УДК 517.91

Д. Я. Хусаинов, Е. А. Юнькова

О близости решений линейных систем с запаздыванием и соответствующих им систем без запаздывания

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\dot{x}(t-\tau), \tag{1}$$

где $x(t),\ x(t-\tau) \in R^n$, A, B — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами. Как известно, при достаточно малом запаздывании τ можно изучать поведение решений $x(t)$ системы (1), используя решения $x_0(t)$ системы без запаздывания [1, 2]

$$\dot{x}_0(t) = (A+B)\,x_0(t). \tag{2}$$

При разработке технических проектов обычно задается допустимый предел точности ε и требуется найти условия на начальные возмущения δ и допустимое запаздывание, при которых он выдерживается. В настоящей работе вычисляется максимально допустимое запаздывание $\tau = \tau_{\max}(\varepsilon, \delta)$, при котором $\|x(t) - x_0(t)\| < \varepsilon$, если только на промежутке $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ выполняется условие $\|x(t) - x_0(t)\| < \delta$.

Теорема. *Пусть система (2) асимптотически устойчива. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ и любого $0 < \delta < \sqrt{\Delta(H)}\varepsilon$ для решений $x(t)$ и $x_0(t)$ систем (1) и (2) справедливо $\|x(t) - x_0(t)\| < \varepsilon$ при $t > t_0$, как только $\|x(t) - x_0(t)\| < \delta$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$* и $\tau \leqslant \tau_{\max}(\varepsilon, \delta)$, *где*

$$\tau_{\max}(\varepsilon, \delta) = 1/2 \min \left\{ \frac{1}{q\|HB\|} \left[\sqrt{(q\|H\| + p\sqrt{\Delta(H)}\,\varepsilon)^2 + 2q\lambda_{\min}(C) \times \|HB\|\Delta(H)\varepsilon} - (q\|H\| + p\sqrt{\Delta(H)}\,\varepsilon)\right],\right.$$
$$\left. \frac{\varepsilon\Delta(H)}{q}\left[\sqrt{\left(\|A\| + \frac{\|B\|\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)^2 + \frac{4q}{\varepsilon\Delta(H)}\left(1 - \frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)} - \left(\|A\| + \frac{\|B\|\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\right]\right\}, \quad p = (\|A\| + \|B\|)\,\|HB\|, \quad q = \|B(A+B)\| \times$$
$$\times \|x_0(t_0)\|, \quad \Delta(H) = \frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}. \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ — наименьшее и наибольшее собственные числа матриц H и C, входящих в матричное уравнение Ляпунова $(A+B)^T H + H(A+B) = -C$, под нормой вектора понимается $\|x(t)\| = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\right\}^{1/2}$, под нормой матрицы — спектральная норма $\|A\| = \{\lambda_{\max}(A^T A)\}^{1/2}$.

Доказательство. Обозначим разность решений систем (1) и (2) через $\tilde{x}(t)$: $\tilde{x}(t) = x(t) - x_0(t)$. Она удовлетворяет системе уравнений $\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{x}(t-\tau) + B[x_0(t-\tau) - x_0(t)]$. Используя интегральное представление $x_0(t) = x_0(t-\tau) + \int_{t-\tau}^{t} (A+B)\,x_0(s)\,ds$ системы без запаздывания (2), получаем $\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{x}(t-\tau) - B(A+B)\int_{t-\tau}^{t} x_0(s)\,ds$. Согласно теореме о среднем $\int\limits_{t-\tau}^{t} x_0(s)\,ds = \tau x_0(\theta)$, где $x_0(\theta)$ — решение системы (2) в точке $t-\tau<\theta<t$, которое можно представить в виде $x_0(\theta) = e^{(A+B)(\theta-t_0)}x_0(t_0)$. Таким образом, получаем возмущенную систему

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{x}(t-\tau) + Q(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t-\tau)) \tag{4}$$

с возмущениями вида $Q(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t-\tau)) = -B(A+B)e^{(A+B)(\theta-t_0)}x_0(t_0)\tau$. Известно [3], что произвольное решение $\tilde{x}(t)$ системы (4) содержится в ε-окрестности начала координат при $t>t_0$, если $\|\tilde{x}(t)\|<\delta(\varepsilon,\tau)$ при $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$, $\tau<\tau_0$, и $\sup\limits_{\tilde{x}(t),\tilde{x}(t-\tau)\in R^n}\{\|Q(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t-\tau))\|\}<\eta(\varepsilon,\tau)$, где

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(C)\sqrt{\Delta(H)}}{2(\|A\|+\|B\|)\|HB\|},$$

$$\delta(\varepsilon,\tau) = \frac{1-\zeta}{1+\|B\|\tau}e^{-\|A\|\tau}\sqrt{\Delta(H)}\,\varepsilon, \tag{5}$$

$$\eta(\varepsilon,\tau) = \min\left\{\frac{\zeta}{\tau}e^{-\|A\|\tau}, \frac{\lambda_{\min}(C)(\tau_0-\tau)}{2\tau_0(\|HB\|\tau+\|H\|)}\right\}\sqrt{\Delta(H)}\,\varepsilon, \tag{6}$$

$0<\zeta<1$ — произвольная постоянная. Обозначим $q=\|B(A+B)\|\times\|x_0(t_0)\|$. Тогда, учитывая оценки решений системы (2) [4], для возмущений системы (4) получаем неравенство $\sup\limits_{\tilde{x}(t),\tilde{x}(t-\tau)\in R^n}\{\|Q(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t-\tau))\|\}\leqslant q\tau/\sqrt{\Delta(H)}$. Пусть $\|x(t)-x_0(t)\|<\delta$ при $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$, где $\delta<\sqrt{\Delta(H)}\,\varepsilon$ — заранее заданная фиксированная величина. Как следует из (6), значение ζ, соответствующее выбранному δ, равно $\zeta = 1-(1+\|B\|\tau)\times e^{\|A\|\tau}\delta/(\varepsilon\sqrt{\Delta(H)})$. Таким образом, задача сводится к отысканию максимального значения $\tau=\tau_{\max}(\varepsilon,\delta)$, при котором справедливо неравенство

$$\min\left\{\frac{e^{-\|A\|\tau}}{\tau}\left[1-(1+\|B\|\tau)e^{\|A\|\tau}\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right], \frac{\lambda_{\min}(C)(\tau_0-\tau)}{2\tau_0(\|HB\|\tau+\|H\|)}\right\}\times$$
$$\times\sqrt{\Delta(H)}\,\zeta > \frac{q\tau}{\sqrt{\Delta(H)}}. \tag{7}$$

Представить решение неравенства (7) в явном виде затруднительно. Поэтому заменяем его другим, более легко исследуемым. Разлагая функцию $e^{-\|A\|\tau}$ в ряд Тейлора по переменной τ, получаем $e^{-\|A\|\tau} = 1-\|A|\tau + 1/2\|A\|^2\tau^2 - \ldots \geqslant 1-\|A\|\tau$. Максимальное значение τ, при котором выполняется неравенство

$$\min\left\{\frac{1-\|A\|\tau}{\tau} - \frac{1+\|B\|\tau}{\tau}\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}, \frac{\lambda_{\min}(C)(\tau_0-\tau)}{2\tau_0(\|HB\|\tau+\|H\|)}\right\}\times$$
$$\times\sqrt{\Delta(H)}\,\varepsilon \geqslant \frac{q\tau}{\sqrt{\Delta(H)}}, \tag{8}$$

будет не больше полученного из неравенства (7). Поэтому заменяем (7) неравенством (8). Функция $\varphi(\tau) = \left\{\left(1-\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\frac{1}{\tau} - \left(\|A\|+\|B\|\times\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right), \frac{\lambda_{\min}(C)}{2\tau_0}\frac{\tau_0-\tau}{\|HB\|\tau+\|H\|}\right\}$ представляет собой кривую, состоящую из гипербол $\varphi_1(\tau) = \left(1-\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\frac{1}{\tau} - \left(\|A\|+\|B\|\times\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)$, $\varphi_2(\tau) = \frac{\lambda_{\min}(C)}{2\tau_0}\frac{\tau_0-\tau}{\|HB\|\tau+\|H\|}$.

1. Пусть выполняется неравенство

$$\tau_0^2\left[\lambda_{\min}(C)-2\left(1-\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\|HB\|-2\left(\|A\|+\|B\|\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\|H\|\right]^2>8\tau_0\left(1-\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\|H\|\left[\lambda_{\min}(C)-2\tau_0\left(\|A\|+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\|B\|\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\|HB\|\right]. \qquad (9)$$

Тогда гиперболы пересекаются в точках

$$\tau_{1,2}=1/2\left[\lambda_{\min}(C)-2\tau_0\left(\|A\|+\|B\|\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\|HB\|\right]^{-1}\times$$
$$\times\left\{\tau_0\left[\lambda_{\min}(C)-2\left(1-\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\|HB\|-2\left(\|A\|+\|B\|\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\times\|H\|\right]\pm\left\{\tau_0^2\left[\lambda_{\min}(C)-2\left(1-\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\|HB\|-\right.\right.$$
$$\left.-2\left(\|A\|+\|B\|\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\|H\|\right]^2-8\tau_0\left(1-\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\|H\|\times$$
$$\left.\left.\times\left[\lambda_{\min}(C)-2\tau_0\left(\|A\|+\|B\|\frac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\|HB\|\right]\right\}^{1/2}\right\}.$$

Функция $\varphi(\tau)$ в зависимости от значений τ_1 и τ_2 на промежутке $0<\tau\leqslant\tau_0$ принимает вид

$$\text{а)}\quad \varphi(\tau)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_{\min}(C)}{2\tau_0}\dfrac{\tau_0-\tau}{\|HB\|\tau+\|H\|}, & \text{при } 0<\tau\leqslant\tau_1,\\[2mm] \left(1-\dfrac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\dfrac{1}{\tau}-\left(\|A\|+\|B\|\dfrac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right), & \\ \text{при } \tau_1<\tau\leqslant\left(1-\dfrac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\Big/\left(\|A\|+\|B\|\dfrac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right), & \end{cases}$$

если $\tau_1<\tau_0<\tau_2$;

$$\text{б)}\quad \varphi(\tau)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_{\min}(C)}{2\tau_0}\dfrac{\tau_0-\tau}{\|HB\|\tau+\|H\|}, & \text{при } 0<\tau\leqslant\tau_1,\\[2mm] \left(1-\dfrac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right)\dfrac{1}{\tau}-\left(\|A\|+\|B\|\dfrac{\delta}{\varepsilon\sqrt{\Delta(H)}}\right), & \text{при } \tau_1<\tau\leqslant\tau_2,\\[2mm] \dfrac{\lambda_{\min}(C)}{2\tau_0}\dfrac{\tau_0-\tau}{\|HB\|\tau+\|H\|}, & \text{при } \tau<\tau\leqslant\tau_0,\end{cases}$$

если $\tau_1<\tau_2<\tau_0$;

в) $\varphi(\tau)=\dfrac{\lambda_{\min}(C)}{2\tau_0}\dfrac{\tau_0-\tau}{\|HB\|\tau+\|H\|}$, при $0<\tau\leqslant\tau_0$, если $\tau_0<\tau_1<\tau_2$.

2. Если же неравенство (9) не выполняется, то $\varphi(\tau)$ состоит из одной гиперболы $\varphi(\tau)=\dfrac{\lambda_{\min}(C)}{2\tau_0}\dfrac{\tau_0-\tau}{\|HB\|\tau+\|H\|}$, $0<\tau\leqslant\tau_0$. Найдем максимальное значение $\tau=\tau_{\max}(\varepsilon,\delta)$, при котором выполняется $\varphi(\tau)\Delta(H)\varepsilon-q\tau\geqslant0$. Как видно из изложенного выше, функция $\varphi(\tau)$ на рассматриваемом промежутке монотонная, поэтому $\tau_{\max}(\varepsilon,\delta)$ определяется из уравнения $\varphi(\tau)\Delta(H)\varepsilon-q\tau=0$. Если $\varphi(\tau)$ состоит из нескольких кусков ги-

перболы, то

$$\tau_{\max}(\varepsilon, \delta) = \arg\min\{\varphi_1(\tau)\Delta(H)\varepsilon - q\tau = 0,\ \varphi_2(\tau)\Delta(H)\varepsilon - q\tau = 0\}.$$

После соответствующих подстановок последнее равенство совпадает с равенством (3). Если $\varphi(\tau)$ состоит из одной гиперболы, то соотношение (3) также справедливо.

Замечание 1. Величина $\tau_{\max}(\varepsilon, \delta)$, как следует из (3), существенно зависит от матриц H и C, входящих в уравнение Ляпунова. Множество положительно определенных матриц H, для которых выполняется это уравнение, образует конус в $n(n+1)/2$-мерном пространстве. Можно максимизировать величину $\tau_{\max}$ по переменным этого пространства.

Замечание 2. В случае, когда система (2) неустойчива, имеет место аналогичное утверждение о близости решений систем (1) и (2), однако уже на конечном промежутке времени.

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1984.— 421 с.
2. *Хусаинов Д. Я., Шарковский А. И.* Об устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Функциональные и дифференциальные уравнения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1974.— С. 141—147.
3. *Хусаинов Д. Я., Юнькова Е. А.* Оценка величины запаздывания в линейных системах с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 2.— С. 261—264.
4. *Юнькова Е. А., Хусаинов Д. Я.* Численное построение экстремальной функции Ляпунова // Вестник КГУ. Сер. моделирование и оптимизация слож. систем.— 1982, вып. 1. —С. 105—108.

Киев. ун-т

Получено 23.02.87