УДК 517.926.4

А. Г. Баскаков, В. В. Юргелас

Индефинитная диссипативность и обратимость линейных дифференциальных операторов

1. Введение. В статье получены конкретные условия обратимости линейного дифференциального оператора

$$L = d/dt - A(t),$$

действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}, H)$ функций (как впрочем, и в других функциональных пространствах; см. замечание 4) определенных на вещественной прямой $\mathbb{R}$ со значениями в комплексном гильбертовом пространстве H ($\langle x, y\rangle = \int (x(t), y(t))\, dt$, $x, y \in \mathcal{H}$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$, $(,)$ — скалярное произведение в H). Относительно операторнозначной функции $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(H)$ предполагается, что она принадлежит банахову пространству $C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H))$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, принимающих значения в банаховой алгебре $\mathcal{L}(H)$ ограниченных операторов, действующих в H.

Как хорошо известно [1], для постоянной функции $A(t) \equiv A_0 \in \mathcal{L}(H)$ необходимым и достаточным условием (непрерывной) обратимости оператора L является отсутствие точек спектра $\sigma(A_0)$ оператора A_0 на мнимой оси $i\mathbb{R}$:

$$\sigma(A_0) \cap i\mathbb{R} = \varnothing. \tag{1}$$

В общем случае (т. е. переменной функции $A(t)$) условие

$$\varkappa(A) = \inf_{t\in\mathbb{R}} dist(\sigma(A(t)), i\mathbb{R}) > 0 \tag{2}$$

равномерной отделенности спектров операторов $A(t)$ от мнимой оси, являющееся естественным аналогом условия (1), не гарантирует существования обратного к L. Ряд достаточных условий приведен, например, в монографиях [1, гл. III—V], [2], [3, гл. X], [4, § 4.10] и статье [5].

Основные результаты настоящей статьи содержатся в теоремах 1 и 2. Они получены при предположении (2) с помощью методов, использующих условия инденфинитной диссипативности линейных операторов.

2. Случай самосопряженной операторной функции A. Предположим, что $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$ — самосопряженные операторы из $\mathcal{L}(H)$ и пусть выполнено условие (2). Введем в рассмотрение две функ-

ции $\lambda_\pm\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\pm = \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$, положив

$$\lambda_+(t) = \min\{\lambda \in \sigma(A(t)) \cap \mathbb{C}_+\},$$
$$\lambda_-(t) = \max\{\lambda \in \sigma(A(t)) \cap \mathbb{C}_-\}$$

(здесь $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_+$). Поскольку $\varkappa_0(t) \equiv \min\{\lambda_+(t), -\lambda_-(t)\} \geqslant \varkappa(A)$, то в силу условия (2), очевидно, $\varkappa_0(t) > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим, далее, функцию $J_0 : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(H)$ вида $J_0(t) = P_+(t) - P_-(t)$, где $P_\pm : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(H)$ — проекторнозначные функции, причем при каждом $t \in \mathbb{R}$ $P_\pm(t)$ представляет собой самосопряженный проектор Рисса [1], построенный по спектральному множеству $\sigma_\pm(A(t)) = \sigma(A(t)) \cap \mathbb{C}_\pm$:

$$P_\pm(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\pm} R(\lambda, A(t))\, d\lambda,\ R(\lambda, A(t)) = (A(t) - \lambda I)^{-1}, \tag{3}$$

где $\Gamma_\pm$ — жорданов контур, окружающий $\sigma_\pm(A(t))$ и полностью лежащий в полуплоскости $\mathbb{C}_\pm$. Сразу же отметим, что из (3) следует непрерывная дифференцируемость функции J_0 и что

$$\dot P_\pm(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\pm} R(\lambda, A(t))\, \dot A(t)\, R(\lambda, A(t))\, d\lambda. \tag{4}$$

С помощью функции J_0 определим в пространстве $\mathscr{H}$ унитарный оператор J следующей формулой $(J\varphi)(t) = J_0(t)\varphi(t)$, $\varphi \in \mathscr{H}$, $t \in \mathbb{R}$. Отметим, что $J^* = J$ и $J^2 = I$ — тождественный оператор в $\mathscr{H}$.

В качестве области определения $D(L)$ оператора $L : D(L) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ возьмем пространство Соболева $W_2^1(\mathbb{R}, H) = \{x \in \mathscr{H} : x$ абсолютно непрерывна и $\dot x \in \mathscr{H}\}$. В любом из рассматриваемых нами функциональных пространств непрерывных функций символом $\|\varphi\|$ будет обозначаться supremum норма функции φ.

В условиях следующей теоремы символом $[X, Y]$ обозначается коммутатор $XY - YX$ линейных операторов $X, Y \in \mathscr{L}(H)$. Символом ad_A обозначим оператор в пространстве $C(\mathbb{R}, \mathscr{L}(H))$, определенный равенством $(\mathrm{ad}_A X)(t) = [A(t), X(t)]$ $\forall X \in C(\mathbb{R}, \mathscr{L}(H))$.

Теорема 1. *Пусть функция A дифференцируема, причем ее производная $\dot A$ принадлежит пространству $C(\mathbb{R}, \mathscr{L}(H))$, и выполнено одно из следующих условий:*

$$1)\ \varkappa_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{\|[\dot A(t), J_0(t)]\|}{\lambda_+(t) - \lambda_-(t)} < 2\varkappa(A); \qquad 2)\ \|\dot A\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\dot A(t)\| < 2\varkappa^2(A);$$

$$3)\ \|\mathrm{ad}_A^n \dot A\| < 2^{n+1}\varkappa^{n+2}(A),\ n \geqslant 1.$$

Тогда оператор L (непрерывно) обратим и норма обратного оператора L^{-1} допускает соответствующую (каждому из условий) оценку

$$1')\ \|L^{-1}\| \leqslant (2\varkappa(A) - \varkappa_0)^{-1}; \qquad 2')\ \|L^{-1}\| \leqslant 2\varkappa(A)(2\varkappa^2(A) - \|\dot A\|)^{-1};$$

$$3')\ \|L^{-1}\| \leqslant 2^{n+1}\varkappa^{n+1}(A)(2^{n+1}\varkappa^{n+2}(A) - \|\mathrm{ad}_A^n \dot A\|)^{-1},\quad n \geqslant 1.$$

Доказательство. Используя кососимметричность оператора $d/dt : W_2^1(\mathbb{R}, H) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, самосопряженность и перестановочность операторов $A(t)$, $J_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, получаем, что для любой функции $x \in W_2^1(\mathbb{R}, H)$ имеют место равенства

$$\operatorname{Re}\langle JLx, x\rangle = \frac{1}{2}\langle (JL + L^*J)x, x\rangle = \frac{1}{2}\int \Big(J_0(t)\dot x(t) - J_0(t)A(t)x(t) -$$
$$- \dot J_0(t)x(t) - J_0(t)\dot x(t) - A(t)J_0(t)x(t), x(t)\Big)\, dt =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \Big(\dot J_0(t)x(t), x(t)\Big)\, dt - \int \Big(J_0(t)A(t)x(t), x(t)\Big)\, dt.$$

Оператор $J_0(t)A(t)$ самосопряжен, положительно определен и его спектр совпадает с множеством $\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A(t))\}$. Поэтому $(J_0(t)A(t) \times x(t), x(t)) \geqslant \varkappa(A)\|x(t)\|^2 \ \forall t \in \mathbb{R}$ и, следовательно, получаем

$$\operatorname{Re}\langle JLx, x\rangle \leqslant \left(-\varkappa(A) + \frac{1}{2}\|\dot{J}_0\|\right)\langle x, x\rangle. \tag{5}$$

Непосредственно из оценки (5) следует, что при условии $\frac{1}{2}\|\dot{J}_0\| < \varkappa(A)$ имеет место неравенство $\|Lx\| \geqslant \left(\varkappa(A) - \frac{1}{2}\|\dot{J}_0\|\right)\|x\|$, $x \in D(L)$. Такому же неравенству удовлетворяет и сопряженный оператор $L^* = -d/dt - A(t) : D(L^*) = D(L) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Таким образом, оператор L обратим и имеет место оценка

$$\|L^{-1}\| \leqslant \left(\varkappa(A) - \frac{1}{2}\|\dot{J}_0\|\right)^{-1}. \tag{6}$$

Осталось только доказать, что выполнение каждого из условий теоремы влечет выполнение неравенства $\|\dot{J}_0\| < 2\varkappa(A)$. Для его доказательства найдем представление функции $\dot{J}_0$.

Пусть выполнено условие 1). Рассмотрим оператор $B_+(t) = [\dot{A}(t), P_+(t)]$, который в силу представления (4) можно записать в виде

$$B_+(t) = \frac{1}{2\pi i}\Big(-\int_{\Gamma_+}\dot{A}(t)R(\lambda, A(t))\,d\lambda + \int_{\Gamma_+}\lambda R(\lambda, A(t))\dot{A}(t)R(\lambda, A(t))\,d\lambda + \int_{\Gamma_+}R(\lambda, A(t))\dot{A}(t)\,d\lambda - \int_{\Gamma_+}\lambda R(\lambda, A(t))\dot{A}(t)R(\lambda, A(t))\,d\lambda\Big) = [P_+(t), \dot{A}(t)].$$

Так как $P_-(t) = I - P_+(t)$, то функция $\dot{J}_0$ удовлетворяет уравнению

$$[A(t), \dot{J}_0(t)] = [J_0(t), \dot{A}(t)], \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Из равенств $P_\pm^2(t) = P_\pm(t)$, $t \in \mathbb{R}$, получаем, что $\dot{P}_\pm(t)P_\pm(t) + P_\pm(t)\dot{P}_\pm(t) = \dot{P}_\pm(t)$ и, следовательно, функция $\dot{J}_0$ удовлетворяет условию $P_\pm(t)\dot{J}_0(t) \times P_\pm(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$. Это же условие выполнено для функции B_+ и потому $\dot{J}_0(t)$ — единственное удовлетворяющее условию $P_\pm(t)\dot{J}_0(t)P_\pm(t) = 0$ решение уравнения (7). Из доказанного следует, что $\dot{J}_0(t) = (P_+(t) + P_-(t))\dot{J}_0(t)(P_+(t) + P_-(t)) = P_+(t)\dot{J}_0(t)P_-(t) + P_-(t)\dot{J}_0(t)P_+(t)$. Оператор $P_+(t)\dot{J}_0(t)P_-(t)$ определяется формулой (это непосредственная проверка; более подробно см. [1, гл. 1])

$$P_+(t)\dot{J}_0(t)P_-(t) = \int_0^\infty e^{-A(t)s}P_+(t)[J_0(t), \dot{A}(t)]P_-(t)e^{A(t)s}\,ds,$$

откуда получаем оценку

$$\|P_+(t)\dot{J}_0(t)P_-(t)\| \leqslant (\lambda_+(t) - \lambda_-(t))^{-1}\|[J_0(t), \dot{A}(t)]\| \leqslant \frac{1}{2\varkappa(A)}\|[J_0(t), \dot{A}(t)]\|$$

Аналогичное представление и такая же оценка имеют место для норм операторов $P_-(t)\dot{J}_0(t)P_+(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $[\dot{A}(t), P_-(t)] = -[\dot{A}(t), P_+(t)]$,

$\| P_+(t)\dot J_0(t)P_-(t) - P_-(t)\dot J_0(t)P_+(t)\| = \max\limits_{\pm} \| P_\pm(t)\dot J_0(t)P_\mp(t)\|$ то

$$\|\dot J_0(t)\| \leqslant (\lambda_+(t) - \lambda_-(t))^{-1}\, \|[\dot A(t), J_0(t)]\|, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Таким образом, из условия 1) теоремы следует доказываемое неравенство $\|\dot J_0\| < 2\varkappa(A)$.

Ясно, что условие 2) влечет выполнение условия 1) теоремы.

Пусть теперь выполнено условие 3). Покажем, что из него следует условие 1). Вначале допустим, что $n = 1$.

Рассмотрим оператор $C_+(t) = [\dot A(t), P_+(t)]$. Он представим в виде

$$C_+(t) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{\Gamma_+} \dot A(t) R(\lambda, A(t))\, d\lambda - \int\limits_{\Gamma_+} R(\lambda, A(t))\dot A(t)\, d\lambda\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_+} R(\lambda, A(t))\,[A(t), \dot A(t)]\, R(\lambda, A(t))\, d\lambda.$$

Применяя к оператору $C_+(t)$ приведенный выше прием оценки операторов $\dot J_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, через операторы $\dot A(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (использующий равенство (7)), получаем, что $C_+(t)$ удовлетворяет уравнению

$$[A(t), C_+(t)] = [[A(t), \dot A(t)], P_+(t)]$$

и условиям $P_\pm(t)C_\pm(t)P_\pm(t) = 0$. Следовательно, $\|[\dot A, J_0]\| \leqslant (\varkappa(A))^{-1} \times \|[A, \dot A]\|$. При $n = 2$ тот же прием оценки применяется к функции $[[A, \dot A], P_+]$ и т. д. Оценки 1′) — 3′) теоремы немедленно следуют из оценки (6). Теорема доказана.

Следствие 1. *Оператор* $L_\varepsilon = \varepsilon\dot x - A(t)$ *обратим, если число* $\varepsilon > 0$ *удовлетворяет условию* $\varepsilon\|\dot A\| < 2\varkappa^2(A)$, *и тогда*

$$\|L_\varepsilon^{-1}\| \leqslant 2\varepsilon\varkappa(A)\,(2\varkappa^2(A) - \varepsilon\|\dot A\|)^{-1}.$$

Если функция $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H))$ является только равномерно непрерывной, то используем стандартное представление $A = A_1 + A_2$, где $A_1(t) = \delta^{-1}\int\limits_t^{t+\delta}[A(t) - A(\tau)]\,d\tau$, $A_2(t) = \delta^{-1}\int\limits_t^{t+\delta} A(\tau)\,d\tau$, $\delta > 0$. Ясно, что $\|A_1\| \leqslant \omega(\delta, A)$, где $\omega(\delta, A) = \sup\limits_{|s-\tau|<\delta}\|A(s) - A(\tau)\|$ — модуль непрерывности функции A, и $\|\dot A_2\| \leqslant \|A_1\|\delta^{-1} \leqslant \delta^{-1}\omega(\delta, A)$, причем $\varkappa(A_2) \geqslant \varkappa(A) - \|A_1\| \geqslant \varkappa(A) - \omega(\delta, A)$. Представляя оператор L в виде $L = L_2 - A_1$, где $L_2 = d/dt - A_2$, непосредственно из теоремы 1 получаем

Следствие 2. *Оператор L обратим, если существует такое число* $\delta > 0$, *что выполнены следующие условия*: 1) $\varkappa(A) > \omega(\delta, A)$; 2) $2(\varkappa(A) - \omega(\delta, A))^2 > \delta^{-1}\omega(\delta, A)$; 3) $2\omega(\delta, A)(\varkappa(A) - \omega(\delta, A)) < 2(\varkappa(A) - \omega(\delta, A)) - \delta^{-1}\omega(\delta, A)$.

Отметим, что первые два условия гарантируют обратимость оператора L_2, а условие 3) дает оценку $\|L_2^{-1}\|\,\|A_1\| < 1$, влекущую обратимость исходного оператора L.

3. Некоторые обобщения теоремы 1. Теперь опустим требование самосопряженности значений функции $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H))$. С целью использовать теорему 1 представим эту функцию в виде $A(t) = A_1(t) + iA_2(t)$, где $A_1(t) = \operatorname{Re} A(t)$ и $A_2(t) = \frac{1}{2i}(A(t) - A^*(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

Эволюционный оператор $V(t)$ уравнения $\dot x = iA_2(t)x$ является унитарным для любого $t \in \mathbb{R}$ и имеет место равенство $L = \overline{V}L_1\overline{V}^{-1}$, где оператор $\overline{V}$:

$\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ определяется соотношением $(\bar{V}y)(t) = V(t)\,y(t)$, $y \in \mathcal{H}$ и $L_1 x = \dot{x} - V^{-1}(t)\,A_1(t)\,V(t)x$, $x \in D(L_1) = D(L) = W_2^1(\mathbb{R}, H)$. Таким образом, оператор L унитарно эквивалентен оператору L_1 и поэтому условие обратимости для L можно формулировать, используя операторную функцию A_1.

Теорема 2. *Пусть функция A_1 непрерывно дифференцируема, $\dot{A}_1 \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(H))$ и выполнены условия:* 1) $\varkappa(A_1) > 0$; 2) $2\varkappa^2(A_1) > \| \dot{A}_1 + i[A_1, A_2] \|$. *Тогда оператор L обратим.*

Доказательство. К оператору L_1 применим теорему 1. Поскольку $\sigma(B(t)) = \sigma(A_1(t))$ для оператора $B(t) = V^{-1}(t)\,A(t)\,V(t)$, то $\varkappa(B) = \varkappa(A_1) > 0$. Далее, $\dot{B}(t) = \dot{V}^{-1}(t)\,A_1(t)\,V(t) + V^{-1}(t)\,\dot{A}_1(t)\,V(t) + V^{-1}(t)\,A_1(t)\,\dot{V}(t) = V^{-1}(t)\,(\dot{A}_1(t) + i[A_1(t), A_2(t)])\,V(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Теперь ясно, что для оператора L_1 выполнено условие 2) теоремы 1, т. е. обратим L_1 и вместе с ним оператор L.

Следствие 1. *Оператор L обратим, если выполнены условия:* 1) $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$ — *нормальные операторы*; 2) $2\varkappa^2(\mathrm{Re}\,A) > \| \mathrm{Re}\,\dot{A} \|$.

Пусть теперь H — конечномерное пространство размерности n и собственные значения $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ каждого оператора $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, полупросты (т. е. нет присоединенных векторов). Рассмотрим самосопряженный положительно определенный оператор $W(t) = P_1^*(t)\,P_1(t) + \ldots + P_n^*(t) \times P_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $P_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$,— проектор на собственное подпространство оператора $A(t)$, отвечающее собственному значению $\lambda_i(t)$ (параллельно другим собственным подпространствам).

Следствие 2. *Если при указанных предположениях выполнено условие* $2\varkappa^2(A) > \| W \| \| \dot{A} \| \| W^{-1} \|$, *то оператор L обратим.*

Достаточно заметить, что каждый оператор $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, нормален относительно нового скалярного произведения $(x, y)_t = (W(t)\,x, y)$ в H. (Кроме того, следует учесть взаимосвязь новой нормы операторной функции $\dot{A}$ с ее старой нормой.)

Сделаем несколько замечаний о возможном расширении класса рассматриваемых функций A.

Замечание 1. В общем случае, т. е. когда на собственные значения $A(t)$ не налагаются ограничения, можно воспользоваться следствием 2, предварительно добавив к $A(t)$ подходящее «малое» слагаемое $B_\varepsilon(t)$ так, чтобы собственные значения операторов $A(t) + B_\varepsilon(t)$ стали полупростыми. Однако от формулировки соответствующего утверждения мы отказываемся ввиду его громоздкости.

Замечание 2. В условиях теоремы 2 (и ее следствий) можно опустить требование дифференцируемости функции A и сформулировать аналог следствия 2 теоремы 1.

Замечание 3. Во всех условиях утверждений статьи величину $\varkappa(A)$ можно заменить величиной $\varkappa_0(A) = \inf\limits_{t \in \mathbb{R} \setminus [-\Delta, \Delta]} \mathrm{dist}(\sigma(A(t)), i\mathbb{R})$, $\Delta > 0$, требуя, чтобы $\varkappa_0(A) > 0$ (причем необязательно, чтобы $\varkappa(A) > 0$). Тогда оператор L будет фредгольмовым.

Замечание 4. Поскольку обратимость оператора L в пространстве $L_2(\mathbb{R}, H)$ эквивалентна его обратимости в любом из пространств $L_p(\mathbb{R}, H)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (а также в пространстве $C(\mathbb{R}, H)$) [2, §§ 63, 64], то полученные нами условия обратимости оператора L одновременно являются условиями его обратимости в любом из указанных пространств.

Замечание 5. Условие непрерывности функции A для получения результатов этой статьи существенно: например, все скалярные дифференциальные операторы вида $\varepsilon d/dt - a(t)$, $\varepsilon > 0$ необратимы, если $a(t) = 1$ для $t \geqslant 0$ и $a(t) = -1$ для $t < 0$.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 584 с.
2. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.— М.: Мир, 1970.— 456 с.

3. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978.— 204 с.
4. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
5. *Рожков В. И.* Почти периодические решения линейных систем с малым параметром при производной // Дифференц. уравнения.— 1986.— **22**, № 10.— С. 1829—1833.

Воронеж. ун-т Получено 21.12.87