УДК 512.546

Ю. В. Цыбенко

Диадичность пространства подгрупп топологической группы

Пусть G — компактная группа, $\omega(G)$ — вес группы G, $\exp G$ и $\mathfrak{L}_E(G)$ — пространства замкнутых подмножеств и замкнутых подгрупп группы G, снабженные топологией Вьеториса. В силу известной теоремы Л. И. Ивановского и В. И. Кузьминова [1, 2], пространство группы G диадично, т. е. является непрерывным образом канторова куба D^τ. В то же время пространство $\exp(G)$ диадично тогда и только тогда, когда $\omega(G) \leqslant \aleph_1$ [3, 4]. В связи с этими результатами И. В. Протасов поставил вопрос о диадичности пространства $\mathfrak{L}_E(G)$. В настоящей работе, результаты которой анонсированы в [5], получен критерий диадичности пространства $\mathfrak{L}_E(G)$, если G — проконечная либо компактная абелева группа.

Пусть G — локально компактная группа, $\mathfrak{L}_E(G)$ — пространство ее замкнутых подгрупп, снабженное топологией Шаботи [6]. Открытую предбазу этой топологии образуют множества $D_1(G\setminus K) = \{X \in \mathfrak{L}(G) : X \subseteq G \setminus K\}$, $D_2(V) = \{X \in \mathfrak{L}(G) : X \cap V \neq \varnothing\}$, где K пробегает все компактные, а V — все открытые подмножества из G. Известно [6], что пространство $\mathfrak{L}(G)$ компактно, а если группа G компактна, то топология Шаботи совпадает с топологией Вьеториса. Отметим также, что сходимость в топологии Шаботи равносильна S-сходимости [7]. При этом направленность $\{H_\alpha\}$, $\alpha \in J$, замкнутых подгрупп из $\mathfrak{L}(G)$ S-сходится к замкнутой подгруппе H, если

1) для любого $x \in H$ и любой окрестности U элемента x найдется такое $\beta \in J$, что $H_\alpha \cap U \neq \varnothing$ для всех $\alpha > \beta$;

2) для любого $y \notin H$ найдутся окрестность V элемента y и $\gamma \in J$ такие, что $H_\alpha \cap V = \varnothing$ для всех $\alpha > \gamma$.

Введем следующие обозначения: $\mathbb{Z}$ — дискретная свободная циклическая группа, $\mathbb{Z}_p$ — аддитивная группа кольца целых p-адических чисел, $\mathbb{C}_n$ — циклическая группа порядка n, $\mathbb{C}_{p^\infty}$ — дискретная квазициклическая p-группа, T — группа вращений окружности, $\mathbb{R}$ — одномерная векторная группа, $\simeq$ — знак топологического изоморфизма, $\times$ — знак тихоновского произведения, $\pi(G)$ — множество простых чисел p, для которых G содержит нетривиальный топологический p-элемент, $\langle \overline{M} \rangle$ — подгруппа, топологически порожденная подмножеством M. Все рассматриваемые далее группы предполагаются локально компактными, а подгруппами называются лишь замкнутые подгруппы.

1. Разложение пространства $\mathfrak{L}(G)$ в проективные пределы. Пусть U — открытая подгруппа группы G. Из определения топологии Шаботи непосредственно следует, что отображение $\varphi: \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(U)$, которое действует по правилу $\varphi(H) = H \cap U$, непрерывно.

Лемма 1. *Пусть группа G есть индуктивный предел семейства своих открытых подгрупп $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in J$, причем $\beta < \alpha$ в том и только в том случае, когда $U_\beta \subset U_\alpha$. Пространство $\mathfrak{L}(G)$ гомеоморфно проективному пределу $X = \overleftarrow{\lim}\{\mathfrak{L}(U_\alpha), \pi^\alpha_\beta, \beta < \alpha, \beta, \alpha \in J\}$, где непрерывные проекции $\pi^\alpha_\beta : \mathfrak{L}(U_\alpha) \to \mathfrak{L}(U_\beta)$ действуют по правилу $\pi^\alpha_\beta(H) = H \cap U_\beta$.*

Доказательство. Для любых $\gamma < \beta < \alpha$ $\pi^\alpha_\gamma = \pi^\alpha_\beta \pi^\beta_\gamma$, поэтому компактные хаусдорфовы пространства $\mathfrak{L}(U_\alpha)$ и отображения π^α_β образуют проективную систему. Покажем, что пространство X гомеоморфно $\mathfrak{L}(G)$. Рассмотрим отображения $\varphi_\alpha : \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(U_\alpha)$, действующие по правилу $\varphi(H) = H \cap U_\alpha$. Ясно, что φ_α — непрерывное отображение «на», коммутирующее со спектральными проекциями $\varphi_\beta = \pi^\alpha_\beta \varphi_\alpha$. Поэтому существует непрерывное отображение «на» $\varphi : \mathfrak{L}(G) \to X$ [8, с. 146].

Ввиду компактности $\mathfrak{L}(G)$ достаточно показать, что φ инъективно. Пусть $H_1, H_2 \in \mathfrak{L}(G)$, $H_1 \neq H_2$. Тогда найдется такая открытая подгруппа

U_α, что $H_1 \cap U_\alpha \neq H_2 \cap U_\alpha$. Следовательно, $\varphi_\alpha(H_1) \neq \varphi_\alpha(H_2)$, поэтому $\varphi(H_1) \neq \varphi(H_2)$. Лемма доказана.

Пусть N — компактный нормальный делитель группы G. Естественный гомоморфизм $\varphi: G \to G/N$ индуцирует по лемме 3 из [9] непрерывное отображение $\Phi: \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(G/N)$.

Лемма 2. *Пусть группа G равна проективному пределу семейства своих фактор-групп $\{G/N_\alpha\}$, $\alpha \in J$, где N_α — компактный нормальный делитель, $\beta < \alpha$ в том и только в том случае, когда $N_\beta \supset N_\alpha$, φ_β^α — естественный гомоморфизм $G/N_\alpha \to G/N_\beta$. Пространство $\mathfrak{L}(G)$ гомеоморфно проективному пределу $\varprojlim \{\mathfrak{L}(G/N_\alpha), \Phi_\beta^\alpha, \beta < \alpha, \beta, \alpha \in J\}$.*

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1.

2. Изолированные точки в пространстве $\mathfrak{L}(G)$. Для абелевой группы G обозначим через G^* ее группу характеров. Как показано в [10], отображение, которое каждой подгруппе из G сопоставляет ее анулятор в G^*, является гомеоморфизмом пространств $\mathfrak{L}(G)$ и $\mathfrak{L}(G^*)$.

Теорема 1. *Пусть G — компактная абелева группа. Пространство $\mathfrak{L}(G)$ содержит изолированные точки тогда и только тогда, когда G является расширением группы $\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_n} \times K$ с помощью группы $\mathbf{T}^m$, где K — конечная группа, m — натуральное число.*

Доказательство. Необходимость. Пусть H — изолированная точка в пространстве $\mathfrak{L}(G^*)$. Тогда H конечно порождена, иначе подгруппа H — предел своих конечно порожденных подгрупп. Пусть G^* содержит подгруппу $\mathbb{Z}$ такую, что $H \cap \mathbb{Z} = e$, тогда последовательность подгрупп $H_n = H \times \mathbb{Z}^n$ S-сходится к подгруппе H при $n \to \infty$. Следовательно, если H — изолированная точка в $\mathfrak{L}(G^*)$, то фактор-группа $N = G^*/H$ периодическая. Покажем, что нижний слой N, т. е. множество элементов вида $\{g^p = e,\ g \in N,\ p \in \pi(N)\}$, конечен. Допустим противное. Пусть H_m — расширение группы H с помощью группы $\langle g_m \rangle$, где g_m — последовательность попарно различных элементов нижнего слоя группы N. Тогда последовательность H_m S-сходится к подгруппе H при $m \to \infty$.

Пусть Γ — свободная дискретная абелева группа максимального ранга, содержащаяся в H. В силу того что G^*/H периодическая, то и G^*/Γ периодическая. Так как H/Γ конечно порождена, то нижний слой фактор-группы G^*/Γ конечен. Следовательно, G^*/Γ есть произведение конечного числа своих квазициклических подгрупп $\mathbb{C}_{p_i^\infty}$ и конечной группы K.

Достаточность. Группа G^* есть расширение свободной дискретной группы Γ конечного ранга с помощью группы $P = \mathbb{C}_{p_1^\infty} \times \ldots \times \mathbb{C}_{p_n^\infty} \times K$, где K — конечная группа. Пусть $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$ — система образующих группы Γ, X — конечная совокупность элементов группы G^* таких, что при каноническом гомоморфизме $\varphi: G^* \to P$, $\varphi(X)$ содержит нижний слой группы P. Тогда окрестность $D_1(G^* \setminus X) \cap D_2(y_1) \cap \ldots \cap D_2(y_k)$ состоит лишь из одной точки.

Лемма 3. *Пусть G — дискретная абелева группа, U — ее произвольная подгруппа. Тогда отображение $\pi: \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(U)$, действующее по правилу $\pi(H) = H \cap U$, открыто.*

Доказательство. Пусть $W = D_1(G \setminus X) \cap D_2(y_1) \cap \ldots \cap D_2(y_n)$ — элемент базы пространства $\mathfrak{L}(G)$. Положим $A = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$, $B = A \cap U$. Пусть $X \cap \langle A, U \rangle = \{x_1, \ldots, x_m\}$, тогда $x_i = a_i u_i$, $i = \overline{1, m}$. Такое представление элементов x_i, вообще говоря, неоднозначно. Пусть $x_i = \bar{a}_i \bar{u}_i$ — другое представление. Тогда $a_i \bar{a}_i^{-1} = u_i \bar{u}_i^{-1} \in B$, следовательно, $u_i \in \bar{u}_i B$, $i = \overline{1, m}$. Обозначим $Z = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m\}$. Пусть $B = \langle b_1, \ldots, b_k \rangle$, $k \leqslant n$. Покажем, что окрестность $O = D_1(U \setminus Z) \cap D_2(b_1) \cap \ldots \cap D_2(b_k)$ — образ W при отображении π. Пусть $H \in W$, $F = H \cap U$, тогда $A \subseteq H$, $B \subseteq F$.

Допустим, что $F \cap Z \neq \varnothing$, тогда $a_i \bar{u}_i = x_i \in \langle A, F \rangle \subseteq H$, т. е. $H \notin W$. Итак, $F \in O$. Пусть $F \in O$, покажем, что $\langle A, F \rangle \in W$. Так как $B \subseteq F$, то $\langle A, F \rangle \cap U = F$. Допустим, что $\langle A, F \rangle \cap X \neq \varnothing$, тогда найдется элемент

$x_i \in \{x_1, \ldots, x_m\}$ такой, что $x_i = a_i f$, где $f \in \bar{u}_i B$. Следовательно, $\bar{u}_i \in F$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Теорема 2. *Пусть G — компактная абелева группа, $\omega(G) \leqslant \aleph_1$. Пространство $\mathfrak{L}(G)$ гомеоморфно $D^{\omega(G)}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L}(G)$ не содержит изолированных точек.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна.

Достаточность. В работе [9] показано, что $\mathfrak{L}(G)$ — нульмерный компакт. Если $\omega(G) = \aleph_0$, то пространство $\mathfrak{L}(G)$ метризуемо и в силу известной теоремы П. С. Александрова гомеоморфно $D^{\aleph_0}$.

Пусть $\omega(G) = \aleph_1$. Разложим пространство $\mathfrak{L}(G^*)$ в проективный предел. Так как $|G^*| = \aleph_1$, то G^* содержит подгруппу L мощности $\aleph_1$, равную прямому произведению циклических подгрупп. Положим $G_1 = e$. Пусть для всякого $\beta < \alpha$ счетная подгруппа G_β уже построена. Выберем в группе G произвольный элемент g, а в группе L подгруппу P, равную счетному прямому произведению циклических групп такую, что $P \cap G_\beta = e$ для всех $\beta < \alpha$. Положим $G_\alpha = \overline{\langle G_{\alpha-1}, P, g\rangle}$ для всякого непредельного $\alpha < \omega_1$. Для предельного α положим $G_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} G_\beta$. Таким образом, построен трансфинитный ряд $e = G_1 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset G_{\alpha+1} \subset \ldots \subset G^*$, $\alpha < \omega_1$, состоящий из счетных подгрупп группы G^* и $\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} G_\alpha = G^*$. По лемме 1 пространство $\mathfrak{L}(G) = \varprojlim \{\mathfrak{L}(G_\alpha), \pi_\beta^\alpha, \beta < \alpha < \omega_1\}$ — предел трансфинитного спектра из нульмерных компактов с открытыми по лемме 3 проекциями. Как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что отображения $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ обладают совершенными прообразами точек. Проективный предел трансфинитного спектра из нульмерных метризуемых компактов, при условии, что проекции $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ открыты и обладают совершенными прообразами точек, гомеоморфен $D^{\aleph_1}$ [3, с. 1072].

3. Группы с диадичным пространством подгрупп.

Теорема 3. *Пусть G — проконечная либо компактная абелева группа. Если $\omega(G) \leqslant \aleph_1$, то пространство $\mathfrak{L}(G)$ диадично.*

Доказательство. Если G абелева, то доказательство следует из теоремы 2. Если G проконечная, то пространство $\mathfrak{L}(G)$ есть непрерывный образ $\exp G$ ([11], теорема 1), а пространство $\exp G$ диадично ([3], теорема 5).

4. Группы с недиадичным пространством подгрупп. Доказательство следующей леммы приведено в работе [4, с. 1304—1305].

Лемма 4. *Пусть диадический компакт X равен проективному пределу $\varprojlim \{X_\alpha, \varphi_\beta^\alpha, \beta < \alpha < \omega_2\}$, $\omega(X) = \aleph_2$, $\omega(X_\alpha) \leqslant \aleph_1$ для любого $\alpha < \omega_2$, φ_α — проекция X на X_α. Тогда для любого $\beta < \omega_2$ и любой точки $x_\beta \in X_\beta$ найдутся $\alpha < \omega_2$ и точка $x_\alpha \in X_\alpha$ такие, что $\varphi_\beta^\alpha(x_\alpha) = x_\beta$ и $\varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ — диадический компакт.*

Лемма 5. *Если $G = A^{\aleph_2}$, где A конечна либо изоморфна* $\mathbf{T}$, *то пространство $\mathfrak{L}(G)$ недиадично.*

Доказательство. Предположим противное. Положим $G_1 = A^{\aleph_1}$, $G_\alpha = G_{\alpha-1} \times A$ для непредельного индекса α, $G_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} G_\beta$ для предельного α. Пусть φ_β^α — естественный гомоморфизм $G_\alpha \to G_\beta$, $\beta < \alpha < \omega_2$. Согласно лемме 2, $\mathfrak{L}(G) = \varprojlim \{\mathfrak{L}(G_\alpha), \Phi_\beta^\alpha, \beta < \alpha < \omega_2\}$. Выберем точку $H_\beta \in \mathfrak{L}(G_\beta)$, изоморфную $\mathbb{C}_p^{\aleph_1}$, где $p \in \pi(A)$. Тогда по лемме 4 найдутся индекс $\alpha > \beta$ и точка $H_\alpha \in \mathfrak{L}(G_\alpha)$ такие, что $\Phi_\beta^\alpha(H_\alpha) = H_\beta$ и $\Phi_\alpha^{-1}(H_\alpha)$ диадично. Следовательно, подпространство $(\Phi_\alpha^{\alpha+1})^{-1}(H_\alpha) = \Phi_{\alpha+1}(\Phi_\alpha^{-1}(H_\alpha))$

также диадично. Рассмотрим непрерывный гомоморфизм $f: G_{\alpha+1} = G_\alpha \times \times A \to G_\beta \times A$, $f(g, a) = (\varphi_\beta^\alpha(g), a)$, где $g \in G_\alpha$, $a \in A$. Отображение f индуцирует непрерывное отображение $F: \mathfrak{L}(G_{\alpha+1}) \to \mathfrak{L}(G_{\beta+1})$, причем $F((\Phi_\alpha^{\alpha+1})^{-1}(H_\alpha)) = (\Phi_\beta^{\beta+1})^{-1}(H_\beta)$. Покажем, что подпространство $(\Phi_\beta^{\beta+1})^{-1} \times \times (H_\beta)$ не удовлетворяет условию Суслина. Выберем в $\mathfrak{L}(A)$ подгруппу $L \simeq \mathbb{C}_p$. Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство тех подгрупп из $(\Phi_\beta^{\beta+1})^{-1}(H_\beta)$, проекция которых на сомножитель A совпадает с L. Точка L изолирована в $\mathfrak{L}(A)$, поэтому множество $\mathfrak{A}$ открыто в $(\Phi_\beta^{\beta+1})^{-1}(H_\beta)$. Покажем, что $\mathfrak{A}$ — одноточечная компактификация несчетного дискретного пространства. Ясно, что $|\mathfrak{A}| = \aleph_1$. Любая подгруппа F из $\mathfrak{A}$ содержится в группе $H = H_\beta \times L$, $H/F \simeq \mathbb{C}_p$ либо $H = F$. Между пространствами $\mathfrak{L}(H)$ и $\mathfrak{L}(H^*)$ существует гомеоморфизм, при котором каждой подгруппе $F \in \mathfrak{A}$ соответствует ее анулятор — циклическая подгруппа порядка p, а самой группе H — единичная подгруппа.

Нестационарная направленность подгрупп порядка p дискретной группы сходится в топологии Шаботи к единичной подгруппе. Итак, диадический компакт $(\Phi_\beta^{\beta+1})^{-1}(H_\beta)$ не удовлетворяет условию Суслина. Полученное противоречие доказывает лемму.

Т е о р е м а 4. *Пусть G — проконечная либо компактная абелева группа. Если $\omega(G) \geqslant \aleph_2$, то пространство $\mathfrak{L}(G)$ недиадично.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для компактной абелевой группы G веса не меньше $\aleph_2$ найдется такой нормальный делитель N, что $G/N = A^{\aleph_2}$, где A конечна либо изоморфна $\mathbf{T}$. Пространство $\mathfrak{L}(G/N)$ есть непрерывный образ $\mathfrak{L}(G)$, а поэтому пространство $\mathfrak{L}(G)$ недиадично.

Пусть G проконечна, $\omega(G) = \tau \geqslant \aleph_2$. Покажем, что G содержит открытую подгруппу U с недиадичным пространством $\mathfrak{L}(U)$. Если N — подгруппа Фратини проконечной группы U, то по лемме 1.3 из [12] фактор-группа U/N изоморфна произведению простых конечных групп. Семейства максимальных нормальных делителей групп U и U/N равномощны, поэтому для доказательства теоремы достаточно выбрать в G открытую подгруппу U, мощность семейства максимальных нормальных делителей которой равна $\aleph_2$. Будем говорить, что открытый нормальный делитель имеет глубину n, если число различных нормальных делителей, содержащих его, равно n. Определение корректно, так как каждая открытая подгруппа содержится лишь в конечном числе подгрупп. Ввиду того, что вес группы G несчетен, найдется такое n, что мощность семейства открытых нормальных делителей глубины n не меньше $\aleph_2$.

Пусть n_0 — наименьшее из чисел, обладающих этим свойством. Для всякого нормального делителя глубины n найдется нормальный делитель глубины $m < n$, в котором он максимален. Так как по предположению совокупность всех нормальных делителей глубины меньшей n_0 имеет мощность строго меньше $\aleph_2$, то найдется такой открытый нормальный делитель U, мощность семейства максимальных нормальных делителей которого равна $\aleph_2$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Если G абелева группа и $\omega(G) \geqslant \aleph_2$, то пространство $\mathfrak{L}(G)$ недиадично.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Группа G содержит открытую подгруппу $U = \mathbb{R}^n \times K$, где K — компактная группа, n — натуральное число. Покажем, что пространство $\mathfrak{L}(U)$ недиадично.

Известно ([13], теорема 11), что подмножество типа G_δ диадического компакта диадично. Пусть $[1/i, i]$ — отрезок в $\mathbb{R}$, i — натуральное число. Ясно, что $F_i = [1/i, i]^n \times K$ — компактное подмножество U и $\mathfrak{L}(K) = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_1(U \setminus F_i)$. Следовательно, $\mathfrak{L}(K)$ имеет тип G_δ в $\mathfrak{L}(U)$. Полученное противоречие доказывает следствие.

В заключение отметим некоторые открытые вопросы.

Пусть G — проконечная группа, $\omega(G) = \aleph_1$. Будет ли пространство $\mathfrak{L}(G)$ гомеоморфно $D^{\aleph_1}$?

Пусть G — компактная абелева группа, $\omega(G)=\tau\geqslant\aleph_2$. Будет ли пространство $\mathfrak{L}(G)$ гомеоморфно $\exp D^{\tau}$?

Этот же вопрос — для проконечных групп.

1. *Ивановский Л. И.* Об одной гипотезе П. С. Александрова // Докл. АН СССР.— 1958.— **123**, № 5.— С. 785—786.
2. *Кузьминов В. И.* О гипотезе П. С. Александрова в теории топологических групп // Там же.— 1959.— **125**, № 4.— С. 727—729.
3. *Сирота С. О.* О спектральном представлении пространства замкнутых подмножеств бикомпактов // Там же.— 1968.— **181**, № 5.— С. 1069—1075.
4. *Шапиро Л. Б.* Пространство замкнутых подмножеств $D^{\aleph_2}$ не является диадическим бикомпактом // Там же.— 1976.— **228**, № 6.— С. 1302—1305.
5. *Цыбенко Ю. В.* Диадичность пространства подгрупп // IX Всесоюз. симп. по теории групп: Тез. докл.— М.: Моск. пед. ин-т, 1984.— С. 249—250.
6. *Chabauty C.* Limite d'ensembles et gèometric des nombres // Bull. Soc. math. France.— 1950.— **78**.— P. 143—151.
7. *Протасов И. В.* Локальные теоремы для топологических групп // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1979.— **43**, № 6.— С. 1430—1440.
8. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности.— М.: Наука, 1973.— 575 с.
9. *Протасов И. В., Цыбенко Ю. В.* Связность в пространстве подгрупп // Укр.мат. журн. — 1983.— **35**, № 3.— С. 382—385.
10. *Протасов И. В.* О дуализмах топологических абелевых групп // Там же.— 1979.— **31**, № 3.— С. 207—211.
11. *Протасов И. В.* О решетке подгрупп проконечной группы // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1978.— № 11.— С. 975—978.
12. *Мельников О. В.* Нормальные делители свободных проконечных групп // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1978.— **42**, № 1. — С. 3—25.
13. *Ефимов Б. А.* Диадические бикомпакты // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1965.— **14**.— С. 211—247.

Киев. ун-т

Получено 21.02.85