpha x_{n-1},\rho_n} \mid \alpha \in F\rangle,\ \tau_{y,\nu} \in \overline{MN}(\rho_n)\}$ *является системой образующих* P; б) *для любой трансвекции* $\tau_{y,\nu} \in \overline{MN}(\rho_n)$ $\rho_{n-1}(y) = 0$.

При доказательстве леммы 5 используются теорема 2 [6], утверждение 2 [4], лемма 4.

Утверждение 1. *Пусть* $UT(V_n) \subset P$, $V^0(P) = \langle \rho_n\rangle$, $W^0(P) = \langle x_1\rangle$, $\operatorname{char} F \neq 2$.

1). *Если* $MN(x_1) = N(\langle \tau_{\alpha x_1,\rho_2} \mid \alpha \in F\rangle)$, *то отображение трансвекций* $\varphi(a): \tau_{\alpha x_1,\rho_2} \to \tau_{a\alpha x_2,\rho_n} \tau_{\alpha x_1,\rho_2} \tau_{\frac{a(\alpha-1)\alpha}{2} x_1,\rho_n}$, $\alpha \in F$; $\tau_{b,\rho} \to \tau_{b,\rho}$, $\tau_{b,\rho} \in \overline{MN}(x_1)$, *продлевается до автоморфизма группы* P.

2). *Если* $MN(\rho_n) = N(\langle \tau_{\beta x_{n-1},\rho_n} \mid \beta \in F\rangle)$, *то отображение трансвекций* $\varphi'(a): \tau_{\beta x_{n-1},\rho_n} \to \tau_{\beta x_{n-1},\rho_n} \tau_{a\beta x_1,\rho_{n-1}} \tau_{\frac{a\beta(\beta-1)}{2} x_1,\rho_n}$, $\beta \in F$; $\tau_{b,\rho} \to \tau_{b,\rho}$, $\tau_{b,\rho} \in \overline{MN}(\rho_n)$ *продлевается до автоморфизма группы* P.

Доказательство утверждения 1 основано на лемме 5 и результатах [10] об автоморфизмах $UT(V_n)$.

Замечание 2. Согласно замечанию 1 автоморфизмы вида $\varphi(a)$ и $\varphi'(a)$ в соответствующем базисе пространства V имеют все силовские p-подгруппы $P \in \mathfrak{S}(V)$ с условиями $\dim V^0(P) + \dim W^0(P) = 2$, $\operatorname{char} F \neq 2$, $MN(c) = N(\langle \tau_{\alpha c,\mu} \mid \alpha \in F\rangle)$, $\langle c\rangle = W^0(P)$, $MN(\rho) = N(\langle \tau_{\alpha x,\rho} \mid \alpha \in F\rangle)$, $\langle \rho\rangle = V^0(P)$.

Лемма 6. *Если* $W^0(P) = \langle x_1\rangle$ *и* $V^0(P) = \{0\}$ ($W^0(P) = \{0\}$ *и* $V^0(P) = \langle \rho_n\rangle$), *то любой изоморфизм* $f: P \to S$ *сохраняет трансвекции из* $MN(x_1)$ ($MN(\rho_n)$).

При доказательстве леммы 6 используются теорема 2 из [6], утверждение 2 и другие результаты из [4], следствие 2 из [5], леммы 2 и 3.

Лемма 7. *Пусть* $P \simeq S$. *Тогда* $\dim V^0(P) + \dim W^0(P) = \dim V^0(S) + \dim W^0(S)$.

Доказательство леммы 7 основано на теореме из [5]. При этом используются предложение 1.17 из [2] и лемма 6.

Следствие 2. *Пусть* $\dim V^0(P) + \dim W^0(P) = 1$. *Тогда при изоморфизме* $f: P \to S$ *образом единственной максимальной нормальной подгруппы в* P, *состоящей только из трансвекций, будет единственная максимальная нормальная подгруппа в* S, *состоящая только из трансвекций.*

Обозначим $MN(x_1, x_2; P) = \langle \tau_{x,\rho} \mid \tau_{x,\rho} \in P$ и $x \in \langle x_1, x_2\rangle\rangle$, $MN(\rho_{n-1}, \rho_n; P) = \langle \tau_{x,\rho} \mid \tau_{x,\rho} \in P$ и $\rho \in \langle \rho_{n-1}, \rho_n\rangle\rangle$ для силовской p-подгруппы P, содержащей $UT(V_n)$.

Утверждение 2. *Пусть* $UT(V_n) \subset P$, $V^0(P) = \langle \rho_n\rangle$, $W^0(P) = \langle x_1\rangle$, $\operatorname{card} F = 2$.

1). *Если* $MN(x_1, x_2) = N(\langle \tau_{x_1,\rho_2}, \tau_{x_2,\rho_3}\rangle)$, *то отображение трансвекций* φ *вида* $\tau_{x_1,\rho_2} \to \tau_{x_3,\rho_n} \tau_{x_1,\rho_2}, \tau_{x_2,\rho_3} \to \tau_{x_2,\rho_3}$, $\tau_{x_1,\rho} \to \tau_{x_1,\rho}$ *при* $\rho \in \langle \rho_i \mid i \geqslant 4\rangle$, $\tau_{b,\rho} \to$

$\to \tau_{b,\rho}$ *при* $\tau_{b,\rho} \notin MN(x_1) \cup \langle \tau_{x_1,\rho_2}, \tau_{x_2,\rho_3}\rangle$ *продлевается до автоморфизма группы* P.

2). *Если* $MN(\rho_{n-1}, \rho_n) = N(\langle \tau_{x_{n-1},\rho_n}, \tau_{x_{n-2},\rho_{n-1}}\rangle)$, *то отображение трансвекций* φ' *вида* $\tau_{x_{n-1},\rho_n} \to \tau_{x_{n-1},\rho_n}\tau_{x_1,\rho_{n-2}}$, $\tau_{x_{n-2},\rho_{n-1}} \to \tau_{x_{n-2},\rho_{n-1}}$, $\tau_{x,\rho_n} \to \tau_{x,\rho_n}$ *при* $x \in \langle x_i \mid i \neq n-2, n-1\rangle$, $\tau_{b,\rho} \to \tau_{b,\rho}$ *при* $\tau_{b,\rho} \notin MN(\rho_n) \cup \cup \langle \tau_{x_{n-1},\rho_n}, \tau_{x_{n-2},\rho_{n-1}}\rangle$ *продлевается до автоморфизма группы* P.

При доказательстве утверждения 2 используются результаты [10] об автоморфизмах $UT(V_n)$, утверждение 2 из [4] и следствие 1.

Ключевое место в доказательстве существования сохраняющего трансвекции изоморфизма между двумя изоморфными силовскими p-подгруппами из $\mathfrak{P}(V)$ занимает следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть P и S — изоморфные силовские p-подгруппы из $\mathfrak{S}(V)$. Тогда существует такой изоморфизм $f: P \to S$, что для любой трансвекции $\tau_{a,\rho} \in P$ $f(\tau_{a,\rho}) = \tau_{b,\varphi}\sigma$ для некоторых трансвекций $\tau_{b,\varphi} \in S$ и $\sigma \in A(\tau_{b,\varphi}; S)$.*

Доказательство утверждения 3 основано на равенстве $[N(\tau_{a,\rho}; P) : A^n(\tau_{a,\rho}; P)] = [N(f(\tau_{a,\rho}); S) : A^n(f(\tau_{a,\rho}); S)] < \infty$ для любого n. При этом отдельно рассматриваются случаи $\dim V^0(P) + \dim W^0(P) = k$ для $k = 0, 1, 2$. При $k = 0, 1$ указанным в утверждении свойством обладает любой изоморфизм f, а при $k = 2$ исключение составляют силовские p-подгруппы, удовлетворяющие условиям утверждений 1 и 2. В этих исключительных случаях утверждение 3 выполняется для изоморфизмов P и S, заданных с точностью до автоморфизмов группы S, описанных в утверждениях 1 и 2. Кроме этого, при доказательстве утверждения 3 используются теоремы 2 и 3 из [6], следствие 2 и теорема из [5], результаты из [4, 8, 9], замечание 1, леммы 1—4 и 7, следствие 2.

Следствие 3. $f(N(\tau_{a,\rho}; P)) = N(\tau_{b,\varphi}; S)$, $f(A(\tau_{a,\rho}; P)) = A(\tau_{b,\varphi}; S)$.

Следствие 4. *Пусть* $W^0(P) = \langle a\rangle$, $V^0(P) = \langle\rho\rangle$, $W^0(S) = \langle b\rangle$, $V^0(S) = \langle\mu\rangle$. *Тогда либо* $f(MN(a; P)) = MN(b; S)$ *и* $f(MN(\rho; P)) = MN(\mu; S)$, *либо* $f(MN(a; P)) = MN(\mu; S)$ *и* $f(MN(\rho; P)) = MN(b; S)$.

Доказательство теоремы. Согласно замечанию 1 считаем $\tau_{a,\rho} \in UT(V_n) \subset P$, а $\tau_{b,\varphi}$, $\sigma \in UT(V_m) \subset S$ ($\tau_{a,\rho}$, $\tau_{b,\varphi}$, σ определены в утверждении 3). Тогда по лемме 4 для трансвекции $\tau_{a,\rho}$ $a = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i$, $\rho = \sum_{j=s}^{n} \mu_j \rho_j$, где $\alpha_{k-1} \neq 0$, $s \geqslant k$, $\mu_s \neq 0$, а для трансвекции $\tau_{b,\varphi}$ $b = \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i x_i$, $\varphi = \sum_{j=t}^{m} \lambda_j \rho_j$, где $\beta_{r-1} \neq 0$, $t > r-1$, $\lambda_t \neq 0$. Из [8, 9] трансвекции $\tau_{a,\rho}$ и $\tau_{\alpha_{k-1}x_{k-1},\, \mu_s\rho_s}$ сопряжены в $UT(V_n)$, а трансвекции $\tau_{b,\varphi}$ и $\tau_{\beta_{r-1}x_{r-1},\lambda_t\rho_t}$ сопряжены в $UT(V_m)$. Поэтому с точностью до внутренних автоморфизмов групп P и S можно считать $\tau_{a,\rho} = \varepsilon_{ij}(\alpha)$ и $\tau_{b,\varphi} = \varepsilon_{rs}(\beta)$ для некоторых i, j, r, s, где $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $1 \leqslant r < s \leqslant m$, $\alpha \neq 0$ $\beta \neq 0$. При этом $f(\varepsilon_{ij}(\alpha)) = \varepsilon_{rs}(\beta)\sigma$, где $\sigma \in N_{r-1s}N_{rs+1}$. Заметим, что внутренний автоморфизм группы S, состоящий в преобразовании элементов из S с помощью $h = \prod_{u=1}^{r-1} \varepsilon_{ur}(\gamma_{ur}) \prod_{v=s+1}^{m} \varepsilon_{sv}(\gamma_{sv})$, переводит при соответствующих значениях γ_{ur} и γ_{sv} элемент $\varepsilon_{rs}(\beta)\sigma$ в $\varepsilon_{rs}(\beta)\sigma_1$, где $\sigma_1 \in N_{r-1s+1}$. Следовательно, можно полагать $f(\varepsilon_{ij}(\alpha)) = \varepsilon_{rs}(\beta)\sigma_1$, причем $\sigma_1 \in N_{r-1s+1}$.

При $r = 1$ или $s = m$ утверждение теоремы уже доказано, поскольку в этом случае $\sigma_1 = e$, $f(\varepsilon_{ij}(\alpha)) = \varepsilon_{rs}(\beta)$.

Пусть τ_h, $k = \overline{1, 3}$, — любые такие трансвекции из P, что $[\tau_{a,\rho}, \tau] \neq e$ для любой трансвекции $\tau \in K(\tau_h; P)$ — классу сопряженных с τ_h элементов из P. Согласно замечанию 1 считаем $\tau_h \in UT(V_n)$ для всех $k = \overline{1, 3}$. Поскольку $\tau_{a,\rho} = \varepsilon_{ij}(\alpha)$, то с учетом леммы 4 и описания классов сопряженных элементов в $UT(V_n)$ [8, 9] можно полагать, что для любого $k =$

$=\overline{1,3}$ либо $\tau_h = \varepsilon_{ui}(\alpha_{ui})$ для некоторого $1 \leqslant u \leqslant i-1$, либо $\tau_h = \varepsilon_{jv}(\alpha_{jv})$ для некоторого $j+1 \leqslant v \leqslant n$. Здесь возможны следующие варианты: $\tau_k = \varepsilon_{u_k i}(\alpha_{u_k i})$, $k = \overline{1,3}$; $\tau_h = \varepsilon_{jv_k}(\alpha_{jv_k})$, $k = \overline{1,3}$; $\tau_h = \varepsilon_{u_k i}(\alpha_{u_k i})$ при $k = 1, 2$ и $\tau_3 = \varepsilon_{jv}(\alpha_{jv})$; $\tau_h = \varepsilon_{iv_k}(\alpha_{iv_k})$ при $k = 1, 2$ и $\tau_3 = \varepsilon_{ui}(\alpha_{ui})$. Отсюда следует, что по крайней мере для двух трансвекций τ_1 и τ_2 выполняется одно из следующих условий: либо $N(\tau_1; P) \subset N(\tau_2; P)$, либо $N(\tau_1; P) \supset N(\tau_2; P)$, либо $A(\tau_1; P) = A(\tau_2; P)$.

Пусть $r > 1$ и $s < m$. Допустим, что в представлении $\sigma_1 = \prod\limits_{u=1}^{r-1} \prod\limits_{v=s+1}^{m} \varepsilon_{uv} \times (\alpha_{uv}) \in N_{r-1s+1}\, \varepsilon_{uv}(\alpha_{uv}) \neq e$ для некоторой пары $(u, v) \neq (1, m)$. Тогда для $f(\varepsilon_{ij}(\alpha)) = \varepsilon_{rs}(\beta)\sigma_1$ трансвекции $\tau_1' = \varepsilon_{r-1r}(1)$, $\tau_2' = \varepsilon_{ss+1}(1)$, $\tau_3' = \varepsilon_{u-1u}(1)$ (если $u \neq 1$) и $\tau_4' = \varepsilon_{vv+1}(1)$ (если $v \neq m$) обладают тем свойством, что для любой трансвекции $\tau \in K(\tau_k'; S)$ — классу сопряженных с τ_k' элементов из S — $[\varepsilon_{rs}(\beta)\sigma_1, \tau] \neq e$. При этом $N(\tau_{k_1}'; S) \not\subset N(\tau_{k_2}'; S)$ и $A(\tau_{k_1}'; S) \neq A(\tau_{k_2}'; S)$ при $k_1 \neq k_2$ для любых $k_1, k_2 = \overline{1,4}$. По следствию 3 можно считать, что $N(\tau_k'; S) = f(N(\tau_k; P))$ и $A(\tau_k'; S) = f(A(\tau_k; P))$, причем для любой трансвекции $\tau \in K(\tau_h; P)$ $[\varepsilon_{ij}(\alpha), \tau] \neq e$. Поскольку изоморфизм f сохраняет отношения включения и равенства, то получили противоречия либо включениям $f(N(\tau_1; P)) \subset f(N(\tau_2; P))$ или $f(N(\tau_2; P)) \subset f(N(\tau_1; P))$, либо равенству $f(A(\tau_1; P)) = f(A(\tau_2; P))$ для двух из любых трех трансвекций, удовлетворяющих условию $[\varepsilon_{ij}(\alpha), \tau] \neq e$ для любой трансвекции $\tau \in K(\tau_h; P)$, $k = \overline{1,3}$. Следовательно, $\varepsilon_{uv}(\alpha_{uv}) = e$ при $(u, v) \neq (1, m)$, $\sigma_1 = \varepsilon_{1m}(\alpha_{1m})$, и $f(\varepsilon_{ij}(\alpha)) = \varepsilon_{rs}(\beta)\varepsilon_{1m}(\alpha_{1m})$.

Если S имеет тривиальный центр, то не ограничивая общности можно считать, что $\varepsilon_{1m}(\alpha_{1m}) \in Z(UT(V_m))$, но $\varepsilon_{1m}(\alpha_{1m}) \notin Z(S_{m+1})$, где $UT(V_m) \subset S_{m+1} = S \cap GL(V_{m+1}) \subset S$. Пусть $\varphi_{m+1}(\alpha_{ii})$ — такой оператор на V, что $\varphi_{m+1}^{-1}(\alpha_{ii}) S_{m+1} \varphi_{m+1}(\alpha_{ii}) = UT(V_{m+1})$. При этом $\varphi_{m+1}^{-1}(\alpha_{ii}) S \varphi_{m+1}(\alpha_{ii}) = T \in \mathfrak{S}(V)$, а $\varphi_{m+1}^i f$ — изоморфизм P и T, где φ_{m+1}^i — изоморфизм S и T, задаваемый оператором $\varphi_{m+1}(\alpha_{ii})$. Тогда из равенств (3) [6] $\varphi_{m+1}^i(\varepsilon_{1m}(\alpha_{1m})) = \{\varepsilon_{1m}(\alpha_{1m})$ при $i = m+1$; $\varepsilon_{1m}(\alpha_{1m}\alpha_{mm})\varepsilon_{1m+1}(\alpha_{1m})$ при $i = m$; $\varepsilon^{1}{}_{m+1}(\alpha_{1m})$ при $2 \leqslant i < m$; $\varepsilon_{2m+1}(\alpha_{1m})$ при $i = 1\}$. Поскольку $\varepsilon_{1m}(\alpha_{1m}) \notin Z(S_{m+1})$, то $\varphi_{m+1}^i(\varepsilon_{1m}(\alpha_{1m})) \notin Z(UT(V_{m+1})) = \langle \varepsilon_{1m+1}(\alpha) \mid \alpha \in F \rangle$. Поэтому случаи $2 \leqslant i < m$ и $i = m$ при $a_{mm} = 0$ исключаются. Тогда, учитывая $1 < r < s < m$, $\varphi_{m+1}^i f(\varepsilon_{ij}(\alpha)) = \{\varepsilon_{r+1s+1}(\beta)\varepsilon_{2m+1}(\alpha_{1m})$ при $i = 1$; $\varepsilon_{rs}(\beta)\varepsilon_{1m}(\alpha_{1m}\alpha_{mm})\varepsilon_{1m+1}(\alpha_{1m})$ при $i = m$, $\alpha_{mm} \neq 0$; $\varepsilon_{rs}(\beta)\varepsilon_{1m}(\alpha_{1m})$ при $i = m+1\}$. Так как для $\varphi_{m+1}^i f : P \to T$ $(\varphi_{m+1}^i f \times (UT(V_n)) \subset UT(V_{m+1}))$ выполняется все то, о чем говорилось выше для изоморфизма $f : P \to S$ $(f(UT(V_n)) \subset UT(V_m))$, то необходимо $\alpha_{1m} = 0$, так как пары $(2, m+1)$ и $(1, m)$ отличны от $(1, m+1)$ и $\alpha_{mm} \neq 0$. Значит $f(\varepsilon_{ij}(\alpha)) = \varepsilon_{rs}(\beta)$, т. е. в случае $Z(P) = Z(S) = \{e\}$ сохранение трансвекций доказано.

Пусть P и S имеют нетривиальный центр. Тогда из [5] с учетом замечания 1 можно считать $Z(S) = \langle \varepsilon_{1m}(\gamma) \mid \gamma \in F \rangle$. Так как силовские p-подгруппы из $\mathfrak{S}(V)$ порождаются трансвекциями, удовлетворяющими коммутаторным соотношениям $[\tau_{a,\rho}, \tau_{b,\varphi}] = \tau_{\alpha,\rho(b)\varphi}$ при $\rho(a) = \varphi(a) = \varphi(b) = 0$ (см следствие 1) и соотношениям $\tau_{\alpha,\rho}^p = e$, то при $\varepsilon_{ij}(\alpha) \in [P, P]$ $f(\varepsilon_{ij}(\alpha)) = \varepsilon_{rs}(\beta)$ Если же трансвекция $\varepsilon_{rs}(\alpha)$ входит в систему основных образующих группы S и не может быть удалена из этой системы (при этом необходимо $s = r+1$), то биекция $\psi : S \to S$, заданная равенствами $\psi(\varepsilon_{rr+1}(\beta)) = \varepsilon_{rr+1}(\beta)\varepsilon_{1m}(\alpha_{1m})$, $\psi(\tau) = \tau c(\tau)$ для всех остальных основных образующих (трансвекций) группы S, где $c(\tau)$ — любые элементы из $Z(S)$, сохраняет все соотношения между основными образующими и продлевается до автоморфизма группы S, который будем называть центральным. Следовательно, с точностью до центрального автоморфизма группы S $f(\varepsilon_{ij}(\alpha)) = \varepsilon_{rs}(\beta)$, т. е. с точностью до центрального автоморфизма группы S изоморфизм f сохраняет трансвекции.

Таким образом, доказательство теоремы о существовании сохраняющего трансвекции изоморфизма между двумя изоморфными силовскими p-подгруппами из $\mathfrak{P}(V)$ завершено.

1. *О'Мира О. Т.* Лекции о линейных группах // Автоморфизмы классических групп.— М. : Мир, 1976.— С. 57—167.
2. *О'Мира О. Т.* Общая теория изоморфизмов линейных групп // Изоморфизмы классических групп над целостными кольцами.— М. : Мир, 1980.— С. 58—118.
3. *Солацци Р.* Автоморфизмы симплектических конгруэнц-групп // Автоморфизмы классических групп.— М. : Мир, 1976.— С. 188—201.
4. *Косман Е. Г.* Построение силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 2.— С. 173—179.
5. *Косман Е. Г.* О геометрической характеризации силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы // Там же.— 1988.— **40**, № 3.— С. 391—397.
6. *Косман Е. Г.* О нормальном строении силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы // Там же.— 1989.— **41**, № 10.— С. 1399—1403.
7. *Косман Е. Г.* Силовские p-подгруппы ограниченной линейной группы над конечным полем характеристики p : Дис... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1988.— 116 с.
8. *Павлов П. П.* Силовские p-подгруппы полной линейной группы над простым полем характеристики p // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1952.— **16**, № 5.— С. 437—458.
9. *Жужжина Л. Н.* О классах сопряженных элементов унитреугольной группы // V Всесоюз. симп. по теории групп: Тез. докл.— Новосибирск, 1976.— С. 27—28.
10. *Левчук В. М.* Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. Ч. 2. Группы автоморфизмов // Сиб. мат. журн.— 1983.— **24**, № 4.— С. 64—80.

Ин-т ботаники АН УССР, Киев

Получено 14.10.88