УДК 517.5

А. И. Степанец

Модули полураспада монотонных функций и скорость сходимости рядов Фурье

В [1] (см. также [2, 3]) введены классы функций следующим образом. Пусть $f \in L(0, 2\pi)$ и

$$S[f] = a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) \tag{1}$$

— ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi(k)$ — произвольная функция натурального аргумента и β — фиксированное число ($\beta \in \mathbb{R}$). Предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)\cos(kx + \beta\pi/2) + b_k(f)\sin(kx + \beta\pi/2)) \tag{2}$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(0, 2\pi)$. Эту функцию обозначим через $f_\beta^\psi(x)$ и назовем (ψ, β)-производной функции $f(x)$, а множество функций $f(\cdot)$, удовлетворяющих таким условиям, обозначим через L_β^ψ. Если $f \in L_\beta^\psi$ и при этом $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $L(0, 2\pi)$, то говорим, что $f(\cdot)$ принадлежит классу $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$. Подмножество непрерывных функций из $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ обозначим через $C_\beta^\psi\mathfrak{N}$.

В указанных работах изучалась скорость сходимости частных сумм Фурье $S_n(f; x)$ на классах $C_{\beta,\infty}^\psi$ и $C_\beta^\psi H_\omega$, т. е. когда соответственно $\mathfrak{N}$ — множество M 2π-периодических существенно ограниченных функций:

$$\varphi \in M: \quad \operatorname{ess\,sup} |\varphi(x)| \leqslant 1 \tag{3}$$

и $\mathfrak{N} = H_\omega \ni \varphi : |\varphi(x) - \varphi(x')| \leqslant \omega(|x - x'|)$, где $\omega(\cdot)$ — заданный модуль непрерывности. Там получены асимптотические равенства для величин

$$\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}) = \sup\{\ \rho_n(f;x)|: f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}\} \tag{4}$$

и

$$\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}) = \sup\{|\rho_n(f;x)|: f\in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}\}, \tag{4'}$$

где $\rho_n(f;x) = f(x) - s_{n-1}(f;x)$, при условиях, что функция $\psi(k)$ принадлежит к множеству F, т. е. выпукла вниз:

$$\Delta_2\psi(k) = \psi(k-1) - 2\psi(k) + \psi(k+1) \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\lim_{k\to\infty}\psi(k) = 0 \tag{6}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{k} < \infty. \tag{7}$$

Основной результат, полученный в [2], состоит в том, что если $\psi\in F$ и F_{ψ} — множество выпуклых вниз при всех $t\geqslant 1$ функций непрерывного аргумента, имеющих в точках $t=k$ значения $\psi(k)$, то для любой последовательности чисел $a=a(n)$ такой, что $a(n)\geqslant a_0 > 0$, справедливы асимптотические равенства

$$\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}) = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln^{+}\frac{n\pi}{a(n)} + b^{\psi}_n(a), \quad n\to\infty,$$

$$b^{\psi}_n(a) = O(1)(\psi(n) + P_n(a,\psi) + R_n(a,\psi)), \tag{8}$$

$$\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}) = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\,s_n(\omega\ \ln^{+}\frac{n\pi}{a(n)} + d^{\psi}_n(a;\omega), \quad n\to\infty,$$

$$d^{\varphi}_n(a;\omega) = O(1)(\psi(n) + P_n(a,\psi) + R_n(a,\psi))\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{9}$$

где $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n и по β; $P_n(a;\psi)$ и $R_n(a;\psi)$ определяются формулами

$$P_n(a;\psi) = \int_{1/a(n)}^{\infty}\frac{\psi(nt+n)}{t}\ t, \quad R_n(a;\psi) = \int_{a(n)}^{\infty}\frac{1}{t}\left(\psi(n)-\psi\left(n+\frac{n}{t}\right)\right)dt, \tag{10}$$

$$s_n(\omega) = \sup_{\varphi\in H_{\omega}}\left|\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\varphi(t/n)\sin t\,dt\right| = \Theta_{\omega}\int_{0}^{\pi/2}\omega(2t/n)\sin t\,dt,$$

$$2/3 \leqslant \Theta_{\omega} \leqslant 1, \tag{11}$$

причем $\Theta_{\omega} = 1$, если $\omega = \omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

Там же показано, что максимально возможный порядок стремления к нулю остаточных членов в формулах (8) и (9) обеспечивается, когда в качестве $a(n)$ выбрана последовательность

$$\mu(n) = \mu(\psi;n) = n\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(n)\right) - n\right) \tag{12}$$

и указаны достаточные условия, при которых $\forall n\in N$

$$\mu(\psi;n) \geqslant a_0 > 0, \tag{13}$$

$$P_n(\mu;\psi) \leqslant K\psi(n), \quad R_n(\mu;\psi) \leqslant K\psi(n). \tag{14}$$

Здесь и далее через K (K_i, $i = 1, 2, \ldots$) обозначены абсолютные постоянные, которые, вообще говоря, различны.

На основании этих результатов получены асимптотические равенства для $\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty})$ и $\mathcal{E}_n(C^\psi_\beta H_\omega)$, дающие полное решение известной задачи Колмогорова — Никольского для довольно широкого набора функций $\psi \in F$.

В настоящей работе найдены другие, менее ограничительные условия на функции $\psi \in F$, обеспечивающие выполнение неравенств (13) и (14).

Аппроксимативные свойства классов $L^\psi_\beta\mathfrak{N}$ существенно зависят от функции $\psi(k)$, $k \in N$. Понятно, что значения $\psi(k)$ всегда можно считать значениями некоторой функции $\psi(v)$ непрерывного аргумента, определенной, например, при всех $v \geqslant 1$, на участках $(k, k+1)$ и имеющей любую наперед заданную гладкость и подчиненную еще некоторым дополнительным условиям. В частности, если $\psi(k)$ выпуклая, то такой же можно считать и функцию $\psi(v)$ при всех $v \geqslant 1$. В этом случае, к примеру, в качестве $\psi(v)$ можно взять функцию $\psi_0(v)$, линейную на участках $[k, k+1]$.

В данной работе $\psi(v)$ всегда выпуклая (вниз) при всех $v \geqslant 1$ и $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$. Множество $\mathfrak{M}$ таких функций далеко не однородно по скорости их убывания. Поэтому при исследовании аппроксимативных свойств классов $L^\psi_\beta\mathfrak{N}$ удобно выделить из $\mathfrak{M}$ подмножества $\mathfrak{M}_c$, $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_\infty$ согласно следующей характеристике.

Пусть $\psi \in \mathfrak{M}$ и $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ — функция, связанная с $\psi(\cdot)$ равенством

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geqslant 1. \tag{15}$$

Отсюда в силу строгой монотонности функции $\psi(t)$ $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ при всех $t \geqslant 1$ определяется однозначно:

$$\eta(t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right). \tag{15'}$$

Положим

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = t/(\eta(t) - t). \tag{16}$$

Величина $\eta(t) - t$ вследствие (15′) есть длина промежутка, на котором значения функции $\psi(\cdot)$ уменьшаются ровно в два раза. В связи с этим функцию $\mu(\psi; t)$ называем модулем полураспада функции $\psi(\cdot)$.

Примеры функций t^{-r}, $r > 0$, $\ln^{-1}(t+a)$, $a \geqslant e$ и e^{-t} показывают, что $\mu(\psi; t)$ может быть ограниченной сверху и снизу некоторыми положительными числами, стремиться к нулю при $t \to \infty$ и быть неограниченной сверху. Именно по этому принципу и определим множества $\mathfrak{M}_c$, $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_\infty$.

К множеству $\mathfrak{M}_c$ отнесем все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых найдутся такие положительные числа K_1 и K_2 (вообще говоря, зависящие от $\psi(\cdot)$), что

$$0 < K_1 \leqslant \mu(\psi; t) \leqslant K_2 < \infty; \tag{17}$$

к множеству $\mathfrak{M}_0$ — функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых величина $\mu(\psi; t)$ ограничена сверху и не ограничена снизу никаким положительным числом, к множеству $\mathfrak{M}_\infty$ — все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых величина $\mu(\psi; t)$ монотонно возрастает и неограничена сверху:

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}. \tag{18}$$

Найдем оценки, связывающие величины $\psi(t)$ и $\psi'(t)$. Если $\psi \in \mathfrak{M}$, то очевидны неравенства

$$\frac{1}{2}\psi(t) = \int\limits_t^{\eta(t)} |\psi'(\tau)|\, d\tau \leqslant |\psi'(t)|(\eta(t) - t), \quad (\psi'(t) \overset{\text{df}}{=} \psi'(t+0)),$$

$$\int\limits_0^{\eta(t)} |\psi'(\tau)|\, d\tau \geqslant |\psi'(\eta(t))|(\eta(t) - t).$$

Следовательно, $\forall\psi\in\mathfrak{M}$

$$|\psi'(\eta(t))|(\eta(t)-t)\leqslant\frac{1}{2}\psi(t)\leqslant|\psi'(t)|(\eta(t)-t). \tag{19}$$

Докажем следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если* $\psi\in\mathfrak{M}_c$, *то найдутся положительные постоянные* K_1' *и* K_2' *такие, что* $\forall t\geqslant 1$.

$$K_1't|\psi'(t)|\leqslant\psi(t)\leqslant K_2't|\psi'(t)|. \tag{20}$$

В самом деле, согласно (17), найдутся постоянные K_3 и K_4 такие, что

$$K_3t\leqslant\eta(t)-t<K_4t,\quad K_3>0, \tag{21}$$

и правая часть (20) в таком случае сразу следует из (19). Оттуда же получаем

$$\frac{1}{2}\psi(t)=\psi(\eta(t))\geqslant|\psi'(\eta(t))|(\eta(t)-t)=$$

$$=|\psi'(\eta(t))|\eta(t)\left(1-\frac{t}{\eta(t)}\right)>\frac{K_3}{K_3+1}\eta(t)|\psi'(\eta(t))|,$$

т. е. $\forall t\geqslant 1$ $\psi(\eta(t))>K\eta(t)|\psi'(\eta(t))|$, $K>0$. Полагая $t=\eta(z)$, находим $\psi(t)>Kt|\psi'(t)|$, $t\geqslant\eta(1)$. Это доказывает левую часть соотношения (20) при всех $t\geqslant\eta(1)$. На промежутке $[1,\eta(1))$ нужная оценка получается за счет выбора константы K_1'.

При доказательстве левой части (20) использована лишь ограниченность сверху величины $\mu(\psi,t)$, которая ограничена и для $\psi\in\mathfrak{M}_0$, поэтому справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Если* $\psi\in\mathfrak{M}_0$, *то* $\forall t\geqslant 1$

$$t|\psi'(t)|<K\psi(t). \tag{20'}$$

Лемма 3. *Если* $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, *то* $\forall t\geqslant 1$

$$\psi(t)\leqslant t|\psi'(t)|\alpha(t), \tag{22}$$

где $\alpha(t)$ — *величина, монотонно стремящаяся к нулю при* $t\to\infty$.

Действительно, согласно (1.8) в этом случае

$$\eta(t)-t=t\alpha(t) \tag{23}$$

и для получения (22) остается воспользоваться соотношением (19).

Следствие 1. *Если* $\psi\in\mathfrak{M}_c\cup\mathfrak{M}_\infty$, *то*

$$\int_1^\infty\frac{\psi(t)}{t}\,dt<\infty, \tag{24}$$

а значит и

$$\sum_{k=1}^\infty\psi(k)/k<\infty. \tag{24'}$$

Чтобы доказать (24), достаточно воспользоваться неравенствами (20) и (22):

$$\int_1^\infty\frac{\psi(t)}{t}\,dt<K\int_1^\infty|\psi'(t)|\,dt=K\psi(1).$$

Лемма 4. *Если* $\psi\in\mathfrak{M}_c\cup\mathfrak{M}_\infty$, *то* $\forall a\geqslant 1$

$$I_1(a)=\int_{\eta(a)}^\infty\frac{\psi(t)}{t-a}\,dt<K\psi(a), \tag{25}$$

$$I_2(a) = \int\limits_a^{\eta(a)} \frac{\psi(a)-\psi(t)}{t-a}\,dt < K\psi(a). \tag{26}$$

Доказательство. Если $\psi \in \mathfrak{M}_c$, то, согласно (20) и (21), имеем

$$\int\limits_{\eta(a)}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t-a}\,dt \leqslant K_2' \int\limits_{\eta(a)}^{\infty} |\psi'(t)|\,\frac{t-a+a}{t-a}\,dt = K_2' \int\limits_{\eta(a)}^{\infty} |\psi'(t)|\,dt +$$

$$+ K_2' a \int\limits_{\eta(a)}^{\infty} |\psi'(t)|\,\frac{dt}{t-a} \leqslant \frac{K_2'}{2}\,\psi(a) + \frac{K_2'}{2}\,\psi(a)\,\frac{a}{\eta(a)-a} < K\psi(a).$$

Если $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то поступая таким же образом, но используя равенства (22) и (23), находим

$$\int\limits_{\eta(a)}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t-a}\,dt \leqslant \alpha(a) \int\limits_{\eta(a)}^{\infty} |\psi'(t)|\,\frac{t-a+a}{t-a}\,dt =$$

$$= \frac{\alpha(a)}{2}\,\psi(a) + \frac{a\alpha(a)}{\eta(a)-a}\,\frac{\psi(a)}{2} < K\psi(a).$$

Чтобы доказать (26), выберем точку z_a, положив

$$z_a = \frac{\psi(a)}{2\,|\psi'(a)|} + a. \tag{27}$$

Тогда в силу выпуклости функции $\psi(\cdot)$

$$I_2(a) \leqslant \int\limits_a^{\eta(a)} \frac{\min\left\{|\psi'(a)|\,(t-a);\ \frac{1}{2}\,\psi(a)\right\}}{t-a}\,dt = |\psi'(a)|\,(z_a-a) +$$

$$+ \frac{\psi(a)}{2} \int\limits_{z_a}^{\eta(a)} \frac{dt}{t-a} = \psi(a) + \frac{\psi(a)}{2}\ln\frac{\eta(a)-a}{z_a-a}. \tag{28}$$

Если теперь $\psi \in \mathfrak{M}_c$, то в силу (20) и (21)

$$\frac{\psi(a)-a}{z_a-a} \leqslant \frac{2K_4 a\,|\psi'(a)|}{\psi(a)} < 2\,\frac{K_4}{K_1'}. \tag{29}$$

Если же $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то вследствие монотонности функции $\alpha(t)$

$$1 \leqslant \psi'(a)/\psi'(\eta(a)) = \eta'(a) = 1 + \alpha(a) + a\alpha'(a) < 1 + \alpha(a) < K,$$

т. е.

$$|\psi'(a)| < K\psi'(\eta(a)). \tag{30}$$

Поэтому, согласно (19),

$$\frac{\eta(a)-a}{z_a-a} = \frac{2\,(\eta(a)-a)\,|\psi'(a)|}{\psi(a)} < \frac{K\,(\eta(a)-a)\,\psi(a)}{\psi(a)\,(\eta(a)-a)} = K. \tag{30'}$$

Объединяя соотношения (28) — (30′), получаем (26).

Лемма 5. *Если* $\psi \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}_c$, *то* $\forall a \geqslant 1$ *и* $\forall b > 1$

$$\int\limits_a^{ba} \frac{\psi(a)-\psi(t)}{t-a}\,dt < K\psi(a). \tag{31}$$

Действительно, если z_a определить равенством (27), то как и при доказательстве неравенства (28) получим

$$\int_a^{ba} \frac{\psi(a)-\psi(t)}{t-a}\,dt \leqslant \psi(a)\left(1+\ln\frac{2(b-a)\,a\psi'(a)}{\psi(a)}\right).$$

Но в случае, когда $\psi\in\mathfrak{M}_0\cup\mathfrak{M}_c$, согласно леммам 1 и 2, $a\psi'(a)<K\psi(a)$. Отсюда сразу следует (31).

Если $\psi\in\mathfrak{M}_c\cup\mathfrak{M}_\infty$, то в силу следствия 1 справедливо включение $\psi\in F_\psi$ и автоматически выполняется условие (13). Следовательно, равенства (8) и (9) выполняются для любой функции $\psi\in\mathfrak{M}_c\cup\mathfrak{M}_\infty$, если в качестве $a(n)$ взять величины $\mu(\psi;n)$.

Но в этом случае, согласно лемме 4,

$$P_n(\mu;\psi)=\int_{1/\mu(n)} \frac{\psi(nt+n)}{t}\,dt=\int_{\eta(n)}^{\infty}\frac{\psi(t)}{t-n}\,dt\leqslant K\psi(n), \tag{32}$$

$$R_n(\mu;\psi)=\int_{\mu(n)}^{\infty}\frac{1}{t}\left(\psi(n)-\psi\left(n+\frac{n}{t}\right)\right)dt=\int_{\varnothing n}^{\eta(n)}\frac{\psi(n)-\psi(t)}{t-n}\,dt\leqslant K\psi(n). \tag{33}$$

Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\psi\in\mathfrak{M}_c\cup\mathfrak{M}_\infty$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})=\frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln^{+}n(\eta(n)-n)+O(1)\psi(n), \tag{34}$$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta}H_\omega)=\frac{2}{\pi^2}\psi(n)\,s_n(\omega)\ln^{+}\pi(\eta(n)-n)+O(1)\,\psi(n)\,\omega(1/n), \tag{34'}$$

где $\eta(n)=\eta(\psi;n)=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(n)\right)$, $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* n *и* β, $s_n(\omega)$ — *величина, определяемая соотношением* (11).

Отметим несколько простейших фактов, вытекающих из теоремы 1. Если $\psi_1(v)\equiv v^{-r}$, $r>0$, то $\eta(\psi_1;t)=2^{1/r}t$, и, стало быть, $\mu(\psi_1;t)\equiv(2^{1/r}-1)^{-1}$. Следовательно, $\psi_1\in\mathfrak{M}_c$. В этом случае классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ и $C^{\psi}_{\beta}H_\omega$ переходят в известные классы r раз дифференцируемых функций W^r_β и соответственно $W^r_\beta H_\omega$ и тогда из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1′. *Для любых* $r>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ *при* $n\to\infty$

$$\mathcal{E}_n(W^r_\beta)=\frac{4\ln n}{\pi^2 n^r}+O(1)\,n^{-r}, \tag{35}$$

$$\mathcal{E}_n(W^r_\beta H_\omega)=\frac{s_n(\omega)}{\pi n^r}\ln n+O(1)\,n^{-r}\omega(1/n), \tag{35'}$$

где $O(1)$ *и* $s_n(\omega)$ — *величины, имеющие тот же смысл, что и в теореме* 1.

Если r — натуральное число и $\beta=r$, то соотношение (35) — известное равенство А. Н. Колмогорова [4], положившее начало новому направлению в теории приближения функций и в теории рядов Фурье — нахождению асимптотических равенств для верхних граней уклонений фиксированных полиномов на заданных классах функций. При любых $r>0$ и $\beta=r$ равенство (35) получено В. Т. Пинкевичем [5]. Если $r>0$ и $\beta=r$ или $\beta=r+1$, равенство (35′) принадлежит С. М. Никольскому [6]; при произвольных $\beta\in\mathbb{R}$ — А. . Ефимову [7].

Если $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$ и $f\in L^{\psi}_{\beta}$, то сумма ряда $S[f]$ является бесконечно дифференцируемой функцией. В самом деле, пусть r — произвольное натуральное число. Тогда в силу леммы 3 $(t^r\psi(t))' = t^{r-1}(r\psi(t) - t|\psi'(t)|) \leqslant \leqslant t^r|\psi'(t)|(r\alpha(t)-1)$. Функция $\alpha(t)$ монотонно стремится к нулю, поэтому найдется такое $t_0 = t_0(r)$, что при $t > t_0$ будет $(t^r\psi(t))' < 0$, т. е. при $t > t_0$ функция не возрастает. Пусть, далее, k_0 — любое натуральное число, большее t_0. Тогда для $S[f]$ имеем

$$S[f] = a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{k_0} \psi(k)\alpha_k(f^\psi_\beta; x) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} k^2\psi(k)(k^{-2}\alpha_k(f^\psi_\beta; x)),$$

где $\alpha_k(f^\psi_\beta, x) = (a_k(f^\psi_\beta)\cos\beta\pi/2 - b_k(f^\psi_\beta)\sin\beta\pi/2)\cos kx + (a_k(f^\psi_\beta)\sin\beta\pi/2 + b_k(f^\psi_\beta)\cos\beta\pi/2)\sin kx$.

Отсюда видно, что сумму ряда $S[f]$ можно дифференцировать по крайней мере $r-2$ раза и продифференцированный ряд будет равномерно сходящимся. Ввиду произвольности числа r, действительно, $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция.

Таким образом, если $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то равенства (34) и (34′) характеризуют скорость сходимости рядов Фурье на классах бесконечно дифференцируемых функций. В частности, функция $\psi_2(v) = \exp(-\alpha v^r)$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_\infty$ при любых $\alpha > 0$ и $r > 0$. Для нее $\eta(\psi_2; t) = t\left(\frac{\ln 2}{\alpha t^r} + 1\right)^{1/r}$, $\mu(\psi_2; t) = \left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha t^r} + 1\right)^{1/r}\right)^{-1}$ и, значит, в этом случае $\eta(n) - n = n^{1-r}\left(\frac{\ln 2}{r\alpha} + O(1)\right)$, где $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n. Поэтому из теоремы 1 получаем утверждение, ранее доказанное в [8].

Теорема 1″. *Пусть $\alpha > 0$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $\psi_2(v) = \exp(-\alpha v^r)$. Тогда при $n \to \infty$*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi_2}_{\beta,\infty}) = \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+ n^{1-r} + O(1)\right)\exp(-\alpha n^r),$$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi_2}_\beta H_\omega) = \left(\frac{s_n(\omega)\ln^+ n^{1-r}}{\pi} + O(1)\,\omega(1/n)\right)\exp(-\alpha n^r),$$

где величины $O(1)$ и $s_n(\omega)$ имеют тот же смысл, что и в теореме 1.

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.—Киев, 1983.— 57 с.—(Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 83.10).
2. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье. — Киев, 1983. — 57 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 83.69).
3. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье // Докл. АН СССР.— 1984.— 277, № 5.— С. 1074—1077.
4. *Kolmogoroff A. N.* Zur Grossenordnung des Restgliedes Fouriershen Reihen differenzierbaren Functionen // Ann. Math.— 1935.— **36**, N 2.— S. 521—526.
5. *Пинкевич В. Г.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1940.— **4**, № 5.— С. 521—528.
6. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1945.— **15**.— С. 1—76.
7. *Ефимов А. В.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1960.— **24**, № 2.— С. 243—296.
8. *Степанец А. И.* Уклонения сумм Фурье на классах бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 6.— С. 750—758.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 05.12.85

ральное число. Тогда в силу леммы 3 $(t^r\psi(t))' = t^{r-1}(r\psi(t) - t|\psi'(t)|) \leqslant \leqslant t^r|\psi'(t)|(r\alpha(t)-1)$. Функция $\alpha(t)$ монотонно стремится к нулю, поэтому найдется такое $t_0 = t_0(r)$, что при $t > t_0$ будет $(t^r\psi(t))' < 0$, т. е. при $t > t_0$ функция не возрастает. Пусть, далее, k_0 — любое натуральное число, большее t_0. Тогда для $S[f]$ имеем

$$S[f] = a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{k_0} \psi(k)\alpha_k(f_\beta^\psi; x) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} k^2\psi(k)(k^{-2}\alpha_k(f_\beta^\psi; x)),$$

где $\alpha_k(f_\beta^\psi, x) = (a_k(f_\beta^\psi)\cos\beta\pi/2 - b_k(f_\beta^\psi)\sin\beta\pi/2)\cos kx + (a_k(f_\beta^\psi)\sin\beta\pi/2 + b_k(f_\beta^\psi)\cos\beta\pi/2)\sin kx$.

Отсюда видно, что сумму ряда $S[f]$ можно дифференцировать по крайней мере $r-2$ раза и продифференцированный ряд будет равномерно сходящимся. Ввиду произвольности числа r, действительно, $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция.

Таким образом, если $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то равенства (34) и (34′) характеризуют скорость сходимости рядов Фурье на классах бесконечно дифференцируемых функций. В частности, функция $\psi_2(v) = \exp(-\alpha v^r)$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_\infty$ при любых $\alpha > 0$ и $r > 0$. Для нее $\eta(\psi_2; t) = t\left(\frac{\ln 2}{\alpha t^r} + 1\right)^{1/r}$, $\mu(\psi_2; t) = \left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha t^r} + 1\right)^{1/r}\right)^{-1}$ и, значит, в этом случае $\eta(n) - n = n^{1-r}\left(\frac{\ln 2}{r\alpha} + O(1)\right)$, где $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n. Поэтому из теоремы 1 получаем утверждение, ранее доказанное в [8].

Теорема 1″. *Пусть* $\alpha > 0$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ *и* $\psi_2(v) = \exp(-\alpha v^r)$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,\infty}^{\psi_2}) = \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+ n^{1-r} + O(1)\right)\exp(-\alpha n^r),$$

$$\mathcal{E}_n(C_\beta^{\psi_2}H_\omega) = \left(\frac{s_n(\omega)\ln^+ n^{1-r}}{\pi} + O(1)\,\omega(1/n)\right)\exp(-\alpha n^r),$$

где величины $O(1)$ *и* $s_n(\omega)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме* 1.

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.—Киев, 1983.— 57 с.—(Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 83.10).
2. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье. — Киев, 1983. — 57 с. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 83.69).
3. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье // Докл. АН СССР.— 1984.— 277, № 5.— С. 1074—1077.
4. *Kolmogoroff A. N.* Zur Grossenordnung des Restgliedes Fouriershen Reihen differenzierbaren Functionen // Ann. Math.— 1935.— **36**, N 2.— S. 521—526.
5. *Пинкевич В. Г.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1940.— **4**, № 5.— С. 521—528.
6. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1945.— **15**.— С. 1—76.
7. *Ефимов А. В.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1960.— **24**, № 2.— С. 243—296.
8. *Степанец А. И.* Уклонения сумм Фурье на классах бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 6.— С. 750—758.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 05.12.85