УДК 517.5

С. Б. Вакарчук

Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых

Рассмотрим задачу о приближенном вычислении криволинейного интеграла первого рода в форме линейной комбинации нескольких значений подынтегральной функции

$$\int\limits_{\gamma} f(P)\,ds \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(P_k), \tag{1}$$

где $P_k \in \gamma$, $k=\overline{1,n}$. Сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(P_k)$, как обычно [1 — 3], будем называть квадратурной суммой. Для достижения высокой точности вычислений при заданном n нужно возможно лучшим образом воспользоваться выбором A_k и P_k.

Обозначим через $\mathfrak{M}_\Delta(L)$ класс плоских спрямляемых кривых γ, у которых длина равна L и кривизна кусочно-непрерывна. Будем полагать, что все кривые из $\mathfrak{M}_\Delta(L)$ расположены в области $\Delta=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant L^2\}$.

Известно [4], что параметрические уравнения кривой $\gamma\in\mathfrak{M}_\Delta(L)$, отнесенной к длине дуги s как параметру, в прямоугольной системе координат OXY имеют вид

$$x=\int\limits_0^s \cos\beta(s)\,ds + x_0, \tag{2}$$

$$y=\int\limits_0^s \sin\beta(s)\,ds + y_0, \quad 0\leqslant s\leqslant L, \tag{3}$$

где (x_0, y_0) — координаты начальной точки кривой γ; $\beta(s)=\int\limits_0^s k(\gamma; s)\,ds + \beta_0$, β_0 — угол, образованный касательной к γ в точке (x_0, y_0) с положительным направлением оси OX, $k(\gamma; s)$ — кривизна кривой γ в точке с координатами $(x(s), y(s))$.

Обозначим через s_k, $s_k \in [0, L]$, $k = \overline{1, n}$, значения длины дуги s кривой γ, которые соответствуют точкам P_k на γ, и перепишем формулу (1) следующим образом:

$$\int_0^L f(x(s), y(s))\, ds \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x(s_k), y(s_k)),$$

где $x = x(s)$ и $y = y(s)$ — параметрические уравнения кривой γ, представленные в виде (2), (3).

Пусть задан класс $W_\Delta^1(M)$, $M > 0$, функций $f(P) = f(x, y)$, у которых почти всюду в области Δ существуют частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ и

$$\sup \operatorname{vrai} \{|\operatorname{grad} f(x, y)| \mid (x, y) \in \Delta\} \leqslant M. \tag{4}$$

Для каждой функции $f \in W_\Delta^1(M)$ и каждой кривой $\gamma \in \mathfrak{M}_\Delta(L)$ остаток квадратурной формулы $R_n(f; \gamma)$ имеет вполне определенное численное значение

$$R_n(f; \gamma) = \int_0^L f(x(s), y(s))\, ds - \sum_{k=1}^n A_k f(x(s_k), y(s_k)).$$

За величину, характеризующую точность квадратурной формулы для всех функций из класса $W_\Delta^1(M)$ на кривой $\gamma \in \mathfrak{M}_\Delta(L)$, можно принять число

$$R_n(W_\Delta^1(M); \gamma) = \sup \{|R_n(f; \gamma)| \mid f \in W_\Delta^1(M)\}.$$

Полагаем далее

$$R_n(W_\Delta^1(M); \mathfrak{M}_\Delta(L)) = \sup \{R_n(W_\Delta^1(M); \gamma) \mid \gamma \in \mathfrak{M}_\Delta(L)\}.$$

Для получения формулы, которую можно было бы считать оптимальной для всех функций $f \in W_\Delta^1(M)$ и кривых $\gamma \in \mathfrak{M}_\Delta(L)$, полагаем, что соотношение (1) является точным для констант, т. е.

$$\int_\gamma ds = \sum_{k=1}^n A_k = L.$$

Нижнюю грань

$$\mathcal{E}_n(W_\Delta^1(M); \mathfrak{M}_\Delta(L)) = \inf \Big\{R_n(W_\Delta^1(M); \mathfrak{M}_\Delta(L)) \mid \{s_k\}_{k=1}^n,\ 0 \leqslant s_k \leqslant L;$$

$$\{A_k\}_{k=1}^n,\ \sum_{k=1}^n A_k = L\Big\}$$

по аналогии с [2] будем называть оптимальной оценкой погрешности квадратур на рассматриваемых классах. Если существует квадратурная формула, для которой $R_n(W_\Delta^1(M); \mathfrak{M}_\Delta(L)) = \mathcal{E}_n(W_\Delta^1(M); \mathfrak{M}_\Delta(L))$, то будем называть ее наилучшей или оптимальной на классах $W_\Delta^1(M)$ и $\mathfrak{M}_\Delta(L)$.

Записав для произвольной функции $f \in W_\Delta^1(M)$ как функции одного переменного $f(x(s), y(s))$, формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши, остаток $R_n(f; \gamma)$ квадратурной формулы представим в виде

$$R_n(f; \gamma) = \int_0^L \left(\frac{\partial f(x(s), y(s))}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(x(s), y(s))}{dy} \frac{dy}{ds} \right) \Phi(s)\, ds, \tag{5}$$

где

$$\Phi(s) = L - s - \sum_{k=1}^n A_k (s_k - s)_+^0, \quad u_+^0 = \begin{cases} 1, & u > 0, \\ 0, & u \leqslant 0. \end{cases}$$

Используя (4) и тождество $(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2 \equiv 1$, получаем оценку сверху $\sup\operatorname{vrai}\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right| \middle| 0 \leqslant s \leqslant L\right\} \leqslant M$. Тогда, согласно неравенству Гельдера, на классах $W_\Delta^1(M)$ и $\mathfrak{M}_\Delta(L)$ справедливо неравенство

$$|R_n(f;\gamma)| \leqslant M\int_0^L |\Phi(s)|\,ds. \tag{6}$$

Рассмотрим кривую $\gamma^* \in \mathfrak{M}_\Delta(L)$, которая задана параметрическими уравнениями $x = s/\sqrt{2}$, $y = s/\sqrt{2}$, $0 \leqslant s \leqslant L$, и выберем функцию $f^* \in W_\Delta^1(M)$ в виде

$$f^*(x, y) = \int_0^x \varphi(t)\,dt + \int_0^y \varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t) = 2^{-1/2} M \operatorname{sgn}\left[L - \sqrt{2}t - \sum_{k=1}^n A_k (s_k - \sqrt{2}t)_+^0\right]$.

Подставляя f^* и γ^* в (5), нетрудно убедиться в том, что в (6) имеет место знак равенства. Следовательно, правая часть (6) будет точной верхней границей на множествах функций $W_\Delta^1(M)$ и кривых $\mathfrak{M}_\Delta(L)$:

$$R_n(W_\Delta^1(M), \mathfrak{M}_\Delta(L)) = M\int_0^L |\Phi(s)|\,ds. \tag{7}$$

Очевидно, что экстремальная пара f^* и γ^* не единственная.

Обозначим $\sigma_k = s_k/L$, $\alpha_k = A_k/L$. Тогда $\Phi(s) = L\left[1 - s/L - \sum_{k=1}^n \alpha_k(\sigma_k - s/L)_+^0\right] = L\tilde{\Phi}(s/L)$.

Производя в правой части равенства (7) замену переменной $\tau = s/L$ и учитывая, что точную нижнюю грань в выражении

$$r = \inf\left\{\int_0^1 |\tilde{\Phi}(\tau)|\,d\tau \,\middle|\, \{\sigma_k\}_{k=1}^n,\ 0 \leqslant \sigma_k \leqslant 1,\ \{\alpha_k\}_{k=1}^n,\ \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1\right\}$$

реализуют числа $\alpha_k = 1/n$, $\sigma_k = (2k-1)/(2n)$, $k = \overline{1, n}$, и $r = 1/(4n)$ (см., например, [3, с. 143]), получаем следующее утверждение.

Теорема. *Среди формул вида* (1) *для приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода на классе функций* $W_\Delta^1(M)$ *и классе кривых* $\mathfrak{M}_\Delta(L)$ *наилучшей является формула*

$$\int_\gamma f(P)\,ds \approx L/n \sum_{k=1}^n f(P_k^*),$$

где $P_k^* = (x((2k-1)L/(2n)),\ y((2k-1)L/(2n)))$; $x = x(s)$, $y = y(s)$ — *параметрические уравнения кривой* γ, L — *ее длина. При этом* $\mathcal{E}_n(W_\Delta^1(M); \mathfrak{M}_\Delta(L)) = ML^2n^{-1}/4$.

1. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов.— М.: Наука, 1967.— 500 с.
2. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.— М.: Наука, 1979.— 254 с.
3. *Бахвалов Н. С.* Численные методы.— М.: Наука, 1975.— 632 с.
4. *Фиников С. П.* Курс дифференциальной геометрии.— М.: Гостехиздат, 1952.— 343 с.
5. *Вакарчук С. Б.* Об одном приближенном представлении криволинейного интеграла первого рода // Теория функций и топология.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 17—20.

Ин-т геотехн. механики АН УССР, Днепропетровск

Получено 15.03.85,
после доработки — 12.06.85