УДК 512.546

И. В. Протасов

Компакты в пространстве подгрупп топологической группы

Пусть G — топологическая группа, $\mathfrak{L}(G)$ — пространство всех ее замкнутых подгрупп, снабженное E-топологией. Открытую предбазу этой топологии образуют множества $D_1(U) = \{X \in \mathfrak{L}(G): X \subseteq U\}$, $D_2(V) = \{X \in \mathfrak{L}(G): X \cap V \neq \varnothing\}$, где U, V пробегают все открытые подмножества из G. Строение топологических групп G, для которых пространство $\mathfrak{L}(G)$ или некоторые его подпространства удовлетворяют различным условиям компактности, изучалось в работах [1—7]. В то же время топологическое строение самого пространства $\mathfrak{L}(G)$ или его подпространств, в частности компактов, практически не исследовано. Например, неизвестна характеризация компактов гомеоморфных $\mathfrak{L}(G)$ для подходящей топологической группы G (проблема А. В. Архангельского).

В данной работе, результаты которой анонсированы в [8], для произвольной локально компактной группы G получен критерий компактности подпространства из $\mathfrak{L}(G)$. Изучается строение компактов в подпространствах $\mathfrak{R}(G)$ и $n\mathfrak{R}(G)$ соответственно компактных и некомпактных подгрупп из $\mathfrak{L}(G)$, а также вопрос об определяемости топологии пространства $\mathfrak{L}(G)$ семейством всех его компактов. Все рассматриваемые группы предполагаются локально компактными, а подгруппами называются лишь замкнутые подгруппы.

Лемма 1. *Если $\mathfrak{F}$ — замкнутое счетно-компактное подпространство из $\mathfrak{R}(G)$, то подпространство $K = \bigcup_{F \in \mathfrak{F}} F$ компактно в G.*

Доказательство. Покажем вначале, что $\overline{K}$ компактно. Допустим противное. Тогда найдутся такие компактная окрестность U единицы группы G и последовательность $\{x_n\}$ элементов из K, что $x_iU \cap x_jU = \varnothing$ при $i \neq j$. Для каждого натурального n выберем подгруппу $F_n \in \mathfrak{F}$ так, чтобы $x_n \in F_n$. Ввиду счетной компактности $\mathfrak{F}$ последовательность подгрупп $\{F_n\}$ имеет предельную точку P. Поскольку $\mathfrak{F}$ замкнуто, $P \in \mathfrak{F}$, следовательно, P — компактная подгруппа. По построению подпространство X, состоящее из элементов последовательности $\{x_n\}$, дискретно и замкнуто в G. Значит, $X \cap PU$ конечно. Поэтому найдется такое натуральное m, что $x_n \notin PU$ для всех $n > m$. Но тогда окрестность $D_1(PU)$ подгруппы P не содержит ни одной подгруппы F_n при $n > m$. Получено противоречие с тем, что P — предельная точка последовательности $\{F_n\}$. Осталось убедиться в замкнутости K. Пусть $x \in \overline{K}$ и направленность $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in J$, элементов из K сходится к x. Для каждого $\alpha \in J$ выберем подгруппу $F_\alpha \in \mathfrak{F}$ так, чтобы $x_\alpha \in F_\alpha$. Так как $\overline{K}$ компактно, по теореме Вьеториса [9, с. 52] из направленности $\{F_\alpha\}$, $\alpha \in J$, можно выделить поднаправленность $\{F_\beta\}$, $\beta \in I$, сходящуюся к некоторой подгруппе S. Ввиду замкнутости $\mathfrak{F}$ $S \in \mathfrak{F}$ и, следовательно, $S \subseteq K$. Из определения E-топологии и построения направленности $\{F_\beta\}$, $\beta \in I$, вытекает, что $x \in S$. Значит, $x \in K$ и лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}(G)$, $H \in \mathfrak{F} \cap n\mathfrak{K}(G)$. Если H имеет счетно-компактную окрестность в $\mathfrak{F}$ либо характер H в $\mathfrak{F}$ счетен, то $D_1(H) \cap \cap \mathfrak{F}$ — окрестность подгруппы H в $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — счетно-компактная окрестность подгруппы H в $\mathfrak{F}$. Допустим, что заключение леммы неверно. Тогда $H \in \overline{\mathfrak{F}}_1$, где $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{A} \setminus D_1(H)$. По лемме 2 из [3] $\mathfrak{F}_1$ содержит бесконечное дискретное подпространство, замкнутое в $\mathfrak{L}(G)$, что противоречит счетной компактности $\mathfrak{F}$.

Пусть характер H в $\mathfrak{F}$ счетен и $\{\mathfrak{A}_n\}$ — база окрестностей H в $\mathfrak{F}$. Предположим, что заключение леммы не верно, и из каждой окрестности $\mathfrak{A}_n$ выберем такую подгруппу A_n, что $A_n \not\subseteq H$. Тогда последовательность $\{A_n\}$ сходится к H. Следовательно, подпространство $\mathfrak{F}_2$, элементами которого являются подгруппы A_n, не содержит бесконечных дискретных подмножеств, замкнутых в $\mathfrak{L}(G)$. Поскольку $H \in \overline{\mathfrak{F}}_2$, применение леммы 2 из [3] дает противоречие.

Теорема 1. *Подпространство $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{L}(G)$ компактно в том и только в том случае, если выполняются следующие условия:*

1) *$\mathfrak{F}$ замкнуто;*

2) *$\mathfrak{F}$ не содержит бесконечных убывающих цепей некомпактных подгрупп;*

3) *любое замкнутое подпространство $\mathfrak{F}'$ из $\mathfrak{F}$ содержит лишь конечное число максимальных в $\mathfrak{F}'$ некомпактных подгрупп;*

4) *если замкнутое подпространство $\mathfrak{F}'$ из $\mathfrak{F}$ не содержит некомпактных подгрупп, то $\bigcup_{F \in \mathfrak{F}'} F$ компактно в G.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — компактное подпространство из $\mathfrak{L}(G)$. Условие 1 очевидно. Допустим, что условие 2 нарушается и $\mathfrak{F}$ содержит бесконечную цепь $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ некомпактных подгрупп. Ввиду компактности $\mathfrak{F}$ последовательность $\{F_n\}$ имеет предельную точку F. Из определения E-топологии вытекает, что $F \subseteq F_n$ для любого n, а это противоречит лемме 2. Предположим, что условие 3 не выполняется и подмножество $\mathfrak{F}_1'$ максимальных в $\mathfrak{F}'$ некомпактных подгрупп бесконечно. В силу компактности $\mathfrak{F}'$ подмножество $\mathfrak{F}_1'$ имеет предельную точку $H \in \mathfrak{F}'$. По лемме 2 существует окрестность $\mathfrak{A}$ подгруппы H в $\mathfrak{F}'$, состоящая из подгрупп, содержащихся в H. Выберем две различные подгруппы F_1 и F_2 из $\mathfrak{A}$. Тогда $F_1 \subseteq H$, $F_2 \subseteq H$. Так как $H \in \mathfrak{F}'$, из максимальности подгрупп F_1, F_2 в $\mathfrak{F}'$ следует $F_1 = F_2$. Получили противоречие с выбором подгрупп F_1, F_2. Наконец, условие 4 вытекает из леммы 1.

Достаточность. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}(G)$, то компактность $\mathfrak{F}$ непосредственно вытекает из условий 1, 4 и теоремы Вьеториса. Допустим, что $\mathfrak{F}$ содержит некомпактные подгруппы и положим $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}$. Из условия 1 и леммы 3 [1] следует, что любая некомпактная подгруппа из $\mathfrak{F}_0$ содержится в максимальной подгруппе из $\mathfrak{F}_0$. По условию 3 число таких подгрупп конечно. Пусть $F_1, \ldots, F_n$ — максимальные в $\mathfrak{F}_0$ некомпактные подгруппы. Рассмотрим произвольное покрытие $\mathfrak{F}_0$ открытыми множествами и выделим из них такие множества $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, что $F_1 \in \mathfrak{A}_1, \ldots, F_n \in \mathfrak{A}_n$. Положим $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_0 \setminus (\mathfrak{A}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{A}_n)$. Если $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{K}(G)$, то по доказанному $\mathfrak{F}_1$ компактно, а значит, компактно и $\mathfrak{F}_0$. Иначе, рассуждая аналогично, строим $\mathfrak{F}_2$ и т. д. Покажем, что для некоторого натурального m $\mathfrak{F}_m \subseteq \mathfrak{K}(G)$ и, следовательно, $\mathfrak{F}_0$ компактно. Допустим противное. Тогда множество $\mathfrak{N}_m$ максимальных в $\mathfrak{F}_m$ некомпактных подгрупп непусто и по условию 3 конечно для любого натурального m. Заметим, что для любой подгруппы K_m из $\mathfrak{N}_m$ найдется цепочка подгрупп $K_m \subset K_{m-1} \subset \ldots \subset K_0$, где $K_i \in \mathfrak{N}_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Поэтому некоторая подгруппа $N_0 \in \mathfrak{N}_0$ является концом бесконечного числа таких цепей. Среди подгрупп из $\mathfrak{N}_1$, содержащихся в N_0, найдется подгруппа N_1, через которую проходит бесконечное число цепей. Продолжив эти рассуждения, построим бесконечную убывающую цепь подгрупп $N_0 \supset N_1 \supset \dots$, что противоречит условию 2. Теорема доказана.

Следствие 1. *Подпространство $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{L}(G)$ компактно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ замкнуто и счетно-компактно.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Пользуясь теоремой 1, покажем достаточность. Условие 1 очевидно. Условие 2 вытекает из леммы 2, а условие 4 — из леммы 1. Допустим, что условие 3 нарушается и $\mathfrak{F}_1'$ — бесконечное подмножество максимальных в $\mathfrak{F}'$ некомпактных подгрупп. В силу счетной компактности подмножество $\mathfrak{F}_1'$ имеет предельную точку H. Ввиду замкнутости $\mathfrak{F}'$ $H \in \mathfrak{F}'$. По лемме 2 $\mathfrak{F}' \cap D_1(H)$ — окрестность подгруппы H в $\mathfrak{F}'$. Значит, найдутся такие подгруппы F_1, $F_2 \in \mathfrak{F}_1'$, что $F_1 \neq F_2$, $F_1 \subseteq H$, $F_2 \subseteq H$. Из максимальности подгрупп F_1, F_2 в $\mathfrak{F}'$ следует, что $F_1 = F_2$, т. е. получено противоречие.

Следствие 2. *Если $\mathfrak{F}$ — компактное подпространство из $n\mathfrak{R}(G)$, то $|\mathfrak{F}| \leqslant \omega(G)$, где $\omega(G)$ — вес группы G.*

Доказательство. Допустим противное и положим $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. В силу компактности $\mathfrak{F}_1$ найдется подгруппа $F_1 \in \mathfrak{F}_1$, любая окрестность которой имеет мощность, большую $\omega(G)$. По лемме 2 $\mathfrak{F}_1 \cap D_1(F_1)$ — окрестность подгруппы F_1 в $\mathfrak{F}_1$. Значит, $|\mathfrak{F}_1 \cap D_1(F_1)| > \omega(G)$. Пусть $\{U_\alpha, \alpha \in I\}$ — база топологии подгруппы F_1 и $|I| \leqslant \omega(G)$. Положим $\mathfrak{A}_\alpha = \{H \in \mathfrak{F}_1 \cap D_1(F_1) : H \cup U_\alpha = \varnothing\}$. Ясно, что $\mathfrak{F}_1 \cap D_1(F_1) = \left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} \mathfrak{A}_\alpha\right) \cup \{F_1\}$. Поскольку $|\mathfrak{F}_1 \cap D_1(F_1)| > \omega(G)$, найдется такое $\beta \in I$, что $|\mathfrak{A}_\beta| > \omega(G)$. Так как $\mathfrak{A}_\beta$ замкнуто в $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}_\beta$ компактно. Положим $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{A}_\beta$ и выберем подгруппу F_2, любая окрестность которой в $\mathfrak{F}_2$ имеет мощность, большую $\omega(G)$. Продолжая эти рассуждения, построим убывающую цепочку подгрупп $F_1 \supset F_2 \supset \dots$, что противоречит теореме 1.

Топологическое пространство называется разреженным (в смысле Кантора), если любое его непустое подпространство содержит точку, изолированную в этом подпространстве.

Следствие 3. *Любой компакт $\mathfrak{F}$ из $n\mathfrak{R}(G)$ разрежен.*

Доказательство. По теореме 1 $\mathfrak{F}$ не содержит бесконечных убывающих цепей подгрупп. Значит, любое непустое подпространство $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ содержит подгруппу F_1, минимальную в $\mathfrak{F}_1$. По лемме 2 F_1 — изолированная точка подпространства $\mathfrak{F}_1$.

Разреженные компакты обладают многими замечательными свойствами, хотя задача их классификации не решена (см. [10]). В связи со следствием 3 возникает такой вопрос: можно ли любой разреженный компакт гомеоморфно вложить в подпространство $n\mathfrak{R}(G)$ для подходящей группы G? Пространства ординалов допускают такую реализацию. Более того, в $n\mathfrak{R}(G)$ можно вложить любой компакт из экспоненты Вьеториса $\exp X$ дискретного пространства X. Однако неизвестно, можно ли всякий разреженный компакт реализовать в $\exp X$.

Интересно отметить, что при подходящем выборе группы G в пространстве $\mathfrak{L}(G)$ можно реализовать любой заданный компакт. Это вытекает из теоремы Тихонова и того, что пространство $\mathfrak{L}(G)$ группы $G = T \rtimes C_2$ содержит отрезок (T — одномерный тор, C_2 — циклическая группа порядка 2, $\rtimes$ — знак топологического полупрямого произведения).

Приведенные результаты свидетельствуют о существенном различии между топологическими свойствами подпространств $\mathfrak{R}(G)$ и $n\mathfrak{R}(G)$. Укажем еще несколько примеров. $\mathfrak{R}(G)$ локально компактно для любой группы G [9, с. 54]; $\mathfrak{R}(G)$ σ-компактно, если группа G σ-компактна [2]; $\mathfrak{R}(G)$ удовлетворяет первой аксиоме счетности, если группа G такова. Ни одно из этих утверждений не верно, вообще говоря, для подпространства $n\mathfrak{R}(G)$. Из леммы 2 работы [2] следует, что $n\mathfrak{R}(G)$ удовлетворяет первой аксиоме счетности, если G — группа счетного веса. Таким образом, для групп G счетного веса подпространства $\mathfrak{R}(G)$ и $n\mathfrak{R}(G)$ удовлетворяют первой аксиоме счетности. Однако, как показывает следующая теорема, для пространства $\mathfrak{L}(G)$ это утверждение, вообще говоря, не верно. Частным случаем теоремы 2 является ключевая лемма 3 работы [6].

Теорема 2. *Если пространство $\mathfrak{L}(G)$ нульмерной группы G локально счетно-компактно либо удовлетворяет первой аксиоме счетности, то любая некомпактная индуктивно компактная подгруппа из G открыта.*

Доказательство. Пусть H — индуктивно компактная подгруппа из $n\mathfrak{K}(G)$. По лемме 2 $D_1(H)$— окрестность H в $\mathfrak{L}(G)$. В силу индуктивной компактности H принадлежит замыканию в E-топологии множеств своих компактных подгрупп. Значит, $D_1(H)$ — окрестность некоторой компактной подгруппы K. По определению E-топологии найдутся такие открытые в G подмножества $U, V_1, \ldots, V_n$, что $K \subseteq U$, $K \cap V_1 \neq \varnothing, \ldots, K \cap V_n \neq \varnothing$ и окрестность $\mathfrak{A} = D_1(U) \cap D_2(V_1) \cap \ldots \cap D_2(V_n)$ подгруппы K содержится в $D_1(H)$.

Пусть W — открытая компактная подгруппа из G и $KW \subseteq U$. Выберем подгруппу W_1 так, чтобы $x^{-1}W_1x \subseteq W$ для любого $x \in K$. Обозначим через W_2 наименьшую подгруппу, содержащую $\bigcup\limits_{x\in K} x^{-1}W_1x$. Тогда $P = KW_2$ — открытая подгруппа и $P \in \mathfrak{A}$. Значит, $F \subseteq H$ и H открыта. Теорема доказана.

Естественный класс топологических пространств, содержащий локально компактные пространства и пространства с первой аксиомой счетности, образуют k-пространства, т. е. пространства, топология которых определяется семейством компактов [11, с. 153]. Из отмеченного выше следует, что для группы G счетного веса $\mathfrak{K}(G)$ и $n\mathfrak{K}(G)$ — k-пространства. Будет ли в этом случае k-пространством $\mathfrak{L}(G)$? Для связных разрешимых групп Ли это так [7]. Положительный ответ для класса групп, включающего все дискретные и индуктивно пронильпотентные группы счетного веса дает теорема 3, формулировке и доказательству которой предпошлем две леммы.

Лемма 3. *Если G — группа счетного веса, то характер точки H из $\mathfrak{L}(G)$ в подпространстве $D_1(H)$ счетен.*

Доказательство вытекает из определения базы E-топологии.

Лемма 4. *Пусть $K \subseteq H$ — подгруппа группы G, причем K компактна и открыта в H. Если $\bigcup\limits_{\alpha\in I} x_\alpha K$ — разложение H на смежные классы по K, то найдется такая окрестность U единицы группы G, что $x_\alpha KU \cap x_\beta KU = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$.*

Доказательство. Пусть V — открытое подмножество из G и $V \cap H = K$. Используя компактность K, подберем такие окрестности W и U единицы группы G, что $KW \subseteq V$ и $xUU^{-1}x^{-1} \subseteq W$ для любого $x \in K$. Допустим, что $x_\alpha KU \cap x_\beta KU \neq \varnothing$. Тогда $x_\alpha k_1 u_1 = x_\beta k_2 u_2$ для некоторых $k_1, k_2 \in K$, $u_1, u_2 \in U$. Значит, $x_\beta^{-1}x_\alpha = k_2u_2u_1^{-1}k_1^{-1} = k_2k_1^{-1}(k_1u_2u_1^{-1}k_1^{-1}) \in k_2k_1^{-1}W \subseteq KW \subseteq V$. С другой стороны, $x_\beta^{-1}x_\alpha \in H$. Поскольку $V \cap H = K$, то $x_\beta^{-1}x_\alpha \in K$, т. е. $\alpha = \beta$.

Теорема 3. *Если G — группа счетного веса и множество ее индуктивно компактных подгрупп замкнуто в $\mathfrak{L}(G)$, то $\mathfrak{L}(G)$ — k-пространство.*

Доказательство. Предположим противное и выберем такое незамкнутое в $\mathfrak{L}(G)$ подмножество $\mathfrak{F}$, что пересечение $\mathfrak{F}$ с любым компактом из $\mathfrak{L}(G)$ замкнуто. Возьмем произвольную подгруппу $F \in \overline{\mathfrak{F}} \setminus \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{K}(G)$ открыто в $\mathfrak{L}(G)$ и локально компактно, то $F \in n\mathfrak{K}(G)$. Рассмотрим два случая.

1) $F \in \overline{\mathfrak{F} \cap n\mathfrak{K}(G)}$. По лемме 2 из [2] $F \in \overline{(\mathfrak{F} \cap n\mathfrak{K}(G)) \cap D_1(F)}$. Пользуясь леммой 3, выберем последовательность $\{F_n\}$ подгрупп из $\mathfrak{F} \cap n\mathfrak{K}(G) \cap D_1(F)$, сходящуюся к F. Подпространство $\mathfrak{F}'$, элементами которого являются F и члены последовательности $\{F_n\}$, компактно и $F \in \overline{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}'}$. Значит, $F \in \mathfrak{F}$, что противоречит ее выбору.

2) $F \in \overline{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{K}(G)}$. Чтобы получить противоречие, достаточно, как и выше, показать, что $F \in \overline{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{K}(G)) \cap D_1(F)}$. Предположим, что это не верно, и выберем, учитывая регулярность $\mathfrak{L}(G)$, такую окрестность $\mathfrak{A}$ подгруппы F,

что $\overline{\mathfrak{A}} \cap \overline{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{K}(G) \cap D_1(F))} = \varnothing$. Так как $F \in \overline{\mathfrak{K}(G)}$, по условию теоремы F индуктивно компактна. Представим F в виде $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n — открытые в F компактные подгруппы и $F_n \subset F_{n+1}$ для любого n. Разложим F на смежные классы по $F_1 : F = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} x_i F_1$. Пользуясь леммой 4, выберем такую окрестность U единицы группы G, что $x_i F_1 U \cap x_j F_1 U = \varnothing$ при $i \neq j$.

Построим индуктивно последовательность $\{U_n\}$ компактных окрестностей единицы группы G, так, чтобы $D_1(F_1U_1 \cup \ldots \cup F_nU_n) \cap (\mathfrak{F} \cap \overline{\mathfrak{A}}) = \varnothing$ и $U_n \subseteq U$ для любого n. Определим вначале U_1. Предположим, что для любой окрестности V единицы группы G $D_1(F_1V) \cap \mathfrak{F} \cap \overline{\mathfrak{A}} \neq \varnothing$. Из теоремы Вьеториса следует, что $D_1(F_1) \cap \overline{\mathfrak{F}} \cap \overline{\mathfrak{A}} \neq \varnothing$. Заметим, что $D_1(F_1) \subseteq \subseteq D_1(F) \cap \mathfrak{K}(G)$ и $\overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{K}(G) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $\varnothing \neq D_1(F_1) \cap \overline{\mathfrak{F}} \cap \overline{\mathfrak{A}} \subseteq \overline{\mathfrak{A}} \cap (D_1(F) \cap \cap \mathfrak{K}(G) \cap \mathfrak{F})$, что противоречит выбору окрестности $\mathfrak{A}$ и обеспечивает возможность определения U_1.

Допустим, что построены окрестности $U_1, \ldots, U_n$, однако окрестность U_{n+1} выбрать нельзя, т. е. $D_1(F_1U_1 \cup \ldots \cup F_nU_n \cup F_{n+1}U') \cap (\mathfrak{F} \cap \overline{\mathfrak{A}}) \neq \varnothing$ для любой окрестности U' единицы из G. Тогда по теореме Вьеториса найдется подгруппа $S \in D_1(F_1U_1 \cup \ldots \cup F_nU_n \cup F_{n+1}) \cap (\overline{\mathfrak{F}} \cap \overline{\mathfrak{A}})$. Так как $S \in \overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{K}(G) \subseteq \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{K}(G)$, по предположению индукции $S \not\subseteq F_1U_1 \cup \ldots \cup F_nU_n$. Пусть $x \in (F_{n+1} \setminus F_n) \cap S$, y — произвольный элемент из $(F_1U_1 \cup \ldots \cup F_nU_n) \cap S$. Тогда $y = fu$, где $f \in F_k$, $u \in U_k$, $k \leqslant n$. Далее, $x^{-1}y = (x^{-1}f)\, u \in (F_{n+1} \setminus F_n)\, U_k \subseteq \subseteq (F_{n+1} \setminus F_n)\, U$. С другой стороны, $x^{-1}y \in S \subseteq F_nU \cup (F_{n+1} \setminus F_n)$. В силу выбора окрестности U $(F_{n+1} \setminus F_n)U \cap F_nU = \varnothing$. Значит, $x^{-1}y \in F_{n+1} \setminus F_n$ и $y \in F_{n+1}$, т. е. $S \subseteq F_n$. Итак, мы доказали, что $S \in (D_1(F_{n+1}) \cap \cap \mathfrak{F} \cap \mathfrak{K}(G)) \cap \overline{\mathfrak{A}}$, что противоречит выбору окрестности $\mathfrak{A}$. На этом индуктивные построения завершены.

Рассмотрим окрестность $\mathfrak{A}' = D_1\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_iU_i\right) \cap \overline{\mathfrak{A}}$ подгруппы F. Поскольку $F \in \overline{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{K}(G)}$, найдется такая подгруппа $K \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{K}(G)$, что $K \in \mathfrak{A}'$. В частности, $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_iU_i$. В силу компактности K найдется такое натуральное m, что $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} F_iU_i$. Получено противоречие с тем, что $D_1(F_1U_1 \cup \ldots \cup F_mU_m) \cap \mathfrak{F} \cap \overline{\mathfrak{A}} = \varnothing$. Теорема доказана.

Следствие 4. *Пространство $\mathfrak{L}(G)$ группы G счетного веса является k-пространством, если выполняется одно из условий:*

1) *G содержит открытый компактный нормальный делитель*;

2) *индуктивно компактный радикал группы G содержит все компактные элементы из G.*

Доказательство. Замкнутость в $\mathfrak{L}(G)$ множества индуктивно компактных подгрупп в первом случае вытекает из леммы 1 работы [2], а во втором очевидна.

1. *Протасов И.В.* Топологические группы с компактной решеткой замкнутых полугрупп // Сиб. мат. журн.— 1979.— 20, № 2.— С. 378—385.
2. *Протасов И. В.* Топологические группы с σ-компактным пространством подгрупп // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 1.— С. 93—98.
3. *Комаров Ю. А., Протасов И. В.* Компактность в решетке подгрупп топологической группы // Там же.— 1981.— 33, № 2.— С. 184—189.
4. *Комаров Ю. А., Протасов И. В.* Компактность и дискретность в решетке инвариантных подгрупп топологической группы // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 133—140.
5. *Протасов И. В., Сарыев А.* Топологические абелевы группы с локально компактной решеткой замкнутых подгрупп / Докл. АН УССР. Сер. А.— 1980.—№ 3.— С. 29—32.

6. *Сарыев А.* Периодические топологические группы с локально компактной решеткой замкнутых подгрупп / Укр. мат. журн.— 1981.— 33, № 2.— С. 267—270.
7. *Панасюк С. П.* Метризуемость решетки замкнутых подгрупп разрешимых связных групп Ли // XVll Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл.— Минск : Ин-т математики АН БССР, 1983.— Ч. 1.— С. 141.
8. *Протасов И. В.* Критерий компактности в пространстве подгрупп топологической группы // lХ Всесоюз. симпоз. по теории групп : Тез. докл. — М.: Моск. пед. ин-т, 1984.— С. 233.
9. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т.— М.: Мир, 1969.— Т. 2.— 624 с.
10. *Чобан М. М., Додон Н. К.* Теория p-разреженных пространств.—Кишинев : Штиинца, 1979.— 100 с.
11. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях.— М.: Наука, 1974.— 424 с.

Киев. ун-т

Получено 25.02.85,
после доработки — 03.09.85