УДК 517.946:519.46:530.145

Ю. Н. Сегеда

О частных решениях волнового уравнения с кубической нелинейностью в классе эллиптических функций

В настоящей работе построены точные частные решения волнового уравнения

$$\Box\, u = \lambda F(u) \tag{1}$$

с кубической нелинейностью $F(u) = u^3$, где $\Box$ — оператор Даламбера в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$, λ — произвольный параметр. Это уравнение широко используется в современной математической физике [1].

Построению многопараметрических пуанкаре-инвариантных семейств решений нелинейного уравнения с нелинейностью $F(u) = u^k$, где k — произвольный параметр, посвящены работы [2, 3]. В [4] построены частные решения уравнения (1), инвариантные относительно некоторых подгрупп Пуанкаре $P(1, 3)$.

При $k = 3$ уравнение (1) конформно-инвариантно [5] и имеет решения в классе эллиптических функций, которые ниже будут построены. Для построения точных решений воспользуемся алгоритмом, изложенным в [6]. Для этого необходимо знать трехмерные подгруппы конформной группы $C(1, 3)$. В результате редукции уравнения (1) по таким подгруппам получаем обыкновенные дифференциальные уравнения, решения которых называются решениями ранга 1 уравнения (1).

Совокупность масштабных преобразований вместе с группой $P(1, 3)$ образует 11-параметрическую группу Вейля или группу подобия $\tilde{P}(1, 3)$. Здесь рассматриваются только подгруппы группы подобия.

Подгрупповая структура группы подобия описана в [7] и задается в терминах операторов $B_1 = 2L_3$, $B_2 = -2K_3$, $B_3 = -L_2 - K_1$, $B_4 = L_1 - K_2$, $B_5 = L_2 - K_1$, $B_6 = L_1 + K_2$, $X_1 = 1/2\,(P_0 - P_3)$, $X_2 = P_2$, $X_3 = -P_1$, $X_4 = 1/2\,(P_0 + P_3)$, где P_0, P_i, L_i, K_i — генераторы группы Пуанкаре, и генератора масштабных преобразований $D = -2\,(x_0\partial_0 + x_i\partial_i - u\partial_u)$.

В результате редукции уравнения (1) по трехмерным подгруппам получаем представление решения уравнения в виде $u = \omega f(\xi)$. Здесь $f(\xi)$ — функция, подлежащая определению; ω и ξ — известные функции независимых переменных, построенные из инвариантов соответствующей подгруппы.

Приведем некоторые подгруппы H, соответствующие редуцированные уравнения для f и функции ω и ξ; в скобках указаны базисные элементы соответствующих подалгебр Ли.

1. $H\langle D+B_1+B_2;\ B_3;\ B_4\rangle$, $u=(x_0^2-\bar{x}^2)^{-1/2}f(\xi)$, $\xi=x_0+x_3$, где функция f удовлетворяет уравнению $2\xi f'+f=-\lambda f^3$, откуда имеем $f=(\lambda-C\xi)^{-1/2}$. Здесь и ниже C — произвольная постоянная, а посредством $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ обозначены решения уравнений $\Phi''=\varkappa\Phi^3$, $\Psi''=\varkappa\Psi^3-\Psi$, $\varkappa$ — параметр, связанный с λ.

2. $H\langle D+aB_2;\ B_3;\ X_1\rangle$, $a\neq 0, 1$, $f=\Phi$, $\omega=(x_0+x_3)^{1/(a-1)}$, $\varkappa=-\lambda$, $\xi=x_2(x_0+x_3)^{1/(a-1)}$.

3. $H\langle D+B_4;\ B_3;\ X_1\rangle$, $\omega=(x_0+x_3)^{-1}$, $f=\Phi$, $\varkappa=-\lambda$, $\xi=x_2(x_0+x_3)^{-1}+\dfrac{1}{2}\ln(x_0+x_3)$.

4. $H\langle D-B_2+X_1;\ B_3;\ X_2\rangle$, $\omega=(x_0+x_3)^{-1/2}$, $f=\Phi$, $\varkappa=\lambda$, $\xi=\dfrac{x_0^2-x_1^2-x_3^2}{x_0+x_3}+\dfrac{1}{4}\ln(x_0+x_3)$.

5. $H\langle D+aB_2;\ X_1;\ X_4\rangle$, $a\neq 0, 1$, $\omega=(x_0+x_3)^{1/(a-1)}$, $f=\Phi$, $\varkappa=-\lambda$, $\xi=x_1(x_0+x_3)^{1/(1-a)}$.

6. $H\langle D+B_2;\ B_3;\ B_4+X_2\rangle$, $\omega=[(x_0+x_3)(x_0^2-\bar{x}^2)+(x_0^2-x_1^2-x_3^2)]^{-1/2}$, $\xi=x_0+x_3$, функция $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению $-2\xi(\xi+1)f'=\lambda f^3$, решение которого имеет вид $f=\lambda^{-1/2}\ln^{-1/2}\dfrac{C\xi}{\xi+1}$.

7. $H\langle D+B_2+\alpha X_4;\ B_1+X_4;\ X_1\rangle$, $-\infty<\alpha<\infty$, $\omega=(x_1^2+x_2^2)^{-1/2}$, $f=\Psi$, $\varkappa=-\lambda$, $\xi=x_0+x_3-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x_1}{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}$.

8. $H\langle D+B_2;\ B_3+X_2;\ X_1\rangle$, $\omega=[x_1-x_2(x_0+x_3)]^{-1}f(\xi)$, $\xi=x_0+x_3$, функция $f(\xi)$ удовлетворяет функциональному уравнению $-2(1+\xi^2)f=\lambda f^3$, откуда $f=[-2/\lambda(1+(x_0+x_3)^2)]^{1/2}$.

Группа подобия содержит гораздо больше трехмерных подгрупп, однако остальные подгруппы приводят к уравнениям на функции f, явные решения которых неизвестны.

Найдем теперь функции Φ и Ψ. Уравнение $\Phi''=\varkappa\Phi^3$ принадлежит классу уравнений Эмдена — Фаулера [8] и имеет простейшие решения вида $\Phi=\sqrt{\dfrac{2}{\varkappa}}\dfrac{1}{\xi-C}$. Более интересные решения получаются обращением эллиптических интегралов и могут быть представлены в различных формах [9]:

а) $\Phi=\dfrac{C}{\sqrt{\varkappa}}\dfrac{1\pm\mathrm{cn}(C\sqrt{2}\xi, k)}{\mathrm{sn}(C\sqrt{2}\xi, k)}$, $k^2=1/2$;

б) $\Phi=\dfrac{C}{\sqrt{\varkappa}}\dfrac{\mathscr{P}'(z;g_2,g_3)}{2\mathscr{P}^2-1/2}$, $g_2=1$, $g_3=0$;

в) $\Phi=\dfrac{C}{\sqrt{\varkappa}}\dfrac{1}{\sqrt{\mathscr{P}(z;g_2,g_3)}}$, $g_2=-4$, $g_3=0$, $z=\dfrac{C\xi}{\sqrt{2}}$.

Здесь $\mathrm{cn}\,\xi$, $\mathrm{sn}\,\xi$ — эллиптические функции Якоби, $\mathscr{P}(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса с инвариантами g_2, g_3. В частности, при $C=0$ из соотношения п. б) имеем $\Phi=\sqrt{\dfrac{2}{\varkappa}}\dfrac{1}{\xi}$.

Аналогично уравнение $\Psi''=-\lambda\Psi^3-\Psi$ имеет решение $\Psi(\xi)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathscr{P}'(z-\zeta/2)}{\mathscr{P}(z-\zeta/2)+\mathscr{P}(\zeta)}$, $\mathscr{P}(\zeta)=-\dfrac{1}{3\lambda}$, с инвариантами $g_2=C+\dfrac{1}{3\lambda^2}$, $g_3=\dfrac{C}{3\lambda}-1$; при $C=0$ имеем $\Psi=\sqrt{-\dfrac{2}{\lambda}}\dfrac{1}{\sin\xi}$.

Отметим в заключение, что хотя знание подгрупповой структуры позволяет строить многие частные решения уравнений в частных производных, недостатком этих решений является то, что решения уравнения зависят от переменных x несимметрично, в то время как в само уравнение эти переменные входят инвариантным образом.

В работе [3] построены классы точных решений уравнения (1) без использования подгрупповой структуры. В работе [10] аналогичным способом построены точные решения уравнения (1) с нелинейностью $F(u) = \operatorname{sh} u$.

1. *Actor A.* Classical solutions of SU(2) Yang—Mills Theories// Rev. Mod. Phys.—1979.—**51**, N 3.—P. 461—525.
2. *Fushchich W. I., Serow N. I.* The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations// J. Phys. A.—1983.—**16**, N 15.—p. 3645—3656.
3. *Фущич В. И.* Симметрия в задачах математической физики. // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике.—Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.—С. 6—28.
4. *Сегеда Ю. Н.* О некоторых инвариантных решениях нелинейного волнового уравнения. // Укр. физ. журн.— 1982.— 27, № 5.—С. 787—788.
5. *Ибрагимов Н. X.* Группы Ли в математической физике.— М. : Наука, 1983.— 280 с.
6. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1978.— 240 с.
7. *Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H.* Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. The similitude group// J. Math. Phys.— 1975.—**16**, N 8.—C. 1615—1624.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1971.— 575 с.
9. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций.— М. : Наука, 1970.— 304 с.
10. *Fushchich W. I., Seheda Yu. N.* Some exact solutions of the many-dimensional sh-Gordon eguation// Lett. nuovo cim.—1984.—**41**, N 14.—C. 462—464.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 01.08.84