УДК 517.9

Е. Ю. Романенко

Асимптотика решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений

Изучается асимптотическое поведение $C^1((0, T], \mathbb{R})$ — решений уравнения

$$\dot{x}(at) + t^{\lambda} b(t)\dot{x}(t) + c(t)x(at) + d(t)x(t) = 0, \qquad 0 < \lambda < 1, \ a > 1, \qquad (1)$$

в окрестности его сингулярной критической точки $t = 0$. Функции b, c, $d : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ предполагаются непрерывными; $b(0) = b \neq 0$.

Данная статья непосредственно примыкает к работам [1, 2], посвященным исследованию уравнения (1) в случае $0 < a < 1$, а также к работе [3], в которой при $a > 1$ получена оценка решений «укороченного» уравнения (1) с $d(t) \equiv 0$.

Подход к исследованию уравнения (1) основан на выделении главной части, т. е. тех членов уравнения, которые определяют асимптотику решений при $t \to 0$. При $0 < \lambda < 1$ и $a > 1$ главная часть уравнения (1) имеет вид

$$\dot{z}(at) + t^{\lambda} b\dot{z}(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$(t) = \alpha + \int_{t}^{t^*} \tau^{\nu} a^{h(\tau)} \gamma\left(\frac{\ln \tau}{\ln a}\right) d\tau,$$

где $\nu = \dfrac{\ln|b|}{\ln a}$, $h(t) = \dfrac{\lambda}{2}\dfrac{\ln t}{\ln a}\left(\dfrac{\ln t}{\ln a} - 1\right)$, α — произвольная постоянная, γ — произвольная функция со свойством $\gamma(\theta + 1) = -\operatorname{sign} b \cdot \gamma(\theta)$, t^*—произвольное фиксированное число. Ниже показывается, что решение уравнения (1) обладает локально (при $t \to +0$) аналогичной асимптотикой.

Теорема. *Пусть* $0 < \lambda < 1$, $a > 1$. *Тогда*

1) *для любого решения* $x(t)$ *уравнения* (1) *имеет место оценка*

$$\dot{x}(t) = O(t^{\nu} a^{h(t)}), \ x(t) = O\left(\int_{t}^{t^*} \tau^{\nu} a^{h(\tau)} d\tau\right) \text{ при } t \to +0, \qquad (2)$$

где $\nu = \dfrac{\ln|b|}{\ln a}$, $h(t) = \dfrac{\lambda}{2}\dfrac{\ln t}{\ln a}\left(\dfrac{\ln t}{\ln a} - 1\right)$, t^* — *произвольное достаточно малое фиксированное число*;

2) *для каждого решения $x(t)$ найдется функция $\gamma(\theta)$ такая, что*

$$\gamma(\theta+1) = -\operatorname{sign} b \cdot \gamma(\theta),$$

$$\dot{x}(t) = t^{\nu} a^{h(t)} \left\{ \gamma\left(\frac{\ln t}{\ln a}\right) + o(1) \right\} \text{ при } t \to +0; \tag{3}$$

3) *если $\dot{x}(t) = o(t^{\nu} a^{h(t)})$ при $t \to +0$, то $\dot{x}(t) = o(1)$ и, следовательно, решение $x(t)$ ограничено, более того, $x(t)$ имеет предел при $t \to +0$;*
4) *если $x(t) = o(1)$ при $t \to +0$, то $x(t) \equiv 0$.*

Ради простоты доказательство проведем для уравнения

$$\dot{x}(at) + t^{\lambda} b \dot{x}(t) + cx(at) + dx(t) = 0, \qquad 0 < \lambda < 1, \ a > 1. \tag{4}$$

Наряду с уравнением (4) рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\dot{y}(at) - |b| t^{\lambda} \dot{y}(t) - |c| y(at) - |d| y(t) = 0, \qquad 0 < \lambda < 1, \ a > 1. \tag{5}$$

Лемма 1 (о существовании положительных решений). *Если $y(t)$ — решение уравнения (5), для которого $y(t) > 0$, $\dot{y}(t) < 0$ на начальном интервале $[T/a, T]$, то $y(t) > 0$, $\dot{y}(t) < 0$ при $t \in (0, T]$.*

Доказательство. Так как $|b| t^{\lambda} \dot{y}(t) + |d| y(t) = \dot{y}(at) - |c| y(at)$ и $\dot{y}(at) - |c| y(at) < 0$ при $t \in [T/a^2, T/a]$, то

$$|b| t^{\lambda} \dot{y}(t) + |d| y(t) < 0 \text{ при } t \in [T/a^2, T/a]. \tag{6}$$

Предположим, что существует точка $t' \in [T/a^2, T/a]$ такая, что $y(t') = 0$. Тогда на $[T/a^2, T/a]$ найдется точка t'', для которой $y(t'') = 0$ и $\dot{y}(t'') \geqslant 0$, что противоречит неравенству (6). Таким образом, $y(t) > 0$ и ввиду (6) $\dot{y}(t) < 0$ при $t \in [T/a^2, T/a]$. Следовательно, $y(t) > 0$ и $\dot{y}(t) < 0$ при $t \in (0, T]$.

Лемма 2 (о мажоранте). *Каждое решение $x(t)$ уравнения (4) мажорируется некоторым положительным (монотонно убывающим) решением $y(t)$ уравнения (5).*

Доказательство. Для любого решения $x(t)$ уравнения (4) найдется решение $y(t)$ уравнения (5) такое, что

$$|x(t)| < y(t), \ |\dot{x}(t)| < -\dot{y}(t) \text{ при } t \in [T/a, T]. \tag{7}$$

Из уравнения (4) имеем

$$t^{\lambda} |b| |\dot{x}(t)| \leqslant |\dot{x}(at)| + |c| |x(at)| + |d| |x(t)|. \tag{8}$$

Складывая (5) и (8), находим

$$t^{\lambda} |b| (|\dot{x}(t)| + \dot{y}(t)) \leqslant |\dot{x}(at)| + \dot{y}(at) + |c| (|x(at)| - y(at)) + |d| (|x(t)| - y(t)). \tag{9}$$

Покажем, что из неравенств (6) и (9) вытекает оценка

$$|x(t)| < y(t), \ |\dot{x}(t)| < -\dot{y}(t) \text{ при } t \in]T/a^2, T/a]. \tag{10}$$

Предположим противное. Если нарушается первое из неравенств (10), то ввиду (7) найдется точка $t' \in [T/a^2, T/a]$ такая, что $|x(t')| = y(t')$ и $|x(t)| < y(t)$ при $t \in [(t', T/a]$. Тогда, если $x(t') > 0$, то $\dot{x}(t') \leqslant \dot{y}(t') < 0$, а если $x(t') < 0$, то $\dot{x}(t') \geqslant -\dot{y}(t') > 0$ $(x(t') \neq 0$, так как $y(t) > 0)$.

Из этих неравенств получаем $|\dot{x}(t')| + \dot{y}(t') \geqslant 0$. Последнее невозможно, поскольку правая часть (9) при $t = t'$ строго меньше нуля ввиду (7). Следовательно, $|x(t)| < y(t)$ при $t \in [T/a^2, T/a]$. Если при этом условии не выполняется второе из неравенств (10) и тогда для некоторой точки $t'' \in [T/a^2, T/a]$ $|\dot{x}(t'')| = -\dot{y}(t'')$, то левая часть (9) равна нулю при $t = t''$. С другой стороны, в силу (7) и оценки $|x(t)| < y(t)$ при $t \in [T/a^2, T/a]$ из (9) находим $(t'')^\lambda |b| (|\dot{x}(t'')| + \dot{y}(t'')) < 0$. Следовательно, оценка (10) имеет место при $t \in [T/a^2, T/a]$, а значит, и при $t \in [0, T]$.

Лемма 3 (о вспомогательной оценке). *Для каждого положительного монотонно убывающего решения $y(t)$ уравнения* (5) *существует константа $K = K(y(\cdot)) > 0$ такая, что*

$$y(t) \leqslant (a|b|)^{-n} a^{n(n-1)\frac{\lambda}{2}} K \text{ при } t \in [a^{-n}, a^{-n+1}], \qquad n = 1, 2, \dots \tag{11}$$

Доказательство. Обозначим $f(t) = \frac{|d|}{(1-\lambda)|b|} t^{1-\lambda}$. Запишем уравнение (4) в виде

$$\frac{d}{dt}\{y(t) e^{f(t)}\} = \frac{1}{|b|} t^{-\lambda} e^{f(t)} (\dot{y}(at) - |c| y(at))$$

и проинтегрируем от $t \geqslant a^{-n}$ до a^{-n+1}. Получим

$$y(t) = y(a^{-n+1}) e^{f(a^{-n+1}) - f(t)} - \frac{1}{|b|} e^{-f(t)} \int_t^{a^{-n+1}} \tau^{-\lambda} e^{f(\tau)} (\dot{y}(a\tau) - - |c| y(a\tau)) \, d\tau. \tag{12}$$

Положим $K_n = \max\limits_{[a^{-n}, a^{-n+1}]} y(t)$ и оценим правую часть (12):

$$0 < y(a^{-n+1}) e^{f(a^{-n+1}) - f(t)} \leqslant$$
$$\leqslant y(a^{-n+1}) e^{f(a^{-n+1}) - f(a^{-n})} \leqslant K_{n-1} \exp\left|\frac{d}{b}\right| \frac{a^{1-\lambda} - 1}{1-\lambda},$$

$$0 < -\frac{1}{|b|} e^{-f(t)} \int_t^{a^{-n+1}} \tau^{-\lambda} e^{f(\tau)} \dot{y}(a\tau) \, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a^{(n-1)\lambda}}{a|b|} (y(at) - y(a^{-n+2})) \leqslant \frac{a^{(n-1)\lambda}}{a|b|} K_{n-1},$$

$$0 < \left|\frac{c}{b}\right| e^{-f(t)} \int_t^{a^{-n+1}} \tau^{-\lambda} e^{f(\tau)} y(a\tau) \, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{c}{b}\right| a^{n\lambda} e^{f(a^{-n+1}) - f(t)} (a^{-n+1} - t) K_{n-1} \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{c}{b}\right| (a-1) a^{n\lambda - n} K_{n-1} \exp\left|\frac{d}{b}\right| \frac{a^{1-\lambda} - 1}{1-\lambda}.$$

Таким образом, из (11) имеем

$$K_n \leqslant \frac{1}{a|b|} a^{(n-1)\lambda} (1 + \delta a^{-n\lambda}) K_{n-1} \leqslant \dots$$
$$\dots \leqslant (a|b|)^{-n} a^{n(n-1)\frac{\lambda}{2}} \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \delta a^{-i\lambda}) K_0, \tag{13}$$

где $\delta = a^{1+\lambda}(|b| + |c|) \exp\left|\frac{d}{b}\right| \frac{a^{1-\lambda} - 1}{1-\lambda}$. Произведение в правой части (13) сходится при $a > 1$. Следовательно, неравенство (11) справедливо.

Доказательство теоремы 1. Запишем уравнение (4) в виде

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{bt^{\lambda}}(\dot{x}(at) + cx(at) + dx(t)). \tag{14}$$

Интегрируя уравнение (14), получаем

$$\dot{x}(a^{-n}t) = \left(-\frac{1}{bt^{\lambda}}\right)^{n+1} a^{n(n+1)\frac{\lambda}{2}} \Big[\dot{x}(at) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (bt^{\lambda})^i a^{-i(i-1)\frac{\lambda}{2}} (cx(a^{-i+1}t) + dx(a^{-i}t))\Big]. \tag{15}$$

В силу лемм 2 и 3

$$|x(t)| \leqslant (a|b|)^{-n} a^{n(n-1)\frac{\lambda}{2}} K \text{ при } t \in [a^{-n}, a^{-n+1}], \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Тогда при фиксированном $t \in [1, a]$ из (14) имеем

$$|\dot{x}(a^{-n}t)| \leqslant (|b|t^{\lambda})^{-(n+1)} a^{n(n+1)\frac{\lambda}{2}} \Big[\dot{x}(at) + Ka^{\lambda+1}|bc| \sum_{i=0}^{\infty} a^{-i} + K|d| \sum_{i=0}^{\infty} a^{-i(1-\lambda)}\Big]. \tag{16}$$

Ряды в правой части (16) сходятся при $a > 1$ и $0 < \lambda < 1$. Следовательно, при $t \in [1, a]$

$$|\dot{x}(a^{-n}t)| \leqslant |b|^{-(n+1)} t^{-(n+1)\lambda} a^{n(n+1)\frac{\lambda}{2}} K_1, \tag{17}$$

где $K_1 = \max\limits_{[1,a]} |\dot{x}(at)| + K\dfrac{a^{\lambda+1}|bc|}{1-a} + K\dfrac{|d|}{1-a^{1-\lambda}}$. Учитывая, что

$$(a^{-n}t)^{\nu} a^{h(a^{-n}t)} = |b|^{-n} t^{-n\lambda} a^{n(n+1)\frac{\lambda}{2}} t^{\nu} a^{h(t)}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

из выражения (17) получаем равномерную по n оценку

$$|\dot{x}(a^{-n}t)| \leqslant \frac{(a^{-n}t)^{\nu} a^{h(a^{-n}t)}}{|b|t^{\nu+\lambda}a^{h(t)}} K_1 \leqslant (a^{-n}t)^{\nu} a^{h(a^{-n}t)} K_2,$$

$$t \in [1, a], \; n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, $\dot{x}(t) = O(t^{\nu}a^{h(t)})$, $x(t) = O\left(\int\limits_t^{t^*} \tau^{\nu} a^{h(\tau)} d\tau\right)$ при $t \to +0$, t^* — произвольное достаточно малое фиксированное число. Первое утверждение теоремы 1 доказано.

2. Формально переходя в соотношении (15) к пределу при $n \to \infty$, находим

$$\dot{x}(t) = \omega(t) t^{\nu} a^{h(t)} + \xi(t), \tag{18}$$

где

$$\omega(t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} (-\operatorname{sign} b)^n \frac{\dot{x}(a^{-n}t)}{(a^{-n}t)^{\nu} a^{h(a^{-n}t)}}, \tag{19}$$

$$\xi(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} (bt^{\lambda})^i a^{-i(i-1)\frac{\lambda}{2}} (cx(a^{-i+1}t) + dx(a^{-i}t)). \tag{20}$$

Чтобы оценить $\xi(t)$, воспользуемся следующим свойством $x(t)$ (которое вытекает из асимптотики (2)):

для любого $\mu \in (0, 1)$ существует $T_\mu > 0$ такое, что

$$|x(t)| \leqslant M \int_t^{t^*} \tau^\nu a^{h(\tau)} d\tau \leqslant M t^{\nu+\mu} a^{h(t)} \int_t^{t^*} \tau^{-\mu} d\tau \leqslant N t^{\nu+\mu} a^{h(t)} \text{ при } t \in (0, T_\mu).$$

Выберем произвольное $\mu \in (\lambda, 1)$. Тогда при $t \in (0, T_\mu)$

$$|\xi(t)| \leqslant N \frac{|c| + |d|}{|b|} t^{\mu-\lambda+\nu} a^{h(t)} \sum_{i=0}^{\infty} a^{-i(\mu-\lambda)} =$$

$$= N \frac{|c| + |d|}{|b|(1 - a^{\lambda-\mu})} t^{\nu+\mu-\lambda} a^{h(t)}.$$

Следовательно ряд, представляющий $\xi(t)$, сходится равномерно по t и $\xi(t) = \eta(t) t^{\nu+\mu-\lambda} a^{h(t)}$, $\eta(t) = O(1)$ при $t \to +0$. Тогда предел в правой части (19) существует и справедливо представление (19). При этом из определения $\omega(t)$ следует $\omega(at) = -\operatorname{sign} b \cdot \omega(t)$. Полагая $\omega(t) = \gamma\left(\frac{\ln t}{\ln a}\right)$, из (18) заключаем

$$\dot{x}(t) = t^\nu a^{h(t)} (\omega(t) + \eta(t) t^{\mu-\lambda}) =$$

$$= t^\nu a^{h(t)} \left\{\gamma\left(\frac{\ln t}{\ln a}\right) + O(t^{\mu-\lambda})\right\} \text{ при } t \to +0,$$

что завершает доказательство второго утверждения теоремы.

3. Предположим, что $\dot{x}(t) = o(t^\nu a^{h(t)})$ при $t \to +0$, т. е. $\dot{x}(t) = \varepsilon(t) t^\nu a^{h(t)}$, где $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to +0$. Выясним, каков порядок убывания $\varepsilon(t)$ при $t \to +0$. Согласно уравнению (4) справедливо равенство

$$\dot{x}(a^{-n}t) + (a^{-n}t)^\lambda b\dot{x}(a^{-n}t) + cx(a^{-n+1}t) + dx(a^{-n}t) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и поскольку $\dot{x}(a^{-k}t) = \varepsilon(a^{-k}t) |b|^{-k} t^{-k\lambda} a^{k(k+1)\frac{\lambda}{2}} t^\nu a^{h(t)}$, $k = 1, 2, \ldots$, то

$$\varepsilon(a^{-n+1}t) + \varepsilon(a^{-n}t) + |b|^{n-1} t^{(n-1)\lambda} a^{-n(n-1)\frac{\lambda}{2}} t^{-\nu} a^{-h(t)} (cx(a^{-n+1}t) + $$
$$+ dx(a^{-n}t)) = 0. \tag{21}$$

Зафиксируем произвольное $t \in (0, 1]$ и обозначим через s целую часть числа $\log_a t - 1$. Тогда $t \in [a^{-s}, a^{-s+1}]$ и в силу лемм 2 и 3 имеет место оценка

$$|x(a^{-k}t)| \leqslant (a|b|)^{-(s+k)} a^{(s+k)(s+k-1)\frac{\lambda}{2}} K, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

ввиду которой из (21) получаем

$$|\varepsilon(a^{-n+1}t)| \leqslant |\varepsilon(a^{-n}t)| + K\delta a^{-n(1-\lambda)} t^{-\nu} a^{-h(t)},$$

где $\delta = |c||b|^{-s} a^{-s+1+s(s-1)\frac{\lambda}{2}} + |d||b|^{-s-1} a^{-s+(s^2-s-2)\frac{\lambda}{2}}$. Следовательно,

$$|\varepsilon(t)| \leqslant |\varepsilon(a^{-1}t)| + K\delta a^{-(1-\lambda)} t^{-\nu} a^{-h(t)} \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant |\varepsilon(a^{-m}t)| + K\delta t^{-\nu} a^{-h(t)} \sum_{i=1}^{m} a^{-i(1-\lambda)}.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем оценку

$$|\varepsilon(t)| \leqslant \frac{K\delta}{1 - a^{-(1-\lambda)}} t^{-\nu} a^{-h(t)}, \qquad t \in (0, T].$$

Таким образом, $\dot{x}(t) = O(1)$ при $t \to +0$, а значит, и $x(t) = O(1)$ при $t \to +0$.

Покажем, что существует $\lim\limits_{t\to+0} x(t)$. Запишем уравнение (4) в виде

$$\frac{d}{dt}\{x(at)\} + ab\frac{d}{dt}\{t^\lambda x(t)\} - abt^{\lambda-1}x(t) + acx(at) + adx(t) = 0.$$

Так как $x(t) = O(1)$ при $t \to +0$, то, интегрируя, получаем

$$x(at)\big|_{t_1}^{t_2} = abt_x^\lambda(t)\big|_{t_1}^{t_2} = O^\lambda(t^\lambda)\big|_{t_1}^{t_2} + O(t)\big|_{t_1}^{t_2}. \tag{22}$$

Ввиду ограниченности $x(t)$ предел при $t_1 \to +0$, $t_2 \to +0$ в правой части (22) существует и равен нулю. Следовательно, ввиду (22) существует и $\lim\limits_{t\to+0} x(t)$. Третье утверждение теоремы доказано.

4. Предположим, что $x(t) = o(1)$ при $t \to +0$. Обозначим $K(r) = \max\limits_{[0,r]}|x(t)|$, при этом $K(r) \to 0$ при $r \to 0$. Оценим скорость убывания $K(r)$ при $r \to 0$.

Запишем уравнение (4) в виде

$$\frac{d}{dt}\{x(at)e^{act}\} = -abt^\lambda e^{act}\dot{x}(t) - ade^{act}x(t).$$

Тогда

$$x(at) = -e^{-act}a\int\limits_0^t (b\tau^\lambda\dot{x}(\tau) + dx(\tau))e^{ac\tau}d\tau =$$

$$= -e^{-act}\left\{abt^\lambda e^{act}x(t) - ab\int\limits_0^t(\lambda + ac\tau)\tau^{\lambda-1}e^{ac\tau}x(\tau)\,d\tau + ad\int\limits_0^t e^{ac\tau}x(\tau)\,d\tau\right\}. \tag{23}$$

Положим $l_1(r) = \max\limits_{[0,r]} e^{-act}$, $l_2(r) = \max\limits_{[0,r]} e^{act}$. Понятно, что $l_1(r)\,l_2(r) = e^{a|c|r}$ и $l_i(r) \to 1$ при $r \to 0$, $i = 1, 2$. Из (23) при $t < r$ находим

$$|x(at)| \leqslant a|b|r^\lambda K(r) + a|b|(\lambda + a|c|r)\frac{r^\lambda}{\lambda}l_1(r)\,l_2(r)\,K(r) +$$

$$+ a|d|\,l_1(r)\,l_2(r)\,rK(r) =$$

$$= \left[a|b|r^\lambda + a|b|\frac{\lambda + a|c|r}{\lambda}e^{a|c|r}r^\lambda + a|d|\,e^{a|c|r}r\right]K(r). \tag{24}$$

Поскольку выражение в квадратных скобках в правой части (24) стремится к нулю при $r \to 0$, то из (23) при достаточно малых r получим $K(ar) \leqslant K(r)$ и, следовательно, $K(ar) \leqslant K(r) \leqslant K(a^{-1}r) \leqslant \ldots \leqslant K(a^{-n}r) \to 0$. Поэтому $K(r) \equiv 0$ и тогда $x(t) \equiv 0$ при $t \in [0, r]$. Решая уравнение (4) методом шагов с начальным условием $x(t) \equiv 0$ при $t \in [0, r]$, находим, что $x(t) \equiv 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$. Тем самым доказательство теоремы завершено.

З а м е ч а н и я. 1. Полученные оценки являются точными (они достигаются на решениях уравнения $\dot{x}(at) + t^\lambda b\dot{x}(t) = 0$).

2. Общее решение уравнения (1) в окрестности $t = 0$ может быть построено методом последовательных приближений; оно зависит от произвольной периодической функции и произвольной постоянной. Здесь лишь отметим тот очевидный факт, что семейство ограниченных при $t \to +0$ решений можно представить в виде

$$x_\alpha(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1}(t) - x_n(t),$$

где α — произвольная постоянная, $x_0(t) \equiv \alpha$,

$$x_n(t) = \alpha - a\int\limits_0^{t/a}(b(\tau)\tau^\lambda\dot{x}(\tau) + c(\tau)x(a\tau) + d(\tau)x(\tau))\,d\tau.$$

Это, в частности, означает, что для уравнения (1) существует и притом единственное решение вырожденной начальной задачи $x(0)=\alpha$ при любом $\alpha\in\mathbb{R}$.

Если коэффициенты $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ аналитические в окрестности $t=0$, $x_\alpha(t)$ представляется рядом

$$x_\alpha(t)=\alpha+\sum_{\substack{m,n=0\\ m+n>0}}^{\infty}\alpha_{mn}t^{m+\lambda n},$$

рекуррентные соотношения для α_{mn} находятся из (1).

3. Утверждение теоремы переносится на квазилинейные уравнения вида

$$\dot{x}(at)+t^{\lambda}b(t)\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(at)),\qquad 0<\lambda<1,\ a>1,$$

с липшицевыми правыми частями f, $f(t,0,0)=0$.

1. *Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н.* Асимптотика решений линейных дифференциально-функциональных уравнений // Асимптотическое поведение решений дифференциально-функциональных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978.— С. 5—39.
2. *Романенко Е. Ю., Фещенко Т. С.* Об асимптотическом поведении решений дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа в окрестности критической точки // Исследование дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 107—121.
3. *Романенко Е. Ю., Фещенко Т. С.* Оценка роста в окрестности критической точки решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Динамические системы и дифференц. уравнения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1986.— С. 69—74.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 31.12.87