УДК 517.956

В. В. Новиков

Устранимые множества стационарной системы Навье — Стокса

Предметом нашего изложения являются устранимые множества стационарной системы уравнений Навье—Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Как обычно, мы называем замкнутое множество E устранимым для системы Навье—Стокса для данного класса $K(\Omega)$ вектор-функций в области Ω, если любое классическое решение системы Навье—Стокса в $\Omega \setminus E$, принадлежащее $K(\Omega)$, можно продолжить на множество E так, что оно будет классическим решением системы Навье—Стокса во всей области Ω.

Хорошо известны теоремы об устранимых особенностях гармонических функций и некоторых линейных и нелинейных уравнений [1, 2, 4, 5].

Отсутствие принципа максимума, нелинейный и векторный характер системы Навье—Стокса делают невозможным применение методов, разработанных в упомянутых работах, для доказательства устранимости множеств для системы Навье—Стокса.

Рассмотрим стационарную систему уравнений Навье—Стокса:

$$-\nu\Delta v + (v, \nabla) v = -\nabla p + f, \qquad \operatorname{div} v = 0 \tag{1}$$

в области Ω, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, где $v(x)$ — скорость в точке x, $p(x)$ — давление в точке x, f — сила, $f \in C^\alpha(\Omega)$, $\nabla p \in L_2(\Omega)$.

Обобщенным решением задачи (1) называется вектор-функция v из $H(\Omega)$, удовлетворяющая при всех $\Phi \in J(\Omega)$ интегральному тождеству [3]

$$\int_\Omega (\nu v_x \Phi_x + v_k v_{x_k} \Phi)\, dx = \int_\Omega f\Phi dx.$$

Обозначим $Lv = -\nu\Delta v + (v, \Delta) v + \Delta p - f$. Буквой C будем обозначать различные положительные постоянные, встречающиеся по ходу изложения.

Сначала рассмотрим случай множества E, состоящего из одной точки x_0, на плоскости и в пространстве.

Теорема 1. *Пусть точка $x_0 \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, v является классическим решением задачи* (1) *в области Ω без точки x_0, и $|v|$ принадлежит классу ограниченных функций в Ω в $\mathbb{R}^2$, $|v|$ принадлежит $L_p(\Omega)$, $p \geqslant 6$, в $\mathbb{R}^3$ или v принадлежит $W_2^1(\Omega)$ в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$.*

Тогда точка x_0 является устранимой, т. е. можно доопределить в этой точке так, что она будет классическим решением задачи (1) *во всей области* Ω.

Доказательство теоремы 1 опирается на лемму 2 в случае принадлежности v пространству $W_2^1(\Omega)$, и на леммы 1 и 2 — в остальных случаях.

Лемма 1. *Пусть v удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда v принадлежит* $W_2^1(\Omega)$.

Доказательство. Проинтегрируем по частям выражение $\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} Lv \times \times v dx$, где $\overline{\Sigma}$ — область, ограниченная поверхностью Σ, расположенной между сферами радиусов δ и 2δ с центром в точке x_0, о выборе которой будет сказано ниже. Получим

$$0 = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} Lv\cdot vdx = -\nu \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} \Delta v\cdot vdx + \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} (v, \nabla)\, v\cdot vdx + \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} \nabla p\cdot vdx -$$

$$- \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} f\cdot vdx = \nu \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} v_x^2 dx + \nu \int\limits_{\Sigma} v\cdot \frac{\partial v}{\partial n}\, dS - \nu \int\limits_{\partial\Omega} v\cdot \frac{\partial v}{\partial n}\, dS +$$

$$+ \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} v_k v_{x_k}\cdot vdx + \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} \nabla p\cdot vdx - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} f\cdot vdx,$$

где $\overline{n}$ — вектор внешней нормали, $|\overline{n}| = 1$.

Таким образом, получаем

$$\nu \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} v_x^2\, dx = - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} v_k v_{x_k}\cdot vdx - \nu \int\limits_{\Sigma} v\cdot \frac{\partial v}{\partial n}\, dS + \nu \int\limits_{\partial\Omega} v\cdot \frac{\partial v}{\partial n}\, dS -$$

$$- \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} \nabla p\cdot vdx + \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} f\cdot vdx.$$

Оценим модули поверхностных интегралов. Интеграл по $\partial\Omega$ может быть оценен некоторой постоянной, не зависящей от δ.

Оценим теперь интеграл по Σ. Имеем

$$\int\limits_{\Sigma} v\cdot \frac{\partial v}{\partial n}\, dS = \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial |v|^2}{\partial n}\, dS = \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial (|v|^2 + 1)}{\partial n}\, dS.$$

Для оценки последнего интеграла применим теорему о потоке, доказанную Е. М. Ландисом [7]:

Пусть W_δ — шар радиуса δ с центром в точке x_0. Пусть $h: [0, \infty) \to \to [0, \infty)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{h(x)} < \infty$. Пусть $|v|^2 \in C^2(W_{2\delta} | W_\delta)$. Тогда существует между поверхностями ∂W_δ и $\partial W_{2\delta}$ поверхность Σ, разделяющая эти сферы, такая, что

$$\int\limits_{\Sigma} \left| \frac{\partial(|v|^2 + 1)}{\partial n} \right| dS \leqslant \frac{C}{\delta^2} \int\limits_{W_{2\delta}} h(|v|^2 + 1)\, dx,$$

где выражение $|v|^2 + 1$ отделено от нуля в области Ω.

Выбираем поверхность Σ в соответствии с леммой о потоке.

Таким образом, в $\mathbb{R}^2$ получаем

$$\left| \int\limits_{\Sigma} v\cdot \frac{\partial v}{\partial n}\, dS \right| \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma} \left| \frac{\partial (|v|^2 + 1)}{\partial n} \right| dS \leqslant \frac{C}{\delta^2} \int\limits_{W_{2\delta}} h(|v|^2 + 1)\, dx \leqslant \frac{C_1\delta^2}{\delta^2} = C_1.$$

Для исследования в $\mathbb{R}^3$ заметим, что в качестве функции h может выступать функция $h(w) = w^\beta$, где $\beta > 1$. Здесь последнее неравенство получается из неравенства Гельдера

$$\Big|\int\limits_{W_{2\delta}} w^{\beta}\cdot 1dx\Big|\leqslant\Big|\int\limits_{W_{2\delta}} w^{\beta\cdot p/\beta}dx\Big|^{\beta/p}\Big|\int\limits_{W_{2\delta}} 1^{q}dx\Big|^{1/q},$$

где $\beta/p+1/q=1$.

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\Big|\int\limits_{W_{2\delta}} 1^{q}dx\Big|^{1/q}=\Big(\int\limits_{W_{2\delta}} dx\Big)^{1/q}=(\mathrm{mes}_3 W_{2\delta})^{1/q}=C\delta^{3p-\beta/p}.$$

Условие конечности интеграла $\int\limits_{\Sigma} v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial n}dx$ при $n=3$ записывается в виде $3\cdot\dfrac{p-\beta}{p}\geqslant 2$, $p-\beta\geqslant\dfrac{2}{3}p$. Воспользуемся теперь тем, что $\beta>1$. Получим $p-1\geqslant\dfrac{2}{3}p$, $p\geqslant 3$. Таким образом, при $|v|^2+1\in L_p(\Omega)$, $p\geqslant 3$, $\Big|\int\limits_{\Sigma} v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial n}dx\Big|\leqslant C$. Итак, при $|v|\in L_p(\Omega)$, $p\geqslant 6$, интеграл по поверхности Σ остается ограниченным при всех δ.

Применив к каждому слагаемому суммы $v_k v_{x_k}\cdot v$ интегральное неравенство Коши «с ε», получим

$$\Big|\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} v_k v_{x_k}\cdot v dx\Big|\leqslant\frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_{\Omega}|v|^4dx+\frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} v_x^2\,dx.$$

Здесь $\int\limits_{\Omega}|v|^4dx<\infty$, так как $|v|$ ограничен в $\mathbb{R}^2$, а в $\mathbb{R}^3$ $|v|$ принадлежит $L_p(\Omega)$, $p\geqslant 6$, а значит, и $L_4(\Omega)$. Далее

$$\Big|\int\limits_{\Omega} f\cdot vdx\Big|<\infty,\ \Big|\int\limits_{\Omega}\nabla p\cdot vdx\Big|^2\leqslant\int\limits_{\Omega}|\nabla p|^2dx\cdot\int\limits_{\Omega}|v|^2dx<\infty$$

при наших предположениях относительно p, f и $|v|$.

Выберем число ε столь малым, чтобы выполнялось неравенство $\nu-\dfrac{\varepsilon^2}{2}>0$. Получим

$$\Big(\nu-\frac{\varepsilon^2}{2}\Big)\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} v_x^2\,dx\leqslant C,$$

где постоянная C не зависит от δ.

Перейдем в последнем равенстве к пределу при $\delta\to 0$. Получим, что норма вектор-функции v конечна, т. е. принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Будем говорить, что вектор-функция из пространства $H(\Omega)$ принадлежит классу V, если она тождественно обращается в нуль в некоторой шаровой δ-окрестности точки x_0.*

Тогда пространство V плотно в $J(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_1$.

Доказательство. Будем считать для простоты, что $x_0=0$. Пусть W_δ — шар радиуса δ с центром в точке x_0. Рассмотрим в шаровом слое $W_{2\delta}\setminus W_\delta$ краевую задачу для нахождения a_δ:

$$\mathrm{div}\,a_\delta=0,\ a_\delta|_{\partial W_{2\delta}}=\Phi,\ a_\delta|_{\overline{W}_\delta}=0,$$

где Φ — произвольная вектор-функция из $J(\Omega)$. Пусть $\max\limits_{\Omega}|\Phi_{x_k}|\leqslant M$.

Рассмотрим также вспомогательную краевую задачу:

$$\mathrm{div}\,\tilde{a}=0,\ \tilde{a}|_{\partial W_2}=\tilde{\Phi},\ \tilde{a}|_{\overline{W}_1}=0,$$

где $\tilde{\Phi}(x)=\Phi(\delta x)$, в слое $W_2\setminus W_1$.

Среди всех решений этой задачи существует решение $\tilde{a}$, удовлетворяющее неравенству [3] $\|\tilde{a}\|_1 \leqslant C\|\tilde{\Phi}\|_1$ в шаре W_2. Положим $a_\delta(x) = \tilde{a}\left(\frac{x}{\delta}\right)$. Получим, что выполняется неравенство $\|a_\delta\|_1 \leqslant C\|\Phi\|_1$ в шаре $W_{2\delta}$.

Оценим теперь норму $\|a_\delta - \Phi\|_1$:

$$\|a_\delta - \Phi\|_1 = \sqrt{\int\limits_{W_{2\delta}} (a_\delta - \Phi)_x^2\, dx} \leqslant \sqrt{\int\limits_{W_{2\delta}} a_{\delta x}^2 dx} + \sqrt{\int\limits_{W_{2\delta}} \Phi_x^2 dx} \leqslant$$

$$\leqslant (C+1)\sqrt{\int\limits_{W_{2\delta}} \Phi_x^2\, dx} \leqslant CM\delta^{\frac{n}{2}},$$

где постоянная C не зависит от δ.

Таким образом, мы получили, что $\|a_\delta - \Phi\|_1 \to 0$ при $\delta \to 0$, т. е. V плотно в $J(\Omega)$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Для произвольной вектор-функции $\Phi \in J(\Omega)$ построим соответствующее семейство $\{a_\delta\}$ такое, что $\|a_\delta - \Phi\|_1 \to 0$ при $\delta \to 0$. Так как $a_\delta \in V$, а v — классическое решение задачи (1) в области Ω без точки x_0, то выполняется равенство

$$\int\limits_\Omega (\nu v_x \cdot a_{\delta x} + v_k v_{x_k} \cdot a_\delta) dx = \int\limits_\Omega f \cdot a_\delta dx$$

для всех достаточно малых положительных δ.

Перейдем в последнем равенстве к пределу при $\delta \to 0$. Получим, что v является обобщенным решением задачи (1) во всей области Ω. Но тогда v является классическим решением задачи (1) во всей области Ω [3]. Теорема 1 доказана.

Из этой теоремы, в частности, следует, что при определенных условиях на $|V|$ для стационарной системы Навье—Стокса нельзя задавать на точке в области граничное условие при постановке краевой задачи.

Следующая теорема — об устранимости отрезка в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 2. *Отрезок I конечной длины в $\mathbb{R}^3$ является устранимым для следующих классов вектор-функций*: а) *ограниченных в Ω вектор-функций*; б) *вектор-функций, принадлежащих $W_2^1(\Omega)$*.

Доказательство теоремы опирается на лемму 4 для п. б) и на леммы 3 и 4 для п. а).

Лемма 3. *Пусть v — классическое решение задачи* (1), *ограниченное в области Ω. Тогда v принадлежит $W_2^1(\Omega)$*.

Доказательство. Рассмотрим множество W_δ точек в $\mathbb{R}^3$, отстоящих от отрезка I на расстояние, не превышающее δ (δ — раздутие отрезка I).

Как и в лемме 1, проинтегрируем выражение $\int\limits_{\Omega/\overline{\Sigma}} Lv \cdot v dx$ по частям, где $\overline{\Sigma}$ — область, ограниченная поверхностью Σ, расположенной между поверхностями ∂W_δ и $\partial W_{2\delta}$, о выборе которой будет сказано ниже.

Здесь нам нужно оценить интеграл по поверхности Σ; остальные интегралы оцениваются аналогично лемме 1.

Снова используем теорему о потоке [7]:

$$\left|\int\limits_\Sigma v \cdot \frac{\partial v}{\partial n} dS\right| \leqslant \int\limits_\Sigma \left|\frac{\partial(|v|^2+1)}{\partial n}\right| ds \leqslant \frac{C}{\delta^2} \int\limits_{W_{2\delta}} h(|v|^2+1) dx \leqslant \frac{C \max\limits_\Omega h}{\delta^2} \cdot \delta^2 = C,$$

так как объем 2δ-раздутия отрезка I можно оценить так: $\mathrm{mes}_3\, W_{2\delta} \leqslant C\delta^2$. Следовательно, интеграл $\int\limits_\Sigma v \cdot \frac{\partial v}{\partial n} dS$ остается ограниченным при всех δ. Повторяя рассуждения леммы 1, получаем $\|v\|_1 < \infty$, т. е. v принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Рассмотрим краевую задачу:*

$$\operatorname{div} a_\delta = 0,\ a_\delta|_{\partial W_{2\delta}} = \Phi,\ a_\delta|_{\overline{W}_\delta} = 0,$$

где Φ — произвольная вектор-функция из $J(\Omega)$. Существует решение a_δ этой задачи такое, что интегралы

$$\int_{W_{2\delta}} v_x \cdot (a_\delta - \Phi) dx,\quad \int_{W_{2\delta}} v_k v_{x_k} \cdot (a_\delta - \Phi)\, dx,\quad \int_{W_{2\delta}} f \cdot (a_\delta - \Phi)\, dx$$

стремятся к нулю при $\delta \to 0$.

Доказательство. Построим разбиение множества $W_{2\delta}$ на части длины δ плоскостями, перпендикулярными отрезку I. Построим разбиение единицы на $W_{2\delta}: 1 = \sum_i \zeta_i(x)$ так, чтобы носитель функции ζ_i совпадал с i-й частью разбиения. На i-й части построим вектор-функцию a_δ^i аналогично лемме 2, роль вектор-функции Φ будет играть вектор-функция $\Phi^i = \zeta_i \Phi$. Вектор-функцию a_δ построим в виде суммы: $a_\delta = \sum_i a_\delta^i$. Интеграл $\int_{W_{2\delta}} v_x \times$ $\times (a_\delta - \Phi)_x dx$ оценивается с учетом того, что количество функций ξ_i порядка $1/\delta$, а производная $\zeta_i'(x)$ оценивается по модулю числом C/δ. (Можно взять, например, кусочно-линейные функции $\xi_i(x)$.) Остальные интегралы оцениваются аналогично с помощью классических неравенств. Лемма 4 доказана.

Чтобы доказать теорему 2, достаточно в равенстве

$$\int_\Omega (\nu v_x \cdot a_{\delta x} + v_k v_{x_k} \cdot a_\delta)\, dx = \int_\Omega f \cdot a_\delta dx,$$

которое показывает, что v является решением задачи (1) в области $\Omega \setminus I$, перейти к пределу при $\delta \to 0$, построив для произвольной $\Phi \in J(\Omega)$ соответствующее семейство «срезающих вектор-функций» $\{a_\delta\}$. Получим, что v является обобщенным решением задачи (1) в области Ω.

Но тогда при наших предположениях относительно v, p и f обобщенное решение является классическим [3]. Теорема 2 доказана.

Следующая теорема дает достаточное условие устранимости в терминах мер Хаусдорфа [2].

Будем обозначать через $\Lambda_\alpha(E)$ хаусдорфову α-меру множества E [2].

Теорема 3. *Пусть v — классическое решение задачи* (1) *в $\Omega \setminus E$, принадлежащее классу Гельдера $C^\alpha(\Omega)$.*

Тогда если $\Lambda_\alpha(E) = 0$ в двухмерном, $\Lambda_{1+\alpha}(E) = 0$ в трехмерном случае, то можно так доопределить решение v на множестве E, что оно будет классическим решением задачи (1) *во всей области Ω, т. е. множество E является устранимым.*

Доказательство теоремы опирается на леммы 5 и 6.

Лемма 5. *Пусть v удовлетворяет условиям теоремы* 3. *Тогда v принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$.*

Доказательство. Рассмотрим хаусдорфово покрытие множества E, которое для данного δ дает infinum числу $\sum_i r_i^{n-2+\alpha}$. Как и в монографии [2], обозначим $\Lambda_\alpha^{(\delta)}(E) = \sum_i r_i^\alpha$.

Здесь мы имеем конечное (поскольку множество E предполагается компактным) число покрывающих шаров B_δ^i радиуса, не превышающего δ. Рассмотрим также концентрические шары двойного радиуса. Обозначим их $\overline{B}_\delta^i$; $W_{2\delta} = \bigcup_i \overline{B}_\delta^i$.

Как и в предыдущих леммах, интегрируем по частям выражение $\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} Lv\cdot v dx$, где $\overline{\Sigma}$ — область, ограниченная поверхностью Σ, расположенной между поверхностями $\partial W_{2\delta}$ и ∂W_{δ} о выборе которой будет сказано ниже; остальные интегралы оцениваются аналогично предыдущим леммам.

Построим теперь поверхность Σ. По лемме о потоке [6] существует между сферами ∂B_{δ}^{i} и $\partial \overline{B}_{\delta}^{i}$ поверхность Σ_i, разделяющая эти сферы, такая, что $\int\limits_{\Sigma_i} \frac{d|v|^2}{dn} dS \leqslant C \operatorname*{osc}\limits_{\overline{B}_{\delta}^{i}} |v|^2$ в $\mathbb{R}^2$ и $\int\limits_{\Sigma_i} \frac{\partial |v|^2}{\partial n} dS \leqslant Cr_i \operatorname*{osc}\limits_{\overline{B}_{\delta}^{i}} |v|^2$ в $\mathbb{R}^3$. Так как $|v| \in C^{\alpha}(\Omega)^{\delta}$, то и $|v|^2 \in C^{\alpha}(\Omega)$. Таким образом, получаем

$$\Big|\int\limits_{\Sigma_i} v\cdot\frac{\partial v}{\partial n} ds\Big| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_i} \frac{\partial |v|^2}{\partial n} dx \leqslant C \operatorname*{osc}\limits_{\overline{B}_{i}^{\delta}} |v|^2 \leqslant Cr_i^{\alpha}$$

в $\mathbb{R}^2$ и

$$\Big|\int\limits_{\Sigma_i} v\cdot\frac{\partial v}{\partial n} dS\Big| = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_i} \frac{\partial |v|^2}{\partial n} dS \,| \leqslant Cr_i \operatorname*{osc}\limits_{\overline{B}_{\delta}^{i}} |v|^2 \leqslant Cr_i^{\alpha+1}$$

в $\mathbb{R}^3$. Положим $\Sigma = \partial\left(\bigcup\limits_i \overline{\Sigma}_i\right)$, $\partial\overline{\Sigma}_i = \Sigma_i$. Получим

$$\Big|\int\limits_{\Sigma} \frac{\partial |v|^2}{\partial n} dS\Big| \leqslant \sum_i \int\limits_{\Sigma_i} \Big|\frac{\partial |v|^2}{\partial n}\Big| dS \leqslant C\sum_i r_i^{n-2} \operatorname*{osc}\limits_{\overline{B}_{\delta}^{i}} |v|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_i r_i^{n-2+\alpha} = C\Lambda_{\alpha}^{(\delta)}(E) \to C\Lambda_{\alpha}(E), \quad \delta \to 0.$$

Таким образом, при наших предположениях относительно множества E и решения v получаем, что интеграл по поверхности Σ остается ограниченным при всех δ. Повторяя рассуждения леммы 1, получаем, что $\| v \|_1 < \infty$ и лемма доказана.

Лемма 6 позволяет осуществить предельный переход в равенстве, определяющем обобщенное решение, без использования «срезающих вектор-функций».

Лемма 6. *Пусть множество E и решение v удовлетворяют условиям теоремы 3, Φ — произвольная вектор-функция из $J(\Omega)$.*

Тогда выражение

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} (\nu v_x\cdot\Phi_x + v_k v_{x_k}\cdot\Phi) dx - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} f\cdot\Phi dx$$

стремится к нулю при $\delta \to 0$.

Доказательство. Поскольку v — классическое решение задачи (1) в $\Omega\setminus E$, то для любого δ выполняется равенство

$$-\nu\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} \Delta v\cdot\Phi dx + \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} v_k v_{x_k}\cdot\Phi dx - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} f\cdot\Phi dx + \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} \nabla p\cdot\Phi dx = 0,$$

где поверхность $\overline{\Sigma}$ выбрана так же, как и в лемме 5.

Интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} (\nu v_x\cdot\Phi_x + v_k v_{x_k}\cdot\Phi) dx - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} f\cdot\Phi dx = -\nu\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} \Delta v\cdot\Phi dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} v_k\cdot v_{x_k}\cdot\Phi dx - \nu\int\limits_{\partial\Omega} \Phi\cdot\frac{\partial v}{\partial n} dS + \nu\int\limits_{\Sigma} \Phi\cdot\frac{\partial v}{\partial n} dS - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} f\cdot\Phi dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}} \nabla p\cdot\Phi dx = \nu\int\limits_{\Sigma} \Phi\cdot\frac{\partial v}{\partial n} dS,$$

поскольку ввиду финитности Φ в Ω интегралы по $\partial\Omega$ обращаются в нуль. Как и в лемме 5, оценим интеграл по Σ:

$$\left|\int\limits_{\Sigma}\Phi\cdot\frac{\partial v}{\partial n}\,dS\right|\leqslant\max_{\Omega}|\Phi|\cdot\sum_{k}\int\limits_{\Sigma}\left|\frac{\partial v_k}{\partial n}\right|dS\leqslant C\sum_{i}r_i^{n-2+\alpha}=$$

$$=C\Lambda_{n-2+\alpha}^{(\delta)}(E)\to C\Lambda_{n-2+\alpha}(E)=0.$$

Таким образом, получаем $\int\limits_{\Sigma}\Phi\cdot\dfrac{\partial v}{\partial n}\,dS\to 0$ при $\delta\to 0$, если $\Lambda_{n-2+\alpha}(E)=0$.

Далее,

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}}\nabla p\cdot\Phi dx\to\int\limits_{\Omega}\nabla p\cdot\Phi dx=0,$$

поскольку $\nabla p\in L_2(\Omega)$, и лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Так как $v\in W_2^1(\Omega)$, то

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Sigma}}(\nu v_x\cdot\Phi_x+v_k v_{x_k}\cdot\Phi)dx\times\int\limits_{\Omega}(\nu v_x\cdot\Phi_x+v_k v_{x_k}\cdot\Phi)\,dx$$

при δ, стремящемся к нулю.

Применяя лемму 6, получаем, что v является обобщенным решением задачи (1) в области Ω.

Но тогда v будет являться классическим решением задачи (1) во всей области Ω [3]. Теорема 3 доказана.

1. *Николенко В. Н.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1981.— 180 с.
2. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств.— М. : Мир, 1971.— 125 с.
3. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М. : Наука, 1970.— 288 с.
4. *Мазья В. Г.* Об устранимых особенностях ограниченных решений квазилинейных уравнений любого порядка // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1972.— **27**.— С. 116—130.
5. *Serrin J.* Lacal behaviour of solutions of quasi-linear equations // Acta Math.— 1964.— 3, № 3-4.— P. 247—302.
6. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.— М.: Наука, 1971.— 287 с.
7. *Ландис Е. М.* Интегральные формы теоремы о потоке // Мат. заметки.— 1987.— **42**, вып. 1.— С. 73—78.

Ростов. ин-т инженеров ж.-д. трансп. Получено 20.11.87