УДК 517.95

Р. Н. Куньч

Усреднение по времени для нелинейных параболических операторов

1. Вопросы усреднения по времени для параболических уравнений представляют определенный интерес и изучались рядом авторов [1—5]. В линейном случае имеющиеся результаты носят довольно общий характер. Однако в нелинейной ситуации обоснование процедуры усреднения проведено лишь при довольно жестких предположениях.

В настоящей работе вопрос об усреднении рассматривается с точки зрения общей теории G-сходимости нелинейных операторов [6, 7] и дается обоснование принципа усреднения для широкого класса нелинейных параболических операторов. Для простоты предполагается периодичность по времени, однако основной результат справедлив и в почти периодическом случае.

2. В цилиндре $Q = (0, T) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей, рассматривается семейство операторов вида

$$\mathcal{P}^\varepsilon(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha A_\alpha(\varepsilon^{-1} t, x, \delta^m u), \tag{1}$$

где $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $\delta^m u$ — набор всех частных производных функции порядка $\leqslant m$ (их число обозначим M). Предполагается, что $A_\alpha(\tau, x, \zeta)$ — каратеодориевские на $\mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^M$ 1-периодичные по τ функции, при почти всех $(\tau, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$, удовлетворяющие неравенствам

$$|A_\alpha(\tau, x, \zeta)|^{p'} \leqslant c_0 |\zeta|^p + c(x), \tag{2}$$

где $p \geqslant 2$, $c_0 > 0$, $c(x) \geqslant 0$ и $c(x) \in L^1(\Omega)$,

$$\sum_{|\alpha| = m} [A_\alpha(\tau, x, \eta, \xi) - A_\alpha(\tau, x, \eta, \xi')] (\xi_\alpha - \xi'_\alpha) \geqslant \varkappa |\xi - \xi'|^p, \tag{3}$$

где $\varkappa > 0$ и $\zeta = (\eta, \xi)$ — разбиение ζ на компоненты, отвечающие младшим и старшим производным соответственно (аналогично для ζ'),

$$\begin{aligned} |A_\alpha(\tau, x, \zeta) - A_\alpha(\tau, x, \zeta')|^{p'} &\leqslant \Theta [(h(x) + |\zeta|^p + |\zeta'|^p) \times \\ &\times \nu(|\eta - \eta'|) + (h(x) + |\zeta|^p + |\zeta'|^p)^{1 - s/p} |\xi - \xi'|^s], \end{aligned} \tag{4}$$

где $\theta > 0$, $s \in (0, p')$, $\nu(r)$ — некоторый модуль непрерывности, т. е. такая непрерывная неубывающая функция на $[0, +\infty)$, что $\nu(0) = 0$, $\nu(r) > 0$ при $r > 0$.

Положим $\mathcal{V} = L^p(0, T; W_0^{m,p}(\Omega))$, $\mathcal{W} = \{u \in \mathcal{V} \mid u'_t \in \mathcal{V}'\}$, где $\mathcal{V}' = L^{p'}(0, T; W^{-m,p'}(\Omega))$, $\mathcal{W}_0 = \{u \in \mathcal{W} \mid u(0) = 0\}$. Выражение (1) определяет непрерывный нелинейный оператор $\mathcal{P}^\varepsilon : \mathcal{W}_0 \to \mathcal{V}'$. Отметим, что $\mathcal{P}^\varepsilon$ может быть продолжен до оператора из $\bar{\mathcal{W}} = \{u \in \bar{\mathcal{V}} = L^p(0, T; W^{m,p}(\Omega)) \mid u'_t \in \mathcal{V}'\}$ в $\mathcal{V}'$.

Условия (2)—(4) с фиксированными параметрами выделяют класс параболических операторов $\Pi = \Pi(c_0, c, \varkappa, \theta, s, \nu)$. Задача усреднения для семейства (1) будет пониматься как задача построения сильного G-предела этого семейства. Напомним [8], что последовательность абстрактных обратимых параболических операторов $\mathcal{P}^\varepsilon$ G-сходится к обратимому оператору $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}^\varepsilon \xrightarrow{G} \mathcal{P}$), если $(\mathcal{P}^\varepsilon)^{-1} f \to \mathcal{P}^{-1} f$ слабо для любого f из пространства значений этих операторов.

Для дифференциальных операторов полезно потребовать дополнительно слабую сходимость обобщенных градиентов [6, 7].

Для любого $u \in \mathscr{W}_0$ положим $u_\varepsilon = (\mathscr{P}^\varepsilon)^{-1}(\mathscr{P}u)$ и определим обобщенные градиенты

$$\Gamma^\varepsilon_\alpha(u) = A^\varepsilon_\alpha(t, x, \delta^m u_\varepsilon) = A_\alpha(\varepsilon^{-1}t, x, \delta^m u_\varepsilon),$$

$$\Gamma_\alpha(u) = A_\alpha(t, x, \delta^m u).$$

Определение 1. *Операторы $\mathscr{P}^\varepsilon$ сильно G-сходятся к оператору $\mathscr{P}$, если*

I) $\mathscr{P}^\varepsilon \xrightarrow{G} \mathscr{P}$;

II) $\Gamma^\varepsilon_\alpha(u) \to \Gamma_\alpha(u)$ *слабо в* $L^{p'}(Q)$ *для любого* $u \in \mathscr{W}_0$.

Операторы $\mathscr{P}^\varepsilon \leqslant \Pi$, для которых выполнено более сильное, чем (3), условие

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} [A_\alpha(\tau, x, \zeta) - A_\alpha(\tau, x, \zeta')](\zeta_\alpha - \zeta'_\alpha) \geqslant \varkappa |\xi - \xi'|^p, \tag{3'}$$

обратимы [7]. Такое семейство сильно G-компактно и имеет место свойство сходимости произвольных решений [7].

В общем случае операторы из класса Π необратимы, однако обратимы их главные части

$$\mathscr{P}^\varepsilon_0(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha A_\alpha(\varepsilon^{-1}t, x, \delta^m u). \tag{5}$$

Рассмотрим также связанные с ними операторы

$$\mathscr{P}^\varepsilon : \mathscr{V} \times \mathscr{W}_0 \to \mathscr{V}',$$

$$\mathscr{P}^\varepsilon_0(u, v) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha A_\alpha(\varepsilon^{-1}t, x, \delta^{m-1}v, \partial^m u). \tag{6}$$

Пусть $\mathscr{P} \in \Pi$. Для произвольных $v \in \mathscr{V}$, $u \in \mathscr{W}_0$ определим $u_\varepsilon \in \mathscr{W}_0$ как единственное решение уравнения $\mathscr{P}^\varepsilon_0(u_\varepsilon, v) = \mathscr{P}_0(u, v)$, где $\mathscr{P}_0(u, v)$ — главная часть $\mathscr{P}$. Для $|\alpha| \leqslant m$ определим обобщенные градиенты

$$\Gamma^\varepsilon_\alpha(u, v) = A_\alpha(\varepsilon^{-1}t, x, \delta^{m-1}v, \partial^m u_\varepsilon),$$

$$\Gamma_\alpha(u, v) = A_\alpha(t, x, \delta^{m-1}v, \partial^m u).$$

Определение 2. *Операторы $\mathscr{P}^\varepsilon$ сильно G-сходятся к $\mathscr{P}$ ($\mathscr{P}^\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \mathscr{P}$), если*

I) *для любого* $v \in \mathscr{V}$ *операторы* $\mathscr{P}^\varepsilon_0(\cdot, v) \xrightarrow{G} \mathscr{P}(\cdot, v)$;

II) $\Gamma^\varepsilon_\alpha(u, v) \to \Gamma_\alpha(u, v)$ *слабо в* $L^{p'}(Q)$ *для любого* $v \in \mathscr{V}$, $u \in \mathscr{W}_0$, $|\alpha| \leqslant m$.

Для операторов класса Π справедливы следующие утверждения:

1. Для любой последовательности $\mathscr{P}^\varepsilon \subset \Pi$ существует сильно G-сходящаяся подпоследовательность и G-предельный оператор принадлежит классу Π возможно с другими параметрами.

2. Пусть $\mathscr{P}^\varepsilon \subset \Pi$, $\mathscr{P}^\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \mathscr{P}$, $u_\varepsilon \in \overline{\mathscr{W}}$, $u_\varepsilon \to u$ слабо в $\overline{\mathscr{W}}$, $\mathscr{P}^\varepsilon(u_\varepsilon) \to f$ сильно в $\mathscr{V}'$. Тогда $\mathscr{P}(u) = f$ и $A_\alpha(\varepsilon^{-1}t, x, \delta^m u_\varepsilon) \to A_\alpha(t, x, \delta^m u)$ слабо в $L^{p'}(Q)$.

В монотонном случае эти утверждения установлены в [7]. В общем случае они получаются комбинацией техники [6, 7].

Отметим, что из утверждения 2 вытекает эквивалентность обоих определений сильной G-сходимости на подклассе операторов из Π, удовлетворяющих неравенству (3′).

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\mathscr{P}^\varepsilon$ — операторы вида* (1), *принадлежащие классу* Π, *причем* $A_\alpha(\tau, \cdot, \cdot)$ 1-*периодичные по* τ. *Тогда для любого цилиндра*

$Q = Q(0, T) \times \Omega$, *где* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— ограниченная область с достаточно гладкой границей, имеет место сильная G-сходимость*

$$\mathcal{P}^\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \hat{\mathcal{P}} = \partial/\partial t + \hat{A},$$

$$\hat{A}(u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \hat{A}_\alpha (x, \delta^m u),$$

$$\hat{A}_\alpha (x, \zeta) = \langle A_\alpha (\tau, x, \zeta) \rangle_\tau$$

($\langle \cdot \rangle_\tau$ *— среднее по* τ *периодической функции*).

Доказательство. В силу утверждения 1 для некоторой подпоследовательности $\varepsilon' \to 0$ имеем $\mathcal{P}^\varepsilon \overset{G}{\Rightarrow} \mathcal{P} = \partial/\partial t + A$, где $\mathcal{P} \in \amalg$ (возможно) с другими параметрами. Покажем, что $A_\alpha(t, x, \zeta) = \hat{A}_\alpha(x, \zeta)$. Отсюда, в частности, следует, что переход к подпоследовательности излишен.

Определим следующие пространства: $\mathcal{V}_p = \{u(\tau) \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathscr{W}_0^{m,p}(\Omega)) \mid \times$ $\times\, u(\tau)$ — 1-периодичные по τ с нулевым средним$\}$, $\mathcal{V}'_p$—сопряженное пространство с $\mathcal{V}_p$; $\mathscr{W}_p = \{u \in \mathcal{V}_p,\ u'_t \in \mathcal{V}'_p \mid u(0) = u(k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Положим $\hat{A}_\alpha(x, \zeta) = \langle A_\alpha(\tau, x, \zeta) \rangle_\tau$ и рассмотрим тождество

$$\frac{\varepsilon \partial N^\delta}{\partial t} + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha A_\alpha (\varepsilon^{-1} t, x, \eta, \xi + \partial^m \varepsilon N^\delta) = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha \hat{A}_\alpha (x, \zeta) +$$
$$+ \left[\frac{\varepsilon \partial N^\delta}{\partial t} + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha (A_\alpha (\varepsilon^{-1} t, x, \zeta) - \hat{A}_\alpha (x, \zeta)) \right] +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha (A_\alpha (\varepsilon^{-1} t, x, \eta, \xi + \partial^m \varepsilon N^\delta) - A_\alpha (\varepsilon^{-1} t, x, \eta, \xi)), \qquad (7)$$

где функция $N^\delta = N^\delta(\varepsilon^{-1} t, x)$ будет определена ниже.

Заметим, что поскольку оператор $\partial/\partial\tau$ имеет нулевое ядро в пространстве $\mathscr{W}_p$, то уравнение $\partial z/\partial \tau = g$, $z \in \mathscr{W}_p$, $g \in \mathcal{V}'_p$, плотно разрешимо и, следовательно,

$$X = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha (A_\alpha (\tau, x, \zeta) - \hat{A}_\alpha (x, \zeta))$$

принадлежит замыканию области значений оператора $\partial/\partial\tau$. Таким образом, для любого $\delta > 0$ найдутся $N^\delta(\tau, x)$, $B^\delta_\alpha = B^\delta_\alpha(\tau, x, \zeta)$, $C^\delta_\alpha = C^\delta_\alpha(\tau, x, \zeta)$ такие, что

$$X = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha (B^\delta_\alpha + C^\delta_\alpha), \qquad (8)$$

$$\frac{\partial N^\delta(\tau, x)}{\partial \tau} = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha B^\delta_\alpha, \qquad (9)$$

$$\langle \| C^\delta_\alpha \|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} \rangle_\tau < \delta. \qquad (10)$$

Далее имеем

$$\| N^\delta (\varepsilon^{-1} t, x) \|^p_{\mathscr{V}} = \int_0^T \| N^\delta (\varepsilon^{-1} t, x) \|^p_{W_0^{m,p}(\Omega)} dt = \int_0^{T/\varepsilon} \varepsilon \| N^\delta (\tau, x) \|^p_{W_0^{m,p}(\Omega)} d\tau \leqslant$$
$$\leqslant k_0 \int_0^1 \| N^\delta (\tau, x) \|^p_{W_0^{m,p}(\Omega)} d\tau \leqslant k_0 \| N^\delta (\tau, x) \|^p_{\mathscr{V}_p} \qquad (11)$$

(k_0 — некоторая константа, зависящая только от размеров области). Из (9) следует, что для любого $\varphi \in \mathcal{V}_p$

$$\int_0^T \left(\frac{\varepsilon \partial N^\delta}{\partial t}, \Phi \right) dt = \int_Q \sum_{|\alpha|=m} B_\alpha^\delta \partial^\alpha \varphi dx dt,$$

$$\left\| \frac{\varepsilon \partial N^\delta (\varepsilon^{-1} t, x)}{\partial t} \right\|_{\mathscr{V}'} \leqslant k_1 \sum_{|\alpha|=m} \| B_\alpha^\delta \|_{L^{p'}(Q)}.$$

Таким образом, семейство $\varepsilon N^\delta (\varepsilon^{-1} t, x)$ ограничено в $\overline{\mathscr{W}}$. При каждом фиксированном $\delta > 0$

$$N^{\delta, \varepsilon} = \varepsilon N^\delta (\varepsilon^{-1} t, x) \to 0 \tag{12}$$

сильно в $\mathscr{V}$ и, следовательно, слабо в $\overline{\mathscr{W}}$. Обозначим

$$\Psi^{\delta, \varepsilon} = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha (A_\alpha (\varepsilon^{-1} t, x, \eta_1 \xi + \partial^m N^{\delta, \varepsilon}) - A_\alpha (\varepsilon^{-1} t, x, \eta, \xi)),$$

$$\varphi^{\delta, \varepsilon} = \Psi^{\delta, \varepsilon} + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha C_\alpha^\delta (\varepsilon^{-1} t, x, \zeta).$$

Поскольку

$$\| \Psi^{\delta, \varepsilon} \|_{\mathscr{V}'}^{p'} \leqslant \sum_{|\alpha|=m} \| A_\alpha (\varepsilon^{-1} t, x, \eta, \xi + \partial^m N^{\delta, \varepsilon}) - A_\alpha (\varepsilon^{-1} t, x, \eta, \xi) \|_{L^{p'}(Q)}^{p'},$$

$$\| A_\alpha (\varepsilon^{-1} t, x, \eta, \xi + \partial^m N^{\delta, \varepsilon}) - A_\alpha (\varepsilon^{-1} t, x, \eta, \xi) \|_{L^{p'}(Q)}^{p'} \leqslant k_2 \| N^{\delta, \varepsilon} \|_{\mathscr{V}}^{s}, \tag{13}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha C_\alpha^\delta (\varepsilon^{-1} t, x, \zeta) \|_{\mathscr{V}'}^{p'} \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{|\alpha|=m} \| C_\alpha^\delta \|_{L^{p'}(Q)}^{p'} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha|=m} \langle \| C_\alpha^\delta (\tau, x, \zeta) \|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} \rangle_\tau \leqslant k_3 \delta \tag{14}$$

(k_2, k_3 — некоторые константы не зависящие от ε). Из (11) — (14) следует $\lim\limits_{\delta \to 0} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \| \varphi^{\delta, \varepsilon} \|_{\mathscr{V}'} \to 0$ и можно выбрать сеть $\varepsilon_\gamma, \delta_\gamma$, обеспечивающую переход от повторного предела к обычному. Обозначая $\varphi^\gamma = \varphi^{\delta\gamma, \varepsilon\gamma}$, $N^\gamma = N^{\delta_\gamma, \varepsilon_\gamma}$, $A_\alpha^\gamma (t, x, \zeta) = A_\alpha (\varepsilon_\gamma^{-1} t, x, \zeta)$, имеем

$$\frac{\partial N^\gamma}{\partial t} + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha A_\alpha^\gamma (t, x, \eta, \xi + \partial^m N^\gamma) = \varphi^\gamma + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha \hat{A}_\alpha (x, \zeta),$$

$N^\gamma \to 0$ слабо в $\overline{\mathscr{W}}$ и $\varphi^\gamma + \sum\limits_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha \hat{A}_\alpha (x, \zeta) \to \sum\limits_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha \hat{A}_\alpha (x, \zeta)$ сильно в $\mathscr{V}'$ при $\gamma \to \infty$. По теореме о сходимости произвольных решений (утверждение 2)

$$\frac{\partial}{\partial t} (0) + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha A_\alpha (t, x, \zeta) = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \partial^\alpha \hat{A}_\alpha (x, \zeta),$$

$A_\alpha^\gamma (t, x, \eta, \xi + \partial^m N^\gamma) \to A_\alpha (t, x, \zeta)$ слабо в $L^{p'} (Q)$ при $|\alpha| \leqslant m$. Но, с другой стороны, учитывая (13) и то, что соотношение $A_\alpha (\tau, x, \zeta) |_{\tau = \varepsilon^{-1} t} \to \hat{A}_\alpha (x, \zeta)$ слабо в $L^{p'} (Q)$, имеем $A_\alpha (t, x, \zeta) = \hat{A}_\alpha (x, \zeta)$ при $|\alpha| \leqslant m$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Аналогичный результат справедлив и для абстрактных монотонных параболических операторов вида

$$\mathscr{P}^\varepsilon = \partial / \partial t + A (\varepsilon^{-1} t),$$

где $A (\tau)$: $V \to V'$ — монотонные операторы (V — рефлексивное банахово пространство, плотно вложенное в гильбертово пространство H, V' — сопряженное пространство). Его точная формулировка здесь не приводится. Отметим, что для обыкновенных дифференциальных уравнений с монотонными операторами в гильбертовом пространстве $V = H$ результат об усреднении, не использующий гладкости оператора A, получен в [9].

1. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение параболических операторов // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1982.— **45**.— С. 182—236.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
3. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978.— 205 с.
4. *Симоненко Н. Б.* Обоснование метода усреднения для абстрактных параболических операторов // Мат. сб.— 1970.— **81**, № 1.— С. 53—61.
5. *Хасьминский Р. З.* О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теория вероятностей.— 1963.— **8**, вып. 1.— С. 3—25.
6. *Панков А. А.* Об усреднении и *G*-сходимости нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида // Докл. АН СССР.— 1984.— **287**, № 1.— С. 37—41.
7. *Куньч Р. Н., Панков А. А.* *G*-сходимость монотонных параболических операторов // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1986.— № 8.— С. 8—10.
8. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* О *G*-сходимости параболических операторов // Успехи мат. наук.— 1981.— **36**, № 1.— С. 11—58.
9. *Перов А. И., Трубников Ю. В.* Монотонные дифференциальные уравнения. II // Дифференц. уравнения.— 1976.— **12**, № 7.— С. 1223—1237.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 12.12.86