УДК 517.927.6

Ю. В. Покорный, И. Ю. Шурупова

Об осцилляционных свойствах спектра краевой задачи с функцией Грина, меняющей знак

В настоящей работе изучается трехточечная краевая задача, функция Грина которой $G(t, s)$ меняет знак в «шахматном порядке», т. е. на ее области определения $a \leqslant t, s \leqslant b$ функция $(t - \xi)(s - \xi) G(t, s)$ сохраняет знак (здесь $a < \xi < b$). Краевые задачи, обладающие описанным свойством, выделены в работах Тептина А. Л. (см. библиографию в [1]). В настоящей работе для одной из таких задач устанавливаются специальные оценки функции Грина, а также доказываются осцилляционные спектральные свойства.

1. Пусть $Lx = x^{(n)} + p_1(\cdot) x^{(n-1)} + \ldots + p_n(\cdot) x$ — неосциллирующий на $[a, b]$ дифференциальный оператор с суммируемыми вещественными коэффициентами. Напомним, что неосцилляция L означает, что любое нетривиальное решение уравнения $Lx = 0$ имеет в $[a, b]$ не более $(n - 1)$ нуля с учетом кратностей. Согласно известному результату Пойя [2] неосцилляция L эквивалентна возможности представления L в виде

$$Lx = v_n(\cdot) \frac{d}{dt} v_{n-1}(\cdot) \frac{d}{dt} \ldots v_1(\cdot) \frac{d}{dt} v_0(\cdot) x, \qquad (1)$$

где $v_i(\cdot)$ достаточно гладки и положительны на $[a, b]$. Положим

$$D_0 x = v_0(\cdot) x, \quad D_i x = v_i(\cdot) \frac{d}{dt} D_{i-1} x, \quad i = \overline{1, n},$$

так что $Lx = D_n x$. Нас будет интересовать уравнение

$$Lx = y, \quad y \in L_1[a, b], \qquad (2)$$

при краевых условиях

$$\begin{gathered} x(a) = x'(a) = \ldots = x^{(p-1)}(a) = 0, \\ x(\xi) = x'(\xi) = \ldots = x^{(r-1)}(\xi) = 0, \quad p + r + q = n - 1, \\ x(b) = x'(b) = \ldots = x^{(q-1)}(b) = 0, \end{gathered} \qquad (3)$$

$$(D_{n-1} x)(\xi) = 0, \qquad (4)$$

где $a < \xi < b$. Ниже всюду предполагается, что r нечетно и $r \geqslant 1$.

2. Установим некоторые вспомогательные свойства краевой задачи (2)—(4). Предположения п. 1 предполагаются выполненными.

Из неосцилляции L вытекает, что краевая задача (2)—(4) невырождена. В самом деле, если $x(\cdot)$ — некоторое нетривиальное решение уравнения $Lx = 0$, удовлетворяющее условиям (3), (4), то $(D_n x)(t) \equiv 0$, т. е. $D_{n-1} x$

есть константа, в силу (4) равная нулю. Теперь из неосцилляции оператора L в силу интерполяционных условий (3) следует $x(t) \equiv 0$. Поэтому краевая задача (2)—(4) однозначно разрешима для любой суммируемой $y(t)$ и, более того, для этой задачи существует функция Грина $G(t, s)$.

Введем обозначение $u_0(t) = (t-a)^p (t-\xi)^r (t-b)^q$.

Лемма 1. *При всех $a \leqslant t, s \leqslant b$ функция $G(t, s)$ имеет тот же знак, что и $(s-\xi)u_0(t)$, т. е.*

$$(s-\xi)\, u_0(t)\, G(t, s) \geqslant 0. \tag{5}$$

Доказательство. Достаточно показать, как легко видеть, что для любой непрерывной функции $y(t)$, удовлетворяющей неравенству

$$(t-\xi)\, y(t) \geqslant 0, \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{6}$$

соответствующее решение $x(t)$ краевой задачи (2)—(4) удовлетворяет неравенству $u_0(t)\, x(t) \geqslant 0$, $a \leqslant t \leqslant b$. Покажем это.

Неравенство (6) означает, что $(t-\xi) D_n x(t) \geqslant 0$. Поэтому $(t-\xi) \times \times \frac{d}{dt} D_{n-1} x(t) \geqslant 0$. Но это значит, что $D_{n-1}x(t)$ не возрастает слева от ξ и не убывает справа от ξ. Отсюда в силу условия (4) следует, что $D_{n-1}x(t) \geqslant 0$ всюду на $[a, b]$. Поэтому и из условий (3) в силу леммы 2 из [3] следует, что $x(t)$ не обращается в нуль при $t \neq \xi$ и, более того, $x(t)$ не имеет дополнительных к условиям (3) нулей в точках $t = a$, $t = \xi$, $t = b$, т. е. $x^{(p)}(a) \neq 0$, $x^{(r)}(\xi) \neq 0$, $x^{(q)}(b) \neq 0$. Значит, произведение $u_0(t)\, x(t)$ знакопостоянно на всем $[a, b]$. Нам остается показать, что оно неотрицательно на $[a, b]$.

Рассмотрим функцию $x(t)$ в левой окрестности точки $t = b$. По доказанному выше $D_{n-1}x(t)$ положительна в этой окрестности. Функция $D_{n-2}x(t)$, возрастает на $[a, b]$ и имеет в силу леммы 2 из [3] точно один нуль справа от b. Поэтому $D_{n-2}x(t) > 0$ слева вблизи точки b. Значит, функция $D_{n-3}x(t)$, имея по той же причине один минимум и два нуля внутри (a, b), будет строго положительна слева в окрестности точки $t = b$. Продолжая эти рассуждения далее, убедимся, что $D_k x(t) > 0$, $k \geqslant q$, слева вблизи точки $t = b$. Значит, $D_q x(t) > 0$. Из условий $x(b) = x'(b) = \ldots = x^{(q)}(b) = 0$ следует, что $x^{(q)}(b)$ имеет тот же знак, что и $D_q x(b)$, т. е. $x^{(q)}(b) > 0$. Поэтому вблизи слева от точки $t = b$ функция $x(t)$ имеет тот же знак, что и $(t-q)^q$. А это и означает требуемое. Лемма доказана.

Лемма 2. *При каждом s из (a, b) $(s \neq \xi)$ справедливы соотношения*

$$G(t, s) \neq 0, \quad G^{(p)}(a, s) \neq 0, \tag{7}$$

$$G^{(r)}(\xi, s) \neq 0, \quad G^{(q)}(b, s) \neq 0.$$

Доказательство. При фиксированном s из (a, b) $(s \neq \xi)$ функция $g(t) = G(t, s)$ является обобщенным решением уравнения $Lx = \delta(t-s)$. Это значит, что $D_n g(t) = \delta(t-s)$, откуда следует, что $D_{n-1} g(t)$ есть кусочно постоянная функция с единственным скачком в точке $t = s$. Так как $s \neq \xi$, то в силу условия (4) $g(t) \equiv 0$ на одном из интервалов (a, s), (s, b), а в целом на $[a, b]$ сохраняет знак. Отсюда (в силу леммы 2 из [3]) следует, что при $k = n-1$ суммарная k-кратность нулей (терминологию см. в [3]) у $g(t)$ на (a, b) не больше $(n-1)$. А в силу условий (3) эта суммарная k-кратность нулей не может быть меньше $(n-1)$. Поэтому $r_k(g) = n-1$, причем $r_k(g, a) = p$, $r_k(g, \xi) = r$, $r_k(g, b) = q$, что и означает (7). Лемма доказана.

3. Далее всюду предполагается выполненными предположения п. 1.

Теорема 1. *Существуют суммируемые функции $\alpha(s)$, $\beta(s)$, строго положительные при $s \neq a$, $s \neq \xi$, $s \neq b$ и такие, что функция Грина $G(t, s)$*

краевой задачи (2)—(4) *удовлетворяет оценкам*

$$\alpha(s) \leqslant \frac{(s-\xi)\, G(t, s)}{u_0(t)} \leqslant \beta(s), \quad a < s < b, \quad s \neq \xi, \tag{8}$$

при всех t из (a, b), отличных от ξ.

Доказательство. При фиксированном s из (a, b) рассмотрим отношение

$$H(t, s) = \frac{(s-\xi)\, G(t, s)}{u_0(t)}. \tag{9}$$

При $t \neq a$, $t \neq \xi$, $t \neq b$ это отношение в силу леммы 1 неотрицательно. В силу леммы 2 оно строго положительно. Покажем, что оно может быть доопределено при $t = a$, $t = \xi$, $t = b$ до непрерывной по t функции. Для этого достаточно показать, что отношение (9) имеет ненулевые пределы в этих точках. Последнее же следует из леммы 3 в силу правила Лопиталя, так как $u_0^{(p)}(a) \neq 0$, $u_0^{(r)}(\xi) \neq 0$, $u_0^{(q)}(b) \neq 0$.

Таким образом, при каждом $s \neq \xi$ функция $H(t, s)$ может считаться непрерывной на промежутке $a \leqslant t \leqslant b$. На нем она строго положительна. Для завершения доказательства остается положить $\alpha(s) = \inf\limits_t H(t, s)$, $\beta(s) = \sup\limits_t H(t, s)$.

Следствие. *Пусть функция $\varphi(t)/(t-\xi)$ суммируема и*

$$(-1)^q \varphi(t) \geqslant 0 \quad (\not\equiv 0), \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{10}$$

Тогда в условиях теоремы 1 *интегральный оператор*

$$(G_\varphi f)(t) = \int_a^b G(t, s)\, \varphi(s)\, f(s)\, ds$$

u_0-положителен на конусе

$$K = \{x \in C[a, b] : x(t)\, u_0(t) \geqslant 0, \ a \leqslant t \leqslant b\}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть

$$x(t) = (G_\varphi f)(t) = \int_a^b G(t, s)\, \varphi(s)\, f(s)\, ds.$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{x(t)}{u_0(t)} \equiv \int_a^b \frac{(s-\xi)\, G(t, s)}{u_0(t)} \left[\frac{\varphi(s)}{(s-\xi)}\right] f(s)\, ds.$$

Из (10) в силу нечетности r следует $\dfrac{\varphi(s)\, u_0(s)}{(s-\xi)} \geqslant 0$. Поэтому вследствие оценок (8) из включения $f \in K$ имеем

$$\int_a^b \alpha(s) \frac{\varphi(s)}{(s-\xi)} f(s)\, ds \leqslant \frac{x(t)}{u_0(t)} \leqslant \int_a^b \beta(s) \frac{\varphi(s)}{(s-\xi)} f(s)\, ds.$$

Полагая здесь

$$\int_a^b \alpha(s) \frac{\varphi(s)}{(s-\xi)} f(s)\, ds = \alpha > 0, \quad \int_a^b \beta(s) \frac{\varphi(s)}{(s-\xi)} f(s)\, ds = \beta < \infty,$$

приходим к неравенствам $0 < \alpha \leqslant x(t)/u_0(t) \leqslant \beta < \infty$, что и означает u_0-положительность оператора G_φ на K.

Теорема 2. *Пусть L не осциллирует на $[a, b]$, допуская представление* (1). *Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывна и удовлетворяет условию* (10). *Тогда для спектральной задачи*

$$Lx = \lambda y(t) x \tag{12}$$

при краевых условиях (3), (4) *минимальная по модулю точка спектра λ_0 является простым вещественным положительным собственным значением. Все остальные точки спектра удовлетворяют неравенству $|\lambda| > \lambda_0$. Соответствующая λ_0 собственная функция не имеет нулей при $t \neq a$, $t \neq \xi$, $t \neq b$.*

Доказательство. Оператор

$$(L^{-1}x)(t) = (G_\varphi x)(t) = \int_a^b G(t, s)\varphi(s)x(s)\,ds$$

u_0-положителен на конусе K. В силу непрерывности $\varphi(t)$ и $G(t, s)$ он вполне непрерывен. Следовательно [4, с. 78], он имеет положительное простое собственное значение μ_0. Точки спектра оператора G_φ, отличные от μ_0, лежат в круге $|\mu| \leqslant q\mu_0$, где $q < 1$. Соответствующий μ_0 собственный вектор $u \in K$ является единственным (с точностью до нормы) положительным собственным вектором оператора G_φ. Так как для собственных значений операра L выполняется равенство $\lambda = 1/\mu$, то он имеет минимальную по модулю точку спектра $\lambda_0 = 1/\mu_0$, являющуюся вещественным, положительным и простым собственным значением. Соответствующая λ_0 собственная функция оператора L должна принадлежать конусу (11). Но тогда вследствие u_0-положительности G_φ эта функция должна принадлежать внутренности K_{u_0}. А это значит, что она может иметь нули только в точках $t = a$, $t = \xi$, $t = b$.

4. Изучим структуру всего остального спектра задачи (12), (3), (4) и свойства соответствующих собственных функций.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 спектр задачи* (12), (3), (4) *состоит из последовательности вещественных положительных простых собственных значений $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$. Если $x_0(t), x_1(t), x_2(t), \ldots$ — соответствующие собственные функции, то функции $z_k(t) \neq x_k(t)/u_0(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, обладают следующими свойствами:*

а) *при каждом k функция $z_k(\cdot)$ имеет в $[a, b]$ точно k нулей, все они простые и лежат строго внутри (a, b);*

б) *нули функций $z_k(\cdot)$ перемежаются, т. е. для каждой пары соседних нулей $z_k(\cdot)$ между ними находится точно один нуль $z_{k+1}(\cdot)$;*

в) *последовательность $\{z_k(\cdot)\}_0^\infty$ образует интерполяционный ряд (цепь Маркова) на $[a, b]$, т. е. для каждого k функции $\{z_i\}_0^k$ образуют систему Чебышева порядка k на $[a, b]$.*

Доказательство. Положим $q(t) = \dfrac{\varphi(t)u_0(t)}{(t-\xi)}$. Аналогично рассуждениям следствия к теореме 1 можно показать, что спектр краевой задачи (12), (3), (4) совпадает со спектром задачи $L_0 z = \lambda q z$, где

$$L_0 z = \frac{1}{t-\xi} L(u_0(t) z),$$

причем для каждой собственной функции $z(\cdot)$ последней задачи функция $x(t) = u_0(t) z(t)$ является собственной для краевой задачи (12), (3), (4), и наоборот. Таким образом, утверждение теоремы достаточно установить для спектра оператора L_0. Согласно [3] для этого достаточно показать, что оператор L_0 является δ-регулярным. Согласно [3] δ-регулярность L_0 означает, что L_0 имеет обратный оператор, представимый в интегральной форме с непрерывным ядром (это нами обнаружено ранее), что для любого обобщенного решения $x(\cdot)$ задачи

$$L_0 x = z \tag{13}$$

при

$$z(t) = c_1\delta(t - s_1) + \ldots + c_m\delta(t - s_m), \quad a < s_1 < \ldots < s_m < b, \tag{14}$$

удовлетворяющего условию $(D_{n-1}u_0x)(\xi) = 0$, справедливо неравенство

$$N(x) \leqslant S(L_0x) = S(z) \tag{15}$$

и что если для такого решения $x_0(t)$ задачи (13), (14) при $c_1 = 1$ выполняются равенства

$$c_i x_0(s_i) = 0, \quad i = \overline{2, m}, \tag{16}$$

то $x_0(s_1) > 0$. Напомним, что $N(x)$ означает число нулевых мест непрерывной на $[a, b]$ функции $x(\cdot)$, а $S(z)$ для обобщенной функции вида (14) обозначает число перемен знака в упорядоченном наборе $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Все c_i в (14) считаем ненулевыми, так как в противном случае слагаемые в (14) с нулевыми c_i можно отбросить.

Пусть $x(\cdot)$—решение уравнения (13). Функция $y(\cdot) = u_0(\cdot)x(\cdot)$ удовлетворяет уравнению $Ly = (t - \xi)z(\cdot)$. Пусть $\xi \neq s_i$ при всех $i = \overline{1, m}$. Пусть $s_k < \xi < s_{k+1}$ при некотором k. Предположим вначале, что числа c_k, c_{k+1} имеют противоположный знак. Тогда $S((t - \xi)z) = S(z) - 1$. Функция $D_{n-1}y$ кусочно постоянна, имеет скачки лишь в точках s_i. Поэтому $S(D_{n-1}y) \leqslant S(D_ny) + 1 = S((t - \xi)z) + 1 = S(z)$. На каждом участке знакопостоянства $D_{n-1}y$ предыдущая квазипроизводная $D_{n-2}y$ монотонна и, следовательно, меняет знак не более одного раза. Отсюда и из непрерывности $(D_{n-2}y)(\cdot)$ в целом на $[a, b]$ следует $r_1(D_{n-2}y) \leqslant S(D_{n-1}y) + 1 \leqslant S(z) + 1$. А так как при этом в силу леммы 2 из [3]

$$r_{n-1}(y) \leqslant r_1(D_{n-2}y) + (n - 2), \tag{17}$$

то

$$r_{n-1}(y) \leqslant S(z) + (n - 1). \tag{18}$$

Рассмотрим теперь случай, когда c_k и c_{k+1} имеют одинаковый знак. Тогда, очевидно, $S((t - \xi)z) = S(z) + 1$. Кусочно постоянная функция $D_{n-1}y$ имеет в точках s_k и s_{k+1} скачки противоположного знака. Но на интервале (s_{k-1}, s_{k+1}) эта функция в силу равенства $(D_{n-1}y)(\xi) = 0$ сохраняет знак. Поэтому $S(D_{n-1}y) \leqslant S(z)$. Аналогично предыдущему имеем $r_1(D_{n-2}y) \leqslant S(D_{n-1}y) + 1$. Отсюда в силу (17) следует (18). Если ξ совпадает с одной из точек s_i, то в силу тождества $(t - \xi)\delta(t - \xi) = 0$ мы можем просто выбросить точку $s_{i_0} = \xi$ из представления (14) правой части уравнения (13), что лишь упростит проведенные выше рассуждения. Если же $\xi < s_1$, или $\xi > s_m$, то $S((t - \xi)z) = S(z)$ и все последующие рассуждения сохраняются. Таким образом, (18) справедливо для любого решения уравнения (13). Так как $y(\cdot) = u_0(\cdot)x(\cdot)$ и $r_{n-1}(u_0) - n - 1$, то в силу неравенства $r_{n-1}(y) \geqslant r_{n-1}(u_0) + r_1(x) = (n - 1) + r_1(x)$ из (18) следует

$$S(z) \geqslant r_1(x) = N(x), \tag{19}$$

что и приводит к (15).

Докажем выполнение последнего условия δ-регулярности оператора L_0. Пусть $x(\cdot)$ — решение задачи (13), (14) при $c_1 = 1$, удовлетворяющее равенствам (16). Так как из условий (16) следует $N(x) \geqslant m - 1 \geqslant S(z)$, то в силу (19) $N(x) = m - 1 = S(z)$. Отсюда в силу леммы 3 из [3] вытекает

$$r_{n-1}(y) = S(z) = m - 1. \tag{20}$$

Поэтому при каждом k на каждом участке знакопостоянства $D_{k+1}y$ предыдущая квазипроизводная D_ky меняет знак точно один раз. Следовательно, $S(D_k) = S(D_{k+1}) + 1$. Пользуясь этим свойством и равенством $c_1 = 1$, получаем, что справа вблизи точки a дожно быть $D_{n-1}y > 0$, $D_{n-2}y < 0, \ldots$ $\ldots, (-1)^{n-1-p}D_py > 0$. А так как $y(a) = \ldots = y^{(p-1)}(a) = 0$ и $y^{(p)}(a) \neq 0$, то $(-1)^{n-1-p}y(a) > 0$. Следовательно, $(-1)^{n-1-p}y(t) > 0$ справа вблизи a. Но $y(t) \equiv x(t)u_0(t)$, причем $(-1)^{n-1-p}u_0(t) > 0$ в такой же окрестности a. Поэтому $x(t)$ положительна на своем самом левом участке знакопостоянства. Вследствие (20) и (16) этот участок совпадает с (a, s_2). Поэтому $x(s_1) > 0$. Теорема полностью доказана.

1. *Тептин А. Л.* // Дифференц. уравнения.— 1987.— **23**, № 4.— С. 470—474.
2. *Polia G.* // Trans. Amer. Math. Sco.— 1922.— P. 312—324.
3. *Покорный Ю. В., Лазарев К. П.* // Дифференц. уравнения.— 1987.— **23**, № 4.— С. 458—470.
4. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений.— М. : Изд-во АН СССР, 1962.— 394 с.

Воронеж. ун-т Получено 08.09.87