УДК 517.925

А. М. Самойленко

О гладкости по параметру инвариантного тора квазилинейной системы дифференциальных уравнений

Многие задачи теории нелинейных колебаний сводятся к системе дифференциальных уравнений вида

$$d\psi/dt = \omega + \varepsilon\Delta + \varepsilon f_1(h) + \varepsilon^2 F_1(\psi, h, \Delta, \varepsilon), \quad dh/dt = \varepsilon H h + \\ + \varepsilon f_2(h) + \varepsilon^2 F_2(\psi, h, \Delta, \varepsilon), \tag{1}$$

правая часть которой определена в области

$$\psi \in \mathscr{T}_m, \ \| h \| \leqslant \delta, \ \| \Delta \| \leqslant \sigma_0, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \tag{2}$$

при достаточно малых положительных δ, ε_0, периодическая по $\psi = (\psi_1, \dots \psi_m)$ с периодом 2π, l раз непрерывно дифференцируема по ψ, $h = (h_1, \dots, h_n)$, $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_{n_0})$, ε и удовлетворяет условиям

$$f_1(0) = 0, \ f_2(0) = 0, \ \partial f_2(0)/\partial h = 0. \tag{3}$$

Здесь $\mathscr{T}_m$ — куб периодов периодической по ψ с периодом 2π функции.

Инвариантную поверхность системы (1) вида

$$h = u(\psi, \Delta, \varepsilon), \quad \psi \in \mathscr{T}_m, \tag{4}$$

периодическую по ψ_j, $j = \overline{1, m}$, с периодом 2π называют инвариантным тором системы уравнений (1) гладкости, равной числу производных по ψ функции $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$. Теория возмущения инвариантных торов систем вида (1) (см., например, [1—4]) гарантирует существование инвариантного тора (4) в предположении, что вещественные части собственных чисел матрицы H, предполагаемой постоянной, отличны от нуля. Из этих результатов следует, что при конечном l всегда можно так фиксировать ε_0, чтобы тор (4) имел непрерывные по ψ, Δ, ε частные производные по ψ до порядка l включительно.

Н. Н. Боголюбов [5] обратил внимание на сложный характер зависимости тора (4) от параметра ε, показав на примере, что функция $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$ как функция параметра ε может иметь бесконечное число полюсов, лежащих на мнимой оси ($\mathrm{Re}\,\varepsilon = 0$) и имеющих точкой сгущения нулевую точку ($\varepsilon = 0$). В связи с этим возникает задача выяснения вопроса о гладкости функции $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$ по параметру ε лишь для действительных значений параметра ε.

Настоящая статья посвящена изложению результатов решения указанной задачи. Частично эти результаты анонсированы в докладе [6].

Запишем систему уравнений (1) в «медленном» времени $\tau = \varepsilon t$:

$$d\psi/d\tau = \omega/\varepsilon + \Delta + f_1(h) + \varepsilon F_1(\psi, h, \Delta, \varepsilon), \quad dh/d\tau = Hh + \\ + f_2(h) + \varepsilon F_2(\psi, h, \Delta, \varepsilon). \tag{5}$$

Инвариантный тор (4) системы уравнений (5) будем искать методом простой итерации как предел торов

$$h = u_j(\psi, \Delta, \varepsilon), \quad \psi \in \mathscr{T}_m, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

инвариантных относительно системы уравнений

$$d\psi/d\tau = \omega/\varepsilon + \Delta + f_1(u_{j-1}(\psi, \Delta, \varepsilon)) + \varepsilon F_1(\psi, u_{j-1}(\psi, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon), \tag{7}$$

$$dh/d\tau = Hh + f_2(u_{j-1}(\psi, \Delta, \varepsilon)) + \varepsilon F_2(\psi, u_{j-1}(\psi, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon),$$

где $u_0(\psi, \Delta, \varepsilon) \equiv 0$ при $\psi \in \mathscr{T}_m$, $\|\Delta\| \leqslant \sigma_0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. При сделанных предположениях по матрице H записывается функция Грина $G_0(\tau)$ задачи об инвариантном торе системы (7), допускающая оценку

$$\| G_0(\tau) \| \leqslant K e^{-\gamma|\tau|}, \quad \tau \in R, \tag{8}$$

где K и γ — положительные постоянные. С помощью этой функции инвариантный тор (6) системы уравнений (7) определяется интегралом вида

$$u_j(\psi, \Delta, \varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau)\,[f_2(u_{j-1}(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon)) + \varepsilon F_2(\psi_\tau, u_{j-1}(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)]\,d\tau, \tag{9}$$

где $\psi_\tau = \psi_\tau(\psi, \Delta, \varepsilon)$ — решение первого из уравнений системы (7), принимающее при $\tau = 0$ значение $\psi_0(\psi, \Delta, \varepsilon) = \psi$, $u_0(\psi, \Delta, \varepsilon) \equiv 0$.

Лемма. *Пусть в области*

$$\psi \in \mathscr{T}_m, \quad \|\Delta\| \leqslant \sigma_0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \tag{10}$$

функция $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$ l раз непрерывно дифференцируема по ψ, Δ, ε, периодическая по ψ_j, $j = \overline{1, m}$, с периодом 2π и удовлетворяет неравенству

$$\| D^\rho u^{(\nu)}(\psi, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant M_\nu/\varepsilon^{2\nu-1}, \quad \rho + \nu \leqslant l, \quad \nu = \overline{0, l}, \tag{11}$$

где D^ρ — любая производная по ψ, Δ порядка ρ, $u^{(\nu)}$ — ν-я производная по ε функции $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$.

Тогда можно указать достаточно большие постоянные M_ν, $\nu = \overline{1, s}$, и достаточно малую постоянную $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_0, \ldots, M_l) > 0$ такие, что функция

$$v(\psi, \Delta, \varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau)\,[f_2(u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon)) + \varepsilon F_2(\psi_\tau, u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)]\,d\tau,$$

в которой $\psi_\tau = \psi_\tau(\psi, \Delta, \varepsilon)$ — решение системы уравнений

$$d\psi/d\tau = \omega/\varepsilon + \Delta + f_1(u(\psi, \Delta, \varepsilon)) + \varepsilon F_1(\psi, u(\psi, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon), \tag{12}$$

является l раз непрерывно дифференцируемой по ψ, Δ, ε в области (10) *с $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_0, \ldots, M_s)$, периодической по ψ_j, $j = \overline{1, m}$, с периодом 2π, и удовлетворяет неравенству*

$$\| D^\rho v^{(\nu)}(\psi, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant M_\nu/\varepsilon^{2\nu-1}, \quad \rho + \nu \leqslant l, \quad \rho = \overline{0, l}. \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим решение $\psi_\tau(\psi, \Delta, \varepsilon)$ системы уравнений (12). Согласно теоремам существования и дифференцируемости по начальным данным и параметрам решения дифференциального уравнения, функция $\psi_\tau(\psi, \Delta, \varepsilon)$ имеет l непрерывных производных по ψ, Δ, ε в области (10) при $\tau \in R$. Рассмотрим производные функции $\psi_\tau(\psi, \Delta, \varepsilon)$ по переменным ψ, Δ. Так как

$$\| D [f_1 (u (\psi_\tau, \Delta, \varepsilon)) + \varepsilon F_1 (\psi_\tau, u (\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)] \| \leqslant \| \partial f_1 / \partial h \| [\| \partial u / \partial \psi \| \cdot \| D\psi_\tau \| + \\ + \| \partial u / \partial \Delta \|] + \varepsilon \{ \| \partial F_1 / \partial \psi \| \| D\psi_\tau \| + \| \partial F_1 / \partial h \| [\| \partial u / \partial \psi \| \| D\psi_\tau \| + \\ + \| \partial u / \partial \Delta \|] + \| \partial F_1 / \partial \Delta \| \} \leqslant \varepsilon c_1 M_0 (1 + \| D\psi_\tau \|)$$

с постоянной c_1, не зависящей от ε, M_0, то для $D\psi_\tau$ получаем из уравнения (12) неравенство

$$\| D\psi_\tau \| \leqslant (1 + \varepsilon c_1 M) |\tau| + \varepsilon c_1 M_0 \left| \int_0^\tau \| D\psi_\tau \| d\tau \right|. \tag{14}$$

Положим $\mu = \gamma/(2l)$ и потребуем, чтобы ε_0 удовлетворяло оценке

$$\varepsilon_0 c_1 M_0 \leqslant \mu. \tag{15}$$

При таком выборе μ и ε_0 из (14) следует неравенство

$$\| D\psi_\tau \| \leqslant (1 + \mu) |\tau| + \mu \left| \int_0^\tau \| D\psi_\tau \| \delta\tau \right|,$$

решая которое находим для $\| D\psi_\tau \|$ оценку

$$\| D\psi_\tau \| \leqslant \frac{1 + \mu}{\mu} e^{\mu|\tau|} \leqslant c_0 e^{\mu|\tau|}, \quad \tau \in R,$$

где $(1 + \mu)/\mu \leqslant c_0$.

Предположим, что для $j = \overline{1, s-1}$ и всех ψ, Δ, ε из области (10) доказана оценка

$$\| D^j \psi_\tau \| \leqslant c_0 e^{\mu_j |\tau|}, \quad \tau \in R. \tag{16}$$

Тогда

$$\| D^j u (\psi_\tau, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant \sum_{\nu=1}^{j} \| D^\nu_\Phi \, u (\Phi_\tau) \| \sum_\alpha c_{\nu\alpha} \| D\Phi_\tau \|^{\alpha_1} \ldots \| D^j \Phi_\tau \|^{\alpha_j}, \tag{17}$$

где $\Phi_\tau = (\psi_\tau, \Delta, \varepsilon)$. Так как при $1 \leqslant \nu \leqslant j \leqslant l - 1$

$$\| D^\nu_\Phi \, u (\Phi_\tau) \| \leqslant \varepsilon M_0, \quad \| D^\nu \Phi_\tau \| \leqslant c_0 e^{\mu\nu|\tau|}, \quad \tau \in R, \tag{18}$$

то из неравенств (17), (18) следует

$$\| D^j u (\psi_\tau, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon c_1 M_0 c_0^j e^{\mu_j |\tau|} \leqslant \varepsilon \bar{c}_1 M_0 e^{\mu_j |\tau|}, \quad j \leqslant l - 1, \quad \tau \in R. \tag{19}$$

Аналогично находим оценку

$$\| D^l u (\psi_\tau, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant \Sigma \| D_\Phi u (\Phi_\tau) \| \| D^l \psi_\tau \| + \varepsilon c_1 M_0 c_0^l e^{\mu l |\tau|} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon c_1 M_0 \| D^l \psi_\tau \| + \varepsilon \bar{c}_1 M_0 e^{\mu l |\tau|}, \quad \tau \in R, \tag{20}$$

где $c_1 c_0^l = \bar{c}_1$. Из неравенств (19), (20) следует, что

$$\| D^l f_1 (u (\psi_\tau, \Delta, \varepsilon)) \| \leqslant \sum \left\| \frac{\partial f_1 (u (\Phi_\tau))}{\partial h} \right\| \| D^l u (\Phi_\tau) \| + \Sigma \| D^\nu_h f_1 (u (\Phi_\tau)) \| \times \\ \times \sum_\alpha c_{\nu\alpha} \| Du (\Phi_\tau) \|^{\alpha_1} \ldots \| D^{l-1} u (\Phi_\tau) \|^{l-1} \leqslant \varepsilon c_2 M_0 \| D^l \psi_\tau \| + \\ + \varepsilon c_2 \bar{c}_1^l M_0^l e^{\mu l |\tau|} \leqslant \frac{\mu}{2} (\| D^l \psi_\tau \| + e^{\mu l |\tau|}), \quad \tau \in R,$$

лишь только

$$2 \varepsilon_0 c_2 \bar{c}_1^l M_0^l \leqslant \mu. \tag{21}$$

Положим $\Psi_\tau = (\psi_\tau, u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)$. Поскольку при $1 \leqslant j \leqslant s-1$

$$\| D^j \Psi_\tau \| \leqslant \| D^j \psi_\tau \| + \| D^j u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon) \| + 1 \leqslant c_0 e^{\mu_j |\tau|} +$$

$$+ \varepsilon c_1 M_0 c_0^j e^{\mu_j |\tau|} + 1 \leqslant (\bar{c}_1 + 1) e^{\mu_j |\tau|}, \quad \tau \in R,$$

и аналогично

$$\| D^l \Psi_\tau \| \leqslant (1 + \varepsilon c_1 M_0) \| D^l \psi_\tau \| + \varepsilon \, c_1 M_0 e^{\mu l |\tau|} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \bar{c}_1)(\| D^l \psi_\tau \| + e^{\mu l |\tau|}), \quad \tau \in R,$$

то для функции $F_1(\psi_\tau, u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon) = F_1(\Psi_\tau)$ верна оценка

$$\| D^l F_1(\Psi_\tau) \| \leqslant \Sigma \| D_\Psi F_1(\Psi_\tau) \| \, \| D^l \Psi_\tau \| + \Sigma \| D_\Psi^j F_1(\Psi_\tau) \| \times$$

$$\times \Sigma c_{j\alpha} \| D \Psi_\tau \|^{\alpha_1} \ldots \| D^{l-1} \Psi_\tau \|^{\alpha_{l-1}} \leqslant c_2 (1 + \bar{c}_1)^l (\| D^l \psi_\tau \| + e^{\mu l |\tau|}). \quad (22)$$

Но тогда функция $D^l \psi_\tau$ удовлетворяет неравенству

$$\| D^l \psi_\tau \| \leqslant \mu \left| \int_0^\tau (\| D^l \psi_\tau \| + e^{\mu l |\tau|}) \, d\tau \right|, \quad (23)$$

если

$$2\varepsilon_0 c_2 (1 + \bar{c}_1)^l \leqslant \mu. \quad (24)$$

Решая неравенство (23), получаем оценку

$$\| D^l \psi_\tau \| \leqslant \frac{\varepsilon^{\mu l |\tau|}}{(l-1)} \leqslant c_0 e^{\mu l |\tau|}, \quad \tau \in R,$$

из которой следует (16) при $j = l$.

По методу математической индукции неравенство (16) справедливо для $j = \overline{1, l}$ и всех ψ, Δ, ε из области (10) с $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_0, l) > 0$, выбранным согласно неравенствам (15), (21), (24).

Покажем, что неравенства (16) ведут к оценке (13) при $\nu = 0$. Так как $\| f_2(h) \| \leqslant \mathscr{L} \| h \|^2$, $\| \partial f_2(h)/\partial h \| \leqslant \mathscr{L} \| h \|$, то функция $v(\psi, \Delta, \varepsilon)$ оценивается следующим образом:

$$\| v(\psi, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma |\tau|} [\mathscr{L} \| u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon) \|^2 + \varepsilon \| F(\psi_\tau, u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon),$$

$$\Delta, \varepsilon) \|] \, d\tau \leqslant \frac{2K}{\gamma} [\mathscr{L} \varepsilon^2 M_0^2 + \varepsilon \max \| F \|] \leqslant \varepsilon M_0,$$

лишь только

$$\varepsilon_0 M_0^2 \leqslant 1, \ \frac{2K}{\gamma} [\mathscr{L} + \max \| F \|] \leqslant M_0, \quad (25)$$

где max берется по ψ, h, Δ, ε из области (2).

Для оценки функции $D^\rho v(\psi, \Delta, \varepsilon)$ при $1 \leqslant \rho \leqslant l$ находим

$$\| D^\rho f_2(u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon)) \| \leqslant \Sigma \| D_h f_2(u(\Phi_\tau)) \| \sum_{|\alpha|=1} c_{1\alpha} \| Du \|^{\alpha_1} \ldots \| D^\rho u \|^{\alpha_\rho} +$$

$$+ \sum_{2 \leqslant \nu \leqslant \rho} \| D_h^\nu f_2(u(\Phi_\tau)) \| \sum_{|\alpha|=\nu} c_{\nu\alpha} \| Du \|^{\alpha_1} \ldots \| D^\rho u \|^{\alpha_\rho} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \left[\mathscr{L} \| u \| \varepsilon c_1 M_0 + \sum_{2 \leqslant \nu \leqslant \rho} (\varepsilon \bar{c}_1 M_0)^\nu \right] e^{\mu\rho |\tau|} \leqslant \varepsilon^2 c_1 M_0^2 (\mathscr{L} + 2\bar{c}_1) \bar{c}_1 e^{\mu\rho |\tau|} \quad (26)$$

лишь только

$$\varepsilon_0 \bar{c}_1 M_0 \leqslant 1/2. \quad (27)$$

Более того, так как функция $F_2(\psi_\tau, u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)$ имеет вид функции $F_1(\psi_\tau, u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)$, то для ее производных D^ρ при $1 \leqslant \rho \leqslant l$ верна оценка (22) с $l = \rho$, следовательно, с учетом неравенства (16) верна оценка

$$\| D^\rho F_2(\psi_\tau, u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon) \| \leqslant c_2 (1 + \bar{c}_1)^\rho (c_0 + 1) e^{\mu\rho|\tau|}, \quad \tau \in R. \tag{28}$$

Из неравенств (26), (28) следует, что

$$\| D^\rho v(\psi, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\gamma-\rho\mu)|\tau|} d\tau \, [\varepsilon c_1 M_0^2 (\mathscr{L} + 2\bar{c}_1) \bar{c}_1 + c_2 (1 + \bar{c}_1)^\rho \times$$

$$\times (c_0 + 1)] \leqslant \varepsilon \frac{4K}{\gamma} [\varepsilon c_1 M_0^2 (\mathscr{L} + 2\bar{c}_1) \bar{c}_1 + c_2 (1 + \bar{c}_1)(c_0 + 1)] \leqslant \varepsilon M_0,$$

если

$$\frac{4K}{\gamma} [c_2 (1 + \bar{c}_1)^\rho (c_0 + 1) + (\mathscr{L} + 2\bar{c}_1) \bar{c}_1] \leqslant M_0, \quad \varepsilon_0 c_1 M_0^2 \leqslant 1. \tag{29}$$

Таким образом, при достаточно большом $M_0 \geqslant 1$ и достаточно малом $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_0, l) > 0$, выбранных из условия удовлетворения неравенствам (15), (21), (24), (25), (27), (29), функция $v(\psi, \Delta, \varepsilon)$ удовлетворяет в области (10) неравенству (11) при $\nu = 0$.

Перейдем к оценке производных функции $\psi_\tau(\psi, \Delta, \varepsilon)$ по параметру ε. Будем считать, что постоянная M_0 фиксирована так, что при $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_0, l)$ в области (10) справедливы неравенства (16). Так как

$$\| f^{(1)}(u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon)) \| \leqslant \| \partial f/\partial h \| [\| \partial u/\partial \psi \| \psi_\tau^{(1)} \| + \| u^{(1)} \|] \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon c_1 M_0 \| \psi_\tau^{(1)} \| + c_1 M_1/\varepsilon,$$

$$\| [\varepsilon F_1(\psi_\tau, u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)]^{(1)} \| \leqslant \varepsilon c_1 [(1 + \varepsilon M_0) \| \psi_\tau^{(1)} \| + \| u^{(1)} \| + 1] +$$

$$+ \| F_1 \| \leqslant 2\varepsilon c_1 \| \psi_\tau^{(1)} \| + 2c_1 M_1, \tag{30}$$

то для функции $\psi_\tau^{(1)}$ получаем неравенство

$$\| \psi_\tau^{(1)} \| \leqslant \left[\frac{\| \omega \|}{\varepsilon^2} + \left(2 + \frac{1}{\varepsilon}\right) c_1 M_1 \right] | \tau | + \varepsilon c_1 (2 + M_0) \left| \int_0^\tau \| \psi_\tau^{(1)} \| d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1'}{\varepsilon^2} | \tau | + \mu \left| \int_0^\tau \| \psi_\tau^{(1)} \| d\tau \right|, \tag{31}$$

лишь только $\varepsilon_0 c_1 M_1 \leqslant 1$, $\varepsilon_0 c_1 (2 + M_0) \leqslant 1$. Решая неравенство (31), находим

$$\| \psi_\tau^{(1)} \| \leqslant \frac{c_1^1}{\mu\varepsilon^2} e^{\mu|\tau|} \leqslant \frac{\bar{c}_1}{\varepsilon^2} e^{\mu|\tau|}, \quad \tau \in R, \tag{32}$$

где $\bar{c}_1$ не зависит от ε и M_1.

Так как дифференцирование уравнения для $\psi_\tau^{(1)}$ по ψ, Δ «зануливает» член ω/ε^2, то для производных D^ρ функций $\psi_\tau^{(1)}$ при $2 \leqslant \rho + 1 \leqslant l$ справедлива оценка

$$\| D^\rho \psi_\tau^{(1)} \| \leqslant \frac{\bar{c}_{\rho+1} M_1}{\varepsilon} e^{\mu(\rho+1)|\tau|}, \quad \tau \in R, \tag{33}$$

где $\bar{c}_{\rho+1}$ не зависит от ε и M_1.

Докажем оценку (33). Пусть она верна при $2 \leqslant \rho + 1 \leqslant j < l$. Тогда для функции $\Phi_\tau = (\psi_\tau, \Delta)$ при этих же ρ справедлива оценка $\| (D^\rho \Phi_\tau)' \| = \| D^\rho \psi_\tau^{(1)} \| \leqslant \frac{\bar{c}_{\rho+1} M_1}{\varepsilon} e^{\mu(\rho+1)|\tau|}$, $\tau \in R$, в результате чего

$$\| [D^{j+1} f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon))]' \| \leqslant \Sigma \| [D_\Phi^\nu f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon)) \sum_{|\alpha|=\nu} c_{\nu\alpha} (D\Phi_\tau)^{\alpha_1} \ldots$$

$$\ldots (D^j \Phi_\tau)^{\alpha_j}]' \| + \Sigma \{\| [D_\Phi f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon))]' \| \| D^{j+1} \Phi_\tau \| + \| D_\Phi f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon)) \| \times$$

$$\times \| D^{j+1} \psi_\tau^{(1)} \|\} \leqslant \varepsilon c_1' M_0 \| D^{j+1} \psi_\tau^{(1)} \| + \Sigma [\| (\partial f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon))/\partial h)' \partial u (\Phi_\tau, \varepsilon)/\partial \Phi \| +$$

$$+ \| D_h f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon)) (\partial u (\Phi_\tau, \varepsilon)/\partial \Phi)' \| c_0 e^{\mu (j+1) |\tau|} [+ \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant j+1} \| [D_\Phi^\nu f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon))]' \times$$

$$\times \| c_0^\nu e^{\mu (j+1) |\tau|} + \Sigma \| D_\Phi^\nu f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon)) \| \sum_{|\alpha|=\nu} c_{\nu\alpha} \| (D\Phi_\tau)^{\alpha_1} \ldots$$

$$\ldots \alpha_i (D^i \Phi_\tau)^{\alpha_i - 1} (D^i \Phi_\tau^{(1)}) \ldots (D^j \Phi_\tau)^{\alpha_j} \|.$$

Далее имеем

$$\| [D_h f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon))]' \| \| D_\Phi u (\Phi_\tau, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon c_1' M_0 [M_0 \| \psi_\tau^{(1)} \| + \| u^{(1)} \|] e^{\mu |\tau|} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon M_0 \frac{(M_0 + M_1)}{\varepsilon} e^{2\mu |\tau|} \leqslant c_2 M_0 (M_0 + M_1) e^{2\mu |\tau|},$$

$$\left\| D_h f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon)) \left(\frac{\partial u (\Phi_\tau, \varepsilon)}{\partial \Phi} \right)' \right\| \leqslant c_1 (\varepsilon M_0) \| \psi_\tau^{(1)} \| + \| D_\Phi u^{(1)} \| \leqslant$$

$$\leqslant c_1' \frac{M_0 + M_1}{\varepsilon} e^{\mu |\tau|}, \quad \tau \in R,$$

$$\sum_{|\alpha|=\nu} \| (D\Phi_\tau)^{\alpha_1} \ldots \alpha_i (D^i \Phi_\tau)^{\alpha_i - 1} (D^i \Phi_\tau^{(1)}) \ldots (D^j \Phi_\tau)^{\alpha_j} \| \leqslant \frac{c_1' M_1}{\varepsilon} e^{\mu (j+2) |\tau|}.$$

Таким образом,

$$\| [D^{j+1} f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon))]' \| \leqslant \varepsilon c_1 M_0 \| D^{j+1} \psi_\tau^{(1)} \| + \frac{c_2' (M_0 + M_1)}{\varepsilon} e^{\mu (j+2) |\tau|} +$$

$$+ c_2' \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant j+1} \| [D_\Phi^\nu f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon))]' \| e^{\mu (j+1) |\tau|}, \quad \tau \in R. \tag{34}$$

Оценим, наконец, величину $[D_\Phi^\nu f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon))]'$. Имеем

$$\| [D_\Phi^\nu f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon))]' \| \leqslant c_1' \sum_{1 \leqslant \rho \leqslant \nu} \| [D_h^\rho f_1 (u (\Phi_\tau \varepsilon))]' \| \sum_{|\alpha|=\rho} \| D_\Phi u \|^{\alpha_1} \ldots$$

$$\ldots \| D_\Phi^\nu u \|^{\alpha_\nu} + c_1' \sum_{1 \leqslant \rho \leqslant \nu} \| D_h^\rho f_1 (u (\Phi_\tau, \varepsilon)) \| \sum_{|\alpha|=\rho} \| [(D_\Phi u)^{\alpha_1} \ldots (D_\Phi^\nu u)^{\alpha_\nu}]' \| \leqslant$$

$$\leqslant c_2' \sum_{1 \leqslant \rho \leqslant \nu} (\varepsilon M_0)^\rho (\varepsilon M_0 \| \psi_\tau' \| + \| u^{(1)} \|) + c_2' \sum_{1 \leqslant \rho \leqslant \nu} (\varepsilon M_0)^{\rho - 1} (\varepsilon M_0 \| \psi_\tau^{(1)} \| +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant j \leqslant \nu} \| D^j u^{(1)} \|) \leqslant \frac{c_2'' (M_0 + M_1)}{\varepsilon} e^{\mu |\tau|}, \quad \tau \in R. \tag{35}$$

Из неравенств (34), (35) следует

$$\| [D^{j+1} f_1 (u (\psi_\tau, \Delta, \varepsilon))]' \| \leqslant \varepsilon c_1' M_0 \| D^{j+1} \psi_\tau^{(1)} \| + \frac{2 c_2' (M_0 + M_1)}{\varepsilon} e^{\mu (j+2) |\tau|}, \tag{36}$$

где c_1' и c_2' не зависят от ε, M_0 и M_1.

При $2 \leqslant \rho + 1 \leqslant j < l$ для функции $\Psi_\tau = (\psi_\tau, u (\psi_\tau, \Delta. \varepsilon), \Delta, \varepsilon)$ верна оценка

$$\| (D^{\rho}\Psi_{\tau})' \| \leqslant \| D^{\rho}\psi_{\tau}^{(1)} \| + \| [D^{\rho}u(\psi_{\tau}, \Delta, \varepsilon)]' \| \leqslant (1 + \varepsilon c_1' M_0) \| D^{\rho}\psi_{\tau}^{(1)} \| +$$

$$+ \frac{2c_2''(M_0 + M_1)}{\varepsilon\rho} e^{\mu(\rho+1)|\tau|} \leqslant \frac{c_{\rho}(M_0 + M_1)}{\varepsilon} e^{\mu(\rho+1)|\tau|},$$

так как функция $[Du(\psi_{\tau}, \Delta, \varepsilon)]'$. оценивается неравенством (36) при $j = \rho - 1$, $f_1(u) = u$. В силу этого же неравенства (36) имеем

$$\| (D^{j+1}\Psi_{\tau})' \| \leqslant c_{j+1} \left[\| D^{j+1}\psi_{\tau}^{(1)} \| + \frac{M_0 + M_1}{\varepsilon} e^{\mu(j+2)|\tau|} \right], \quad \tau \in R.$$

Оценим функцию $[D^{j+1}F_1(\psi_{\tau}, u(\psi_{\tau}, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)]' = [D^{j+1}F_1(\Psi_{\tau})]'$. Имеем

$$\| D^{j+1}F_1(\Psi_{\tau}) \| \leqslant \sum_{1 \leqslant \rho \leqslant j+1} \left\| [D_{\Psi}^{\rho}F_1(\Psi_{\tau}) \sum_{|\alpha|=\rho} (D\Psi_{\tau})^{\alpha_1} \dots (D^j\Psi_{\tau})^{\alpha_j}]' \right\| +$$

$$+ \Sigma \| [D_{\Psi}F_1(\Psi_{\tau})' \| \| D^{j+1}\Psi_{\tau} \| + \Sigma \| D_{\Psi}F_1(\Psi_{\tau}) \| \| [D^{j+1}\Psi_{\tau}]' \|,$$

что, с учетом неравенств

$$\| [D_{\Psi}^{\rho}F_1(\Psi_{\tau})]' \| \leqslant c_1 \| \Psi_{\tau}' \| \leqslant c_1' [(1 + \varepsilon M_0) \| \psi_{\tau}' \| + \| u^{(1)} \|] \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \frac{M_0 + \varepsilon M_1}{\varepsilon^2} e^{\mu|\tau|} \leqslant \frac{\bar{c}_2 M_0}{\varepsilon^2} e^{\mu|\tau|}, \qquad \varepsilon_0 M_1 \leqslant 1,$$

$$\sum_{|\alpha|=\rho} \| (D\Psi_{\tau})^{\alpha_1} \dots \alpha_{\nu} (D^{\nu}\Psi_{\tau})^{\alpha_{\nu}-1} (D^{\nu}\Psi_{\tau})' \dots (D^j\Psi_{\tau}) \| \leqslant \frac{\bar{c}_2 (M_0 + M_1)}{\varepsilon} e^{\mu(j+2)|\tau|}$$

ведет к оценке

$$\| [D^{j+1}F_1(\Psi_{\tau})]' \| \leqslant c_{j+1}' [(M_0/\varepsilon^2 + M_1/\varepsilon) e^{\mu(j+2)|\tau|} + \| D^{j+1}\psi_{\tau}^{(1)} \|]. \tag{37}$$

С учетом оценки (37) имеем неравенство

$$\| [\varepsilon D^{j+1}F_1(\Psi_{\tau})]' \| \leqslant \varepsilon c_{j+1}' \| D^{j+1}\psi_{\tau}^{(1)} \| + c_{j+1}'' \left(\frac{M_0}{\varepsilon} + 1 \right) e^{\mu(j+1)|\tau|}, \tag{38}$$

которое вместе с (36) показывает, что

$$\| D^{j+1}\psi_{\tau}^{(1)} \| \leqslant \left| \int_0^{\tau} \left[\mu \| D^{j+1}\psi_{\tau}^{(1)} \| + \frac{c_{j+2}(M_0 + M_1)}{\varepsilon} e^{\mu(j+2)|\tau|} \right] d\tau \right|, \tag{39}$$

лишь только $\varepsilon_0 (c_{j+1}' + c_1' M_0) \leqslant \mu$. Решая неравенство (39), находим оценку

$$\| D^{j+1}\psi_{\tau}^{(1)} \| \leqslant \frac{c_{j+2}(M_0 + M_1)}{\mu(j+1)\varepsilon} e^{\mu(j+2)|\tau|} \leqslant \frac{\bar{c}_{j+2}M_1}{\varepsilon} e^{\mu(j+2)|\tau|}, \quad \tau \in R,$$

лишь только $M_0 < M_1$, $\bar{c}_{j+2} = \dfrac{c_{j+2}}{(j+1)\mu}$. Последняя оценка имеет вид оценки (33) и, чтобы закончить доказательство оценки (33), остается проверить ее справедливость при $\rho = 1$.

Так как

$$\| [Df_1(u(\psi_{\tau}, \Delta, \varepsilon))]' \| \leqslant \Sigma [\| [D_h f_1(u(\psi_{\tau}, \Delta, \varepsilon))]' \| \| Du(\psi_{\tau}, \Delta, \varepsilon) \| +$$

$$+ \| D_h f_1(u(\psi_{\tau}, \Delta, \varepsilon)) \| \| [Du(\psi_{\tau}, \Delta, \varepsilon)]' \|] \leqslant \varepsilon M_0 c_1 (\varepsilon M_0 \| \psi_{\tau}^{(1)} \| +$$

$$+ \| u^{(1)} \|) e^{\mu|\tau|} + c_1 \Sigma [(\varepsilon M_0 \| \psi^{(1)} \| + \| Du^{(1)} \|) e^{\mu|\tau|} + \varepsilon M_0 \| D\psi_{\tau}^{(1)} \|] \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon c_1 M_0 \| D\psi_{\tau}^{(1)} \| + c_1' \frac{M_0 + M_1}{\varepsilon} e^{2\mu|\tau|}, \quad \tau \in R,$$

и аналогично

$$\|[DF_1(\Psi_\tau)]'\| \leqslant \Sigma\,[\|[D_\Psi F_1(\Psi_\tau)]'\|\,\|D\Psi_\tau\| + \|D_\Psi F_1(\Psi_\tau)\|\,\|(D\Psi_\tau)'\|] \leqslant$$

$$\leqslant c_1(1+\|\psi_\tau^{(1)}\| + \|u^{(1)}\|)\,e^{\mu|\tau|} + c_1(\varepsilon M_0\|D\psi_\tau^{(1)}\| + \|Du^{(1)}\|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1'}{\varepsilon^2}\,e^{2\mu|\tau|} + \varepsilon c_1 M_0\|D\psi_\tau^{(1)}\|, \quad \varepsilon_0 M_1 \leqslant 1, \ \tau \in R,$$

то для $D\psi_\tau^{(1)}$ получаем неравенство

$$\|D\psi_\tau^{(1)}\| \leqslant \left|\int_0^\tau \left[\mu\|D\psi_\tau^{(1)}\| + \frac{c_1'(2+M_0+M_1)}{\varepsilon}\,e^{2\mu|\tau|}\right]d\tau, \quad 2\varepsilon_0 c_1 M_0 \leqslant 1,\right.$$

из которого следует

$$\|D\psi_\tau^{(1)}\| \leqslant \frac{c_1'(2+M_0+M_1)}{\mu\varepsilon}\,e^{2\mu|\tau|} \leqslant \frac{\bar{c}_2 M_1}{\varepsilon}\,e^{2\mu|\tau|}, \quad \tau \in R,$$

лишь только $2 + M_0 \leqslant M_1$, $\bar{c_2} = 2c_1'/\mu$. Последнее неравенство имеет вид неравенства (33) при $\rho = 1$. Этим доказательство неравенства (33) завершается.

Докажем неравенство (11) леммы при $\nu = 1$, используя оценки (32), (33). Согласно оценке (32)

$$\|[f_2(u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon))]'\| \leqslant \|\partial f_2(u(\Phi_\tau))/\partial h\|\,[\|\partial u(\Phi_\tau)/\partial\psi\|\,\|\psi_\tau^{(1)}\| + \|u^{(1)}(\Phi_\tau)\|] \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\mathscr{L}M_0\left(\varepsilon M_0\frac{\bar{c}_1}{\varepsilon^2} + \frac{M_1}{\varepsilon}\right)e^{\mu|\tau|} \leqslant \mathscr{L}M_0(\bar{c}_1 M_0 + M_1)\,e^{\mu|\tau|}, \quad \tau \in R,$$

а также этой же оценке и неравенству (30), взятому для $F_1 = F_2$,

$$\|[\varepsilon F_2(\psi_\tau, u(\varphi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)]'\| \leqslant 2\varepsilon c_1\|\psi_\tau^{(1)}\| + 2c_1 M_1 \leqslant [2c_1\bar{c}_1/\varepsilon + 2c_1 M_1]\,e^{\mu|\tau},$$

поэтому для $v^{(1)}(\psi, \Delta, \varepsilon)$ верна оценка (11) при $\rho = 0$, $\nu = 1$:

$$\|v^{(1)}(\psi, \Delta, \varepsilon)\| \leqslant \frac{4K}{\gamma}\left[\frac{2c_1\bar{c}_1}{\varepsilon} + \mathscr{L}M_0(\bar{c}_1 M_0 + M_1) + 2c_1 M_1\right] \leqslant \frac{M_1}{\varepsilon},$$

лишь только M_1 и $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_0, M_1)$ выбраны из условий $\frac{4K}{\gamma}(2c_1\bar{c}_1 + 1) \leqslant \leqslant M_1$, $\varepsilon_0[\mathscr{L}M_0(\bar{c}_1 M_0 + M_1) + 2c_1 M_1] \leqslant 1$. При $2 \leqslant \rho + \nu \leqslant l$, $\nu = 1$ для $[D^\rho f_2(u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon))]'$ имеем оценку

$$\|[D^\rho f_2(u(\Phi_\tau))]'\| \leqslant \Sigma\,\|[D_h f_2(u(\Phi_\tau))\sum_j c_{1j}(D^j u(\Phi_\tau))]'\| +$$

$$+ \sum_{2\leqslant p\leqslant\rho}\|[D_h^p f_2(u(\Phi_\tau))\,\Sigma c_{p\alpha}(Du)^{\alpha_1}\ldots(D^p u)^{\alpha_p}]'\| \leqslant$$

$$\leqslant c_1\left[\frac{M_0+M_1}{\varepsilon}\,\varepsilon M_0 + \mathscr{L}(\varepsilon M_0)\frac{M_0+M_1}{\varepsilon}\right]e^{\mu(\rho+1)|\tau|} \leqslant c_1' M_0^2 M_1 e^{\mu(\rho+1)|\tau|}, \quad \tau \in R.$$

Для функции $\varepsilon F_2(\psi_\tau, u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)$, согласно оценке (38), взятой при $F_1 = F_2$ и $j + 1 = \rho$, имеем

$$\|[\varepsilon D^\rho F_2(\Psi_\tau)]'\| \leqslant [\varepsilon c_\rho' M_1/\varepsilon + c_\rho''(M_0/\varepsilon + 1)]\,e^{\mu(\rho+1)|\tau|} \leqslant$$

$$\leqslant \bar{c}_\rho(M_0/\varepsilon + M_1)\,e^{\mu(\rho+1(|\tau|} \leqslant \bar{c}_\rho\left(\frac{M_0+1}{\varepsilon}\right)e^{\mu(\rho+1)|\tau|}, \quad \varepsilon_0 M_1 \leqslant 1.$$

Но тогда для $D^\rho v^{(1)}(\psi, \Delta, \varepsilon)$ имеем оценку (13)

$$\| D^\rho v^{(1)}(\psi, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant K \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\gamma-\mu s)|\tau|} d\tau \left[c_1' M_0^2 M_1 + c_\rho' (M_0+1)/\varepsilon\right] \leqslant M_1/\varepsilon,$$

лишь только $\left[1 + \frac{4K}{\gamma} c_\rho' (M_0+1)\right] \leqslant M_1,\ \varepsilon_0 \frac{4K}{\gamma} c_1' M_0^2 M_1 \leqslant 1.$

Перейдем к оценке функций $D^\rho v^{(\nu)}(\psi, \Delta, \varepsilon)$ при $2 \leqslant \rho + \nu \leqslant l,\ \nu > 1$. Так как из неравенства (33) следует оценка

$$\| [f_1 (u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon))]^{(\nu)} \| \leqslant \Sigma \| D_h f_1 (u(\Phi_\tau)) \| \ \| D_\psi^\nu u \| \| \psi_\tau^{(1)} \|^\nu + \ldots \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1 \varepsilon M_0 c_1^\nu}{\varepsilon^{2\nu}} e^{\mu\nu|\tau|} + \ldots \leqslant \frac{c_1 c_1^\nu M_0}{\varepsilon^{2\nu-1}} e^{\mu\nu|\tau|} + \ldots,$$

то можно ожидать, что при указанных ρ, ν в области (10) с достаточно малым $\varepsilon_0 = \varepsilon_0\ (M_0, \ldots, M_l) > 0$ справедлива оценка

$$\| D^\rho \psi_\tau^{(\nu)} \| \leqslant \frac{\bar{c}_{\rho+\nu} M_\nu}{\varepsilon^{2\nu-1}} e^{\mu(\rho+\nu)|\tau|}, \quad \tau \in R, \tag{40}$$

с постоянной $\bar{c}_{\rho+\nu}$, не зависящей от ε, M_ν.

Докажем оценку (40). Для этого предположим, что при $2 \leqslant \rho + \nu \leqslant l$, $\nu = \overline{1, j}$, $j < l$, указаны такие $M_0 < M_1 < \ldots < M_j$ и такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0 (M_0, \ldots, M_j) > 0$, что справедливы неравенства (16), (32), (40) в области (10) с $\varepsilon_0 = \varepsilon_0 (M_0, \ldots, M_j) > 0$. Чтобы воспользоваться методом математической индукции для доказательства оценки (40), остается указать такое $M_{j+1} > M_j$ и такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0 (M_0, \ldots, M_{j+1}) > 0$, чтобы неравенство (40) оказалось справедливым при $\nu = j + 1$ в области (10) с $\varepsilon_0 = \varepsilon_0 (M_0, \ldots, M_{j+1}) > 0$. Имеем

$$\| [f (u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon))]^{(j+1)} \| \leqslant \Sigma \Big[\| D_h f_1 (u) \| \| [u]^{(j+1)} \| + \| D_h^\rho f_1 (u) \| \times$$

$$\times \sum_{|\alpha|=\rho} c_{\rho\nu_2} \| [u]' \|^{\alpha_1} \ldots \| [u]^{(j)} \|^{\alpha_j} \Big],$$

откуда с учетом оценки

$$\| [u]^{(\nu)} \| \leqslant \sum_{\rho+\sigma \leqslant \nu} \| D_\psi^\rho u^{(\sigma)} \| \sum_{|\alpha|=\rho} c_{\sigma\rho\alpha} \| \psi_\tau^{(1)} \|^{\alpha_1} \ldots \| \psi_\tau^{(\nu)} \|^{\alpha_\nu} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sum \frac{M_\sigma}{\varepsilon^{2\sigma-1}} \left(\frac{\bar{c}_1}{\varepsilon^2}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{M_\nu}{\varepsilon^{2\nu-1}}\right)^{\alpha_\nu} \leqslant \Big[c_1' \sum_{0 \leqslant \rho \leqslant \nu} \frac{M_{\nu-\rho}}{\varepsilon^{2(\nu-\rho)-1}} \frac{1}{\varepsilon^{2\rho}} +$$

$$+ c_1' \sum_{\alpha_1 < \rho} \frac{M_\sigma M_\nu^\rho}{\varepsilon^{2\sigma-1} \varepsilon^{2(\nu-\sigma)-(\rho-\alpha_1)}} \Big] e^{\mu\nu|\tau|} \leqslant c_2' \frac{M_\nu}{\varepsilon^{2\nu-1}} e^{\mu\nu|\tau|}, \quad \tau \in R,$$

справедливой при $\varepsilon_0 M_\nu^\nu \leqslant 1,\ 1 \leqslant \nu \leqslant j$, получаем

$$\| [f (u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon))]^{(j+1)} \| \leqslant c_1 \sum \| [u]^{(j+1)} \| + c_3 \sum_{1 \leqslant \rho \leqslant j+1} \frac{M_j^\rho e^{\mu(j+1)|\tau|}}{\varepsilon^{2(j+1)-\rho}} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon c_1 M_0 \| \psi_\tau^{(j+1)} \| + \sum_{1 \leqslant \rho+\sigma \leqslant j+1} \| D_\psi^\rho u^{(\sigma)} \| \sum_{|\alpha|=\rho} c_{\sigma\rho\alpha} \| \psi_\tau^{(1)} \|^{\alpha_1} \ldots \| \psi_\tau^{(j)} \|^{\alpha_j} +$$

$$+ c_4 \frac{M_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(j+1)|\tau|} \leqslant \varepsilon c_1 M_0 \| \psi_\tau^{(j+1)} \| + c_4' \frac{M_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(j+1)|\tau|}. \tag{41}$$

Далее для $\Psi_\tau = (\psi_\tau, u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)$ имеем оценку

$$\| [\Psi]^{(\nu)} \| \leqslant \| \psi_\tau^{(\nu)} \| + \| [u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon)]^{(\nu)} \| + \| \varepsilon^{(\nu)} \| \leqslant c_1 \frac{M_\nu}{\varepsilon^{2\nu-1}} e^{\mu\nu|\tau|}$$

при $2 \leqslant \nu \leqslant j$ а для $[\Psi_\tau]^{(j+1)}$ — оценку

$$\| [\Psi_\tau]^{(j+1)} \| \leqslant (1 + \varepsilon c_1 M_0) \| \psi_\tau^{(j+1)} \| + c_4' \frac{M_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(j+1)|\tau|}.$$

Поэтому для функции $F(\psi_\tau, u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon) = F(\Psi_\tau)$ верна оценка

$$\| [F(\Psi_\tau)]^{(j+1)} \| \leqslant c_1 (1 + \varepsilon c_1 M_0) \| \psi_\tau^{(j+1)} + c_4'' \frac{M_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(j+1)|\tau|} +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant \rho \leqslant j+1} \| D_\Psi^\rho F(\Psi_\tau) \| \sum_{|\alpha|=\rho} c_{\rho\alpha} \| [\Psi_\tau]^{(1)} \|^{\alpha_1} \ldots \| [\Psi_\tau]^{(j)} \|^{\alpha_j} \leqslant 2c_1 \| \psi_\tau^{(j+1)} \| +$$

$$+ c_5 \frac{M_{j+1} e^{\mu(j+1)|\tau|}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} + c_\rho \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant \rho} \frac{M_1^{\alpha_1} \ldots M_j^{\alpha_j} e^{\mu(j+1)|\tau|}}{\varepsilon^{2(j+1)-(\alpha_1+\ldots+\alpha_j)}} \leqslant 2c_1 \| \psi_\tau^{(j+1)} \| +$$

$$+ c_\rho' \frac{M_{j+1} e^{\mu(j+1)|\tau|}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} + \frac{c_5}{\varepsilon^{2(j+1)}} e^{\mu(j+1)|\tau|}, \quad \tau \in R, \tag{42}$$

лишь только $M_j^{\alpha_j+1} \leqslant M_{j+1}$. Объединяя неравенства (41), (42), находим

$$\| [f_1(u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon)) + \varepsilon F_1(\psi_\tau, u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)]^{(j+1)} \| \leqslant \varepsilon c_2 M_0 \| \psi_\tau^{(j+1)} \| +$$

$$+ c_{j+1} \frac{M_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(j+1)|\tau|} \leqslant \mu \| \psi_\tau^{(j+1)} \| + c_{j+1} \frac{M_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(j+1)|\tau|}, \quad \tau \in R. \tag{43}$$

Неравенство (43) дает возможность получить оценку функции $\psi_\tau^{(j+1)}$ вида

$$\| \psi_\tau^{(j+1)} \| \leqslant \left| \int_0^\tau \left[\mu \| \psi_\tau^{(j+1)} \| + \frac{c_{j+1} M_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(j+1)|\tau|} \right] d\tau \right|,$$

следовательно, для $\psi_\tau^{(j+1)}$ верно неравенство (40)

$$\| \psi_\tau^{(j+1)} \| \leqslant \frac{c_{j+1} M_{j+1}}{\mu(j+1)\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(j+1)|\tau|} \leqslant \frac{\bar{c}_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(j+1)|\tau|}, \quad \tau \in R.$$

Дифференцирование функции $[f_1[u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon))]^{(j+1)}$ по ψ, Δ не ухудшает характер ее оценок, так как

$$\| D^\rho [f_1(u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon))]^{(j+1)} \| \leqslant \sum \| D^\rho [D_h f_1(u(\Phi_\tau))(u(\Phi_\tau))^{(j+1)}] \| +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant p \leqslant j+1} \| D^\rho [D_h^\rho f_1(u(\Phi_\tau)) \sum c_{p\alpha}([u]^{(1)})^{\alpha_1} \ldots ([u]^{(j)})^{\alpha_j}] \| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sum_{\nu=0}^{p} \| D^\nu (u(\Phi_\tau))^{(j+1)} \| e^{(\rho-\nu)\mu|\tau|} + c_1 \sum_{\nu=0}^{\rho} \sum_{1 \leqslant |\alpha| = p \leqslant j+1}$$

$$\| D^\nu [([u]^{(1)})^{\alpha_1} \ldots ([u]^{(j)})^{\alpha_j}] \| e^{\mu(\rho-\nu)|\tau|} \leqslant \varepsilon c_1' M_0 \| D^\rho \psi_\tau^{(j+1)} \| +$$

$$+ \frac{c_1' M_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(\rho+j+1)|\tau|}, \quad \tau \in R. \tag{44}$$

Аналогично дифференцирование функции $[\varepsilon F_1(\Psi_\tau)]^{(j+1)}$ по ψ, Δ не ухудшает характер ее оценок. Действительно, поскольку

$$\| D^\rho [\Psi_\tau]^{(j+1)} \| \leqslant \| D^\rho \psi_\tau^{(j+1)} \| + \| D^\rho [u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon)]^{(j+)} \| \leqslant (1 + \varepsilon c_1 M_0) \times$$

$$\times \| D^\rho \psi_\tau^{(j+1)} \| + c_2' \frac{M_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(\rho+j+1)|\tau|}, \quad \tau \in R,$$

то оценка $D^\rho [F_1(\Psi_\tau)]^{(j+1)}$ имеет вид оценки (42)

$$\| D^\rho [F_1(\Psi_\tau)]^{(j+1)} \| \leqslant c_2' \| D^\rho \psi_\tau^{(j+1)} \| + c_5'' \frac{M_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(\rho+j+1)|\tau|} +$$

$$+ \frac{c_5'}{\varepsilon^{2(j+1)}} e^{\mu(\rho+j+1)|\tau|}, \quad \tau \in R,$$

следовательно,

$$\| D^\rho [\varepsilon F_1(\Psi_\tau)]^{(j+1)} \| \leqslant \varepsilon c_2' \| D^\rho \psi_\tau^{(j+1)} \| + c_3 \frac{M_j}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(\rho+j+1)|\tau|}, \tag{45}$$

лишь только $\varepsilon_0 M_{j+1} < M_j$.

Объединяя неравенства (44), (45), находим

$$\| D^\rho [f_1(u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon)) + \varepsilon F_1(\psi_\tau, u(\varphi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)]^{(j+1)} \| \leqslant \varepsilon c_3 M_0 \| D^\rho \psi_\tau^{(j+1)} \| +$$

$$+ c_{\rho+j+1} \frac{M_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(\rho+j+1)|\tau|} \leqslant \mu \| D^\rho \psi_\tau^{(j+1)} \| + c_{\rho+j+1} \times$$

$$\times \frac{M_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(\rho+j+1)|\tau|}. \tag{46}$$

Из неравенства (46) следует

$$\| D^\rho \psi_\tau^{(j+1)} \| \leqslant \left| \int_0^\tau \left[\mu \| D^\rho \psi_\tau^{(j+1)} \| + c_{\rho+j+1} \frac{M_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(\rho+j+1)|\tau|} \right] d\tau \right|,$$

откуда вытекает справедливость оценки (40) для $\nu = j + 1$:

$$\| D^\rho \psi_\tau^{(j+1)} \| \leqslant \frac{c_{\rho+j+1} M_{j+1}}{\mu(\rho + j + 1)\, \varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(\rho+j+1)|\tau|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bar{c}_{\rho+j+1} M_{j+1}}{\varepsilon^{2(j+1)-1}} e^{\mu(\rho+j+1)|\tau|}.$$

Этим неравенство (40) доказано.

Докажем неравенство (11) леммы для $2 \leqslant \rho + \nu \leqslant l$, $\nu \geqslant 2$. Так как

$$\| [D^\rho f_2(u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon))]^{(\nu)} \| \leqslant \sum \| D^\rho [D_h f_2(u(\Phi_\tau))(u(\Phi_\tau))^{(\nu)}] \| +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant \rho \leqslant \nu} \| D^\rho [D_h^\rho f_2(u(\Phi_\tau)) \sum_{|\alpha|=p} c_{p2} ([u]^{(1)})^{\alpha_1} \ldots ([u]^{(\nu-1)})^{\alpha_{\nu-1}}] \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum \| D_h f_2(u) \| \| [D^\rho u(\Phi_\tau)]^{(\nu)} \| + \varepsilon c_1 M_0 \sum_{1 \leqslant j \leqslant \rho} \| [D^{\rho-j} u(\Phi_\tau)]^{(\nu)} \| \times$$

$$\times e^{\mu j|\tau|} + c_1 \sum_{j \leqslant \rho} \| D^j [([u]^{(1)})^{\alpha_1} \ldots ([u]^{(\nu-1)})^{\alpha_{\nu-1}}] \| e^{\mu(\rho-j)|\tau|} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\varepsilon c_2 \mathscr{L} M_0 \frac{M_\nu}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \varepsilon c_2 M_0 \frac{M_\nu}{\varepsilon^{2\nu-1}} + c_2 \frac{M_{\nu-1}^\nu}{\varepsilon^{2\nu-1}} \right) e^{\mu(\rho+\nu)|\tau|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_3 M_{\nu-1}^\nu}{\varepsilon^{2\nu-1}} e^{\mu(\rho+\nu)|\tau|},$$

лишь только $\varepsilon_0 c_2 M_0 M_\nu (\mathscr{L}+1) \leqslant M_{\nu-1}^{\nu}$, а функция $[D^\rho \varepsilon F_2(\psi_\tau, u(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)]^{(\nu)}$ удовлетворяет оценке (45) при $j+1=\nu$ и $F_1 = F_2$, следовательно, $[D^\rho \varepsilon F_2(\Psi_\tau)]^{(\nu)} \leqslant c_3 \frac{M_{\nu-1}^{\nu}}{\varepsilon^{2\nu-1}} e^{\mu(\rho+\nu)|\tau|}$, лишь только $\varepsilon_0 M_\nu \leqslant M_{\nu-1}$, то для $D^\rho v^{(\nu)}(\psi, \Delta, \varepsilon)$ имеем оценку (13)

$$\| D^\rho v^{(\nu)}(\psi, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\gamma-\mu s)|\tau|} d\tau \right| \frac{2c_3 M_{\nu-1}^{\nu}}{\varepsilon^{2\nu-1}} \leqslant \frac{8Kc_3 M_{\nu-1}^{\nu}}{\gamma \varepsilon^{2\nu-1}} \leqslant \frac{M_\nu}{\varepsilon^{2\nu-1}},$$

лишь только $8Kc_3 M_{\nu-1}^{\nu}/\gamma \leqslant M_\nu$. Следовательно, всегда можно выбрать постоянные $M_0 < M_1 < \ldots < M_l$ и постоянную $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_0, \ldots, M_l) > 0$ так, чтобы функция $v(\psi, \Delta, \varepsilon)$ удовлетворяла неравенству (13) в области (10) с выбранным значением ε_0. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть правая часть системы уравнений* (1) *удовлетворяет приведенным выше условиям и* $l \geqslant 2$. *Тогда можно указать такие постоянные* $M_0, \ldots, M_l$ *и* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_0, \ldots, M_l) > 0$, *что функция* $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$, *определяющая инвариантный тор* (4) *системы* (1), l *раз непрерывно дифференцируема по* ψ, Δ, ε *в области* (10) *с* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_0, \ldots, M_l) > 0$ *и удовлетворяет там неравенству*

$$\| D^\rho u^{(\nu)}(\psi, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant M_\nu / \varepsilon^{2\nu-1}, \quad \rho+\nu \leqslant l, \quad \nu = \overline{0, l}. \tag{47}$$

Доказательство. Рассмотрим итерации (9). Зафиксируем постоянные $M_0, \ldots, M_l$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_0, \ldots, M_l)$ из условий выполнения неравенства (13) леммы. При таком выборе постоянных $M_0, \ldots, M_l$ и ε_0 функция $u_1(\psi, \Delta, \varepsilon)$, определяемая формулой (9) при $j=1$, определена в области (10) с $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_0, \ldots, M_l)$ и удовлетворяет неравенству вида (47):

$$\| D^\rho u_1^{(\nu)}(\psi, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant M_\nu / \varepsilon^{2\nu-1}, \quad \rho+\nu \leqslant l, \quad \nu = \overline{0, l}. \tag{48}$$

По функции $u_1(\psi, \Delta, \varepsilon)$ формула (9) при $j=2$ определяет функцию $u_2(\psi, \Delta, \varepsilon)$, удовлетворяющую в области (10) неравенству вида (48) и т. д. Таким образом, формула (9) определяет последовательность итераций

$$u_1(\psi, \Delta, \varepsilon), \ldots, u_j(\psi, \Delta, \varepsilon), \ldots, \tag{49}$$

каждая из которых определена в области (10) с $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_0, \ldots, M_l)$ и удовлетворяет неравенству

$$\| D^\rho u_j^{(\nu)}(\psi, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant M^\nu / \varepsilon^{2\nu-1}, \quad 0 \leqslant \rho+\nu \leqslant l, \quad \nu = \overline{0, l}. \tag{50}$$

Докажем сходимость последовательности (49). Поскольку $l \geqslant 2$, то функция $u_{j+1}(\psi, \Delta, \varepsilon) - u_j(\psi, \Delta, \varepsilon) = w_{j+1}(\psi, \Delta, \varepsilon)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \psi}\left[\frac{\omega}{\varepsilon} + \Delta + f_1(u_j(\psi, \Delta, \varepsilon)) + \varepsilon F_1(\psi, u_j(\psi, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)\right] =$$
$$= Hw + A_j(\psi, \Delta, \varepsilon),$$

где

$$A_j(\psi, \Delta, \varepsilon) = -\frac{\partial u_j}{\partial \psi}\{[f_1(u_j) - f_1(u_{j-1})] + \varepsilon[F_1(\psi, u_j, \Delta, \varepsilon) - F_1(\psi, u_{j-1}, \Delta, \varepsilon)]\} +$$
$$+ \{[f_2(u_j) - f_2(u_{j-1})] + \varepsilon[F_2(\psi, u_j, \Delta, \varepsilon) - F_2(\psi, u_{j-1}, \Delta, \varepsilon)]\}.$$

Но тогда функция $w_{j+1}(\psi, \Delta, \varepsilon)$ определяется соотношением $w_{j+1}(\psi, \Delta, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau) A_j(\psi_\tau, \Delta, \varepsilon) d\tau$, в котором $\psi_\tau = \psi_\tau(\psi, \Delta, \varepsilon)$ — решение системы уравнений (12) при $u = u_j(\psi, \Delta, \varepsilon)$. Так как, согласно оценке (50), взятой при $\nu=0$, $\rho=0$ и $\rho=1$, функция $A_j(\psi, \Delta, \varepsilon)$ удовлетворяет неравенству $\| A_j(\psi, \Delta, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon M_0(1+\varepsilon K)\|w_j\| + \varepsilon(2\mathscr{L}M_0+K)\|w_j\| \leqslant \varepsilon[M_0(1+\varepsilon K)+2\mathscr{L}M_0+K]\|w_j(\psi, \Delta, \varepsilon)\|$, где K — постоянная Липшица по h функций $f_1(h)$, $F_1(\psi, h, \Delta, \varepsilon)$, $F_2(\psi, h, \Delta, \varepsilon)$, то для $w_j(\psi, \Delta, \varepsilon)$ имеем оценку

$$\| w_{j+1}(\psi, \Delta, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon \frac{2K}{\gamma}[M_0(1+\varepsilon K)+2\mathscr{L}M_0+K] \max_{\psi} \| w_j(\psi, \Delta, \varepsilon)\|.$$

Выбирая $\varepsilon_0>0$ так, чтобы $\varepsilon_0 \frac{2K}{\gamma}[M_0(1+\varepsilon_0 K)+2\mathscr{L}M_0+K] \leqslant \frac{1}{2}$, получаем для $w_{j+1}(\psi, \Delta, \varepsilon)$ оценку

$$\max_{\psi} \| w_{j+1}(\psi, \Delta, \varepsilon)\| \leqslant \frac{1}{2} \max_{\psi} \| w_j(\psi, \Delta, \varepsilon)\| \tag{51}$$

при всех Δ, ε из области (10) с выбранным значением ε_0. Неравенство (51) доказывает равномерную по ψ, Δ, ε сходимость последовательности (49) при $j\to\infty$ для ψ, Δ, ε из области (10). Положим

$$\lim_{j\to\infty} u_j(\psi, \Delta, \varepsilon) = u(\psi, \Delta, \varepsilon). \tag{52}$$

Из равномерности сходимости в соотношении (52) следует непрерывность функции $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$ по ψ, Δ, ε в области (10). Из неравенства (50), взятого при $\nu=0$, следует равномерная ограниченность последовательности функций $D^\rho u_j(\psi, \Delta, \varepsilon)$ при $\rho=\overline{1, l}$ для ψ, Δ, ε из области (10). По теореме о компактности в пространстве непрерывных функций этого достаточно, чтобы предельная функция последовательности (49) имела по ψ, Δ производные до порядка $l-1$, удовлетворяющие условию Липшица при ψ, Δ, ε из области (10). Предельный переход в неравенстве (50) при $\nu=0$ ведет для этих производных и их постоянных Липшица K_{l-1} к оценкам $\| D^\rho u(\psi, \Delta, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon M_0$, $K_{l-1} \leqslant \varepsilon M_0$, $\rho=\overline{0, l-1}$, которые объединим в одной записи $\| D^\rho u(\psi, \Delta, \varepsilon)\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \varepsilon M_0$, $\rho=\overline{0, l-1}$.

При $\nu\neq 0$ неравенство (50) ведет к равномерной ограниченности последовательности функций $D^\rho u_j^{(\nu)}(\psi, \Delta, \varepsilon)$ в области

$$\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \quad \|\Delta\| \leqslant \sigma_0, \quad \psi \in \mathscr{T}_m \tag{53}$$

для произвольного $0<\varepsilon_1<\varepsilon_0$. Этого достаточно, чтобы предельная функция последовательности (49) имела по ψ, Δ, ε в области (53) производные до порядка $l-1$, удовлетворяющие условию Липшица. Переходя к пределу в неравенстве (50), получаем оценку

$$\| D^\rho u^{(\nu)}(\psi, \Delta, \varepsilon)\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant M_\nu/\varepsilon^{2\nu-1}, \quad \rho+\nu \leqslant l-1, \tag{54}$$

для всех ψ, Δ, ε из области (53). Этого достаточно в силу произвольности числа $\varepsilon_1>0$ для справедливости оценки (54) для всех ψ, Δ, ε из области (10).

Так как функция $u_j(\psi, \Delta, \varepsilon)$ удовлетворяет тождеству

$$\frac{\partial u_j(\psi, \Delta, \varepsilon)}{\partial \psi}[\omega+\varepsilon\Delta+\varepsilon f_1(u_{j-1}(\psi, \Delta, \varepsilon))+\varepsilon^2 F_1(\psi, u_{j-1}(\psi, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)] =$$

$$= \varepsilon H u_j(\psi, \Delta, \varepsilon) + \varepsilon f_2(u_{j-1}(\psi, \Delta, \varepsilon)) + \varepsilon^2 F_2(\psi, u_{j-1}(\psi, \Delta, \varepsilon), \Delta, \varepsilon)$$

для всех ψ, Δ, ε из области (10), то, переходя к пределу при $j\to\infty$ в этом тождестве, получаем, что множество $h=u(\psi, \Delta, \varepsilon)$, $\psi\in\mathscr{T}_m$, определяет инвариантный тор системы уравнений (1). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема справедлива с тем изменением, что тор (4) l раз непрерывно дифференцируем лишь по ψ, Δ для ψ, Δ, ε из области (10) и выполняется неравенство (47) лишь для $\nu=0$ всякий раз, когда условие дифференцируемости правой части системы уравнений (1) по всем переменным ψ, h, Δ, ε заменить условием существования производных по

ψ, h, Δ до порядка l для всех ψ, h, Δ, ε из области

$$\psi \in \mathscr{T}_m, \quad \|h\| \leqslant \delta, \quad \|\Delta\| \leqslant \sigma_0, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{55}$$

таких, что

$$\| D^\rho F_i(\psi, h, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant M, \quad \rho = \overline{0, l}, \quad i = 1, 2, \tag{56}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от ε, D^ρ — любая производная порядка ρ по переменным ψ, h, Δ.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 244 с.
2. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— **34**, № 6.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Асимптотическое исследование слабо нелинейных систем.— Киев, 1976.— 54 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; № 76.5).
4. *Moser J.* A rapidly convergent iteration method and non-linear differential equations // Ann. Scnola Norm. Sup. Pisa.— 1966.— **20**, N 3.— P. 499—536.
5. *Боголюбов Н. Н.* О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики // Тр. Первой летней мат. школы.— Киев : Наук. думка, 1964.— **1**.— С. 11—101.
6. *Самойленко А. М.* Об асимптотических разложениях решений систем нелинейной механики // IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям.— Киев : Наук. думка, 1984.— **1**.— С. 323—333.

Киев. ун-т Получено 10.03.86