УДК 517.55

В. И. Горбайчук, В. Н. Тимощук

Об обратных теоремах приближения бигармоническими функциями

1. В статье [1] получены обратные теоремы приближения бигармоническими функциями в круге и полуплоскости. В этих теоремах по заданной скорости уклонения бигармонических функций от своих граничных значений устанавливается непрерывность граничных значений (в смысле соответствующей метрики) и оценивается модуль непрерывности второго порядка (модуль гладкости) этого граничного значения. В настоящей работе упомянутые обратные теоремы дополняются указанием таких свойств приближения, которые обеспечивают существование производных определенного порядка граничной функции, и оценивается модуль гладкости производной наивысшего возможного порядка. Рассматриваются два класса функций: бигармонические в круге и бигармонические в полуплоскости.

Пусть задано бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u = 0. \tag{1}$$

Обозначим через $u_f(\varphi, r) =: u(\varphi, r)$ решение уравнения (1) в единичном круге, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(\varphi, r)|_{r=1} = f(\varphi), \quad \partial u(\varphi, r)/\partial r|_{r=1} = 0. \tag{2}$$

Решение краевой задачи (1), (2) можно представить в виде

$$u_f(\varphi, r) = \frac{(1-r^2)^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi + t) \frac{1 - r\cos t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2}\, dt. \tag{3}$$

Класс всех таких функций обозначим через B_φ. Обозначим через $u_g(x, y) =: u(x, y)$ решение уравнения (1) в полуплоскости $y > 0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, y)|_{y=0} = g(x), \quad \partial u(x, y)/\partial y|_{y=0} = 0. \tag{2'}$$

Решение краевой задачи (1)—(2′) можно записать в виде

$$u_g(x, y) = \frac{2y^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x+t)}{(t^2 + y^2)^2}\, dt. \tag{4}$$

Класс всех таких функций обозначим через B_y.

2. Обозначим через $L_p[-\pi, \pi]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, класс 2π-периодических функций $f(\varphi)$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, с конечной нормой, определяемой соотношениями

$$\|f\| = \left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\varphi)|^p d\varphi\right\}^{1/p}, \quad \text{если } 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|f\| = \operatorname*{ess\,sup}_{-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi} |f(\varphi)|, \quad \text{если } p = +\infty.$$

Будем пользоваться определением и свойствами интегрального модуля гладкости [2, с. 115].

Теорема 1. *Если $f \in L_p[-\pi, \pi]$, $p \geqslant 1$, $u_f(\varphi, r) \in B_\varphi$ и при некотором фиксированном целом неотрицательном k выполняется неравенство*

$$\|u_f(\cdot, r) - f(\cdot)\| \leqslant A(1-r)^k \omega(1-r), \quad A = \text{const} > 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \tag{5}$$

где $\omega(t)$, $t > 0$, — функция типа модуля непрерывности второго порядка, *удовлетворяющая при $k \geqslant 1$ условию Дини*

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt < \infty, \tag{6}$$

то $f(\varphi)$ почти для всех $\varphi \in [-\pi, \pi]$ совпадает с функцией, имеющей абсолютно непрерывную производную $f^{(k-1)}(\varphi)$ и производную $f^{(k)} \in L_p[-\pi, \pi]$ (при $p = +\infty$ непрерывную), и для $f^{(k)}(\varphi)$ интегральный модуль гладкости удовлетворяет соотношению

$$\omega_2(f^{(k)};\ 1-r) \leqslant \begin{cases} A_1 (1-r)^2 \displaystyle\int_{1-r}^{1} \frac{\omega(u)}{u^3}\, du, \text{ если } k = 0, \\ A_2 \left[\displaystyle\int_0^{1-r} \frac{\omega(u)}{u}\, du + (1-r)^2 \int_{1-r}^{1} \frac{\omega(u)}{u^3}\, du \right], \text{ если } k \geqslant 1, \end{cases} \tag{7}$$

$1/2 \leqslant r < 1$, *где A_1, A_2 — положительные постоянные, не зависящие от r.*

Замечание. В случае $k = 0$ теорема получена в [1]. При доказательстве теоремы будут использованы некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если $f \in L_p[-\pi, \pi]$, $p \geqslant 1$, и $u_f(\varphi, r) \in B_\varphi$, то для фиксированных натуральных k выполняется неравенство*

$$\left\| \frac{\partial^k u_f(\varphi, r)}{\partial \varphi^k} \right\| \leqslant M \frac{\|f\|}{(1-r)^k}, \quad 0 \leqslant r < 1, \tag{8}$$

где $M > 0$ — постоянная, не зависящая от r.

Замечание. В случае $k = 2$ лемма установлена в [1].

Доказательство леммы. Используя представление (3) решения $u_f(\varphi, r)$ краевой задачи (1), (2) и обобщенное неравенство Минковского [2, с. 601], приходим к неравенству

$$\left\| \frac{\partial^k u_f(\varphi, r)}{\partial \varphi^k} \right\| \leqslant \frac{\|f\|}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{(1-r^2)^2 (1 - r\cos t)}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} \right) \right| dt. \tag{9}$$

Оценим интеграл в правой части неравенства (9). Для этого бигармоническое ядро Пуассона представим в виде

$$\frac{(1-r^2)^2 (1 - r\cos t)}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{(1-r^2)^2}{1 - 2r\cos t + r^2} + \frac{(1-r^2)^3}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} \right] \tag{10}$$

и введем обозначения

$$P_1 := (1-r^2)^2/(1 - 2r\cos t + r^2), \quad P_2 := (1-r^2)^3/(1 - 2r\cos t + r^2)^2. \tag{11}$$

Тогда, учитывая, что $P_1 = (1-r^2)[-1 + 1/(1 - re^{it}) + 1/(1 - re^{-it})]$, дифференцированием по t получаем формулу для производной порядка k ($k = 1, 2, \dots$):

$$\frac{\partial^k P_1}{\partial t^k} = (1-r^2) \cdot r \cdot (i)^k \left[\frac{e^{it} Q^{(1)}_{k-1}(r, e^{it})}{(1 - re^{it})^{k+1}} + \frac{e^{-it} Q^{(2)}_{k-1}(r, e^{-it})}{(1 - re^{-it})^{k+1}} \right], \tag{12}$$

где $Q^{(1)}_{k-1}(r, e^{it})$; $Q^{(2)}_{k-1}(r, e^{-it})$ — многочлены степени $k - 1$ по каждому из указанных аргументов. Эти многочлены ограничены в замкнутом круге $0 \leqslant r \leqslant 1$ константой, зависящей только от степени многочлена. Вычислим модули двух слагаемых в равенстве (12). Имеем

$$\left|\frac{e^{it}Q^{(1)}_{k-1}(r,\ e^{it})}{(1-re^{it})^{k+1}}\right|^2=\frac{Q^{(1)}_{k-1}(r,\ e^{it})}{(1-re^{it})^{k+1}}\,\overline{\frac{Q^{(1)}_{k-1}(r,\ e^{it})}{(1-re^{-it})^{k+1}}}=\frac{|Q^{(1)}_{k-1}(r,\ e^{it})|^2}{(1-2r\cos t+r^2)^{k+1}},$$

откуда

$$\left|\frac{e^{it}Q^{(1)}_{k-1}(r,\ e^{it})}{(1-re^{it})^{k+1}}\right|=\frac{|Q^{(1)}_{k-1}(r,\ e^{it})|}{(1-2r\cos t+r^2)^{(k+1)/2}}. \tag{13}$$

Аналогично устанавливается равенство

$$\left|\frac{e^{-it}Q^{(2)}_{k-1}(r,\ e^{-it})}{(1-re^{-it})^{k+1}}\right|=\frac{|Q^{(2)}_{k-1}(r,\ e^{-it})|}{(1-2r\cos t+r^2)^{(k+1)/2}}. \tag{14}$$

Из (12) — (14) получаем оценку $|\partial^k P_1/\partial t^k|\leqslant(1-r^2)M_1/(1-2r\cos t+ r^2)^{(k+1)/2}$, где $M_1>0$ — постоянная, зависящая только от k. Используя эту оценку, известное тождество $\dfrac{1-r^2}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{dt}{1-2r\cos t+r^2}=1$ и верное для произвольных $t\in[-\pi,\ \pi]$ неравенство $1-2r\cos t+r^2\geqslant(1-r)^2$, находим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial^k P_1}{\partial t^k}\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant M_1\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{(1-2r\cos t+r^2)(1-2r\cos t+r^2)^{(k-1)/2}}\leqslant\frac{M_1}{(1-r)^{k-1}}. \tag{15}$$

Поскольку

$$P_2=\frac{(1-r^2)^3}{(1-re^{it})^2(1-re^{-it})^2}=(1-r^2)\left[-1+\frac{1}{1-re^{it}}+\frac{1}{1-re^{-it}}\right]^2=$$

$$=\frac{1-r^2}{(1-re^{it})^2}+\frac{1-r^2}{(1-re^{-it})^2}+(1-r^2)\left[1-\frac{2}{1-re^{it}}-\frac{2}{1-re^{-it}}\right]+$$

$$+2\left[-1+\frac{1}{1-re^{it}}+\frac{1}{1-re^{-it}}\right], \tag{16}$$

то достаточно рассмотреть модули производных порядка $k\in N$ каждого из слагаемых в правой части (16). Введем обозначения

$$P_2^{(1)}:=\frac{1-r^2}{(1-re^{it})^2},\quad P_2^{(2)}:=\frac{1-r^2}{(1-re^{-it})^2},\quad P_2^{(3)}:=(1-r^2)\times$$

$$\times\left[1-\frac{2}{1-re^{it}}-\frac{2}{1-re^{-it}}\right],\quad P_2^{(4)}:=2\left[-1+\frac{1}{1-re^{it}}+\frac{1}{1-re^{-it}}\right].$$

Аналогично оценке (15) получаем следующие неравенства:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\partial^k P_2^{(3)}/\partial t^k|\,dt\leqslant M_2/(1-r)^{k-1}, \tag{17}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\partial^k P_2^{(4)}/\partial t^k|\,dt\leqslant M_3/(1-r)^{k}, \tag{18}$$

где M_2, M_3 — положительные постоянные, не зависящие от r

Для $P_2^{(1)}$, $P_2^{(2)}$ аналогично доказательству равенства (13) получаем равенства

$$|\partial^k P_2^{(1)}/\partial t^k| = (1-r^2)\,|R_2^{(1)}(r,\ e^{it})|/(1-2r\cos t + r^2)^{k/2+1}, \tag{19}$$

$$|\partial^k P_2^{(2)}/\partial t^k| = (1-r^2)\,|R_2^{(2)}(r,\ e^{-it})|/(1-2r\cos t + r^2)^{k/2+1}, \tag{20}$$

где $R_2^{(1)}(r,\ e^{it})$, $R_2^{(2)}(r,\ e^{-it})$ — многочлены указанных аргументов, ограниченные в замкнутом круге $0\leqslant r\leqslant 1$ константой, зависящей только от k. Эти равенства позволяют получить оценки

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\partial^k P_2^{(1)}/\partial t^k|\,dt \leqslant M_4/(1-r)^k, \tag{21}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\partial^k P_2^{(2)}/\partial t^k|\,dt \leqslant M_5/(1-r)^k, \tag{22}$$

где M_4, M_5— положительные постоянные, не зависящие от r.

Используя теперь оценку (9), равенства (10) и (16), а также оценки (15), (17), (18), (21), (22) интегралов от отдельных слагаемых, получаем окончательную оценку (8). Лемма доказана.

Для фиксированного r_1, $0<r_1<1$, обозначим через $u_{u_{f}(\cdot,r_1)}(\varphi,\ r)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям $u(\varphi,\ r)|_{r=1} = u_f(\varphi,\ r_1)$, $\partial u(\varphi,\ r)/\partial r|_{r=1}=0$. Аналогично вводим обозначение $u_{u_f(\cdot,r_2)}(\varphi,\ r)$, $0<r_2<1$.

Лемма 2. *Если $f\in L_p[-\pi,\ \pi]$, $p\geqslant 1$, и $u_f(\varphi,\ r)\in B_\varphi$, то для произвольных r_1, $r_2\,(0<r_1,\ r_2<1)$ справедливо равенство*

$$u_{u_f(\cdot,r_1)}(\varphi,\ r_2) = u_{u_f(\cdot,r_2)}(\varphi,\ r_1),\quad -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi. \tag{23}$$

Доказательство. Исходя из (3) и используя теорему Фубини, находим

$$u_{u_f(\cdot,r_1)}(\varphi,\ r_2) = \frac{(1-r_1^2)^2(1-r_2^2)^2}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[1-r_1\cos(\tau-t)]\,[1-r_2\cos(t-\varphi)]}{(1-2r_1\cos(\tau-t)+r_1^2)^2\,(1-2r_2\cos(t-\varphi)+r_2^2)^2}\,dtd\tau, \tag{24}$$

$$u_{u_f(\cdot,r_2)}(\varphi,\ r_1) = \frac{(1-r_1^2)^2(1-r_2^2)^2}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[1-r_2\cos(\tau-t)]\,[1-r_1\cos(t-\varphi)]}{(1-2r_2\cos(\tau-t)+r_2^2)^2\,(1-2r_1\cos(t-\varphi)+r_1^2)^2}\,dtd\tau. \tag{25}$$

Рассмотрим разность внутренних интегралов (по t) в правых частях равенств (24) и (25). Учитывая 2π-периодичность подынтегральной функции, после замены $t=u+(\tau+\varphi)/2$ (τ и φ для этого интеграла являются параметрами) и обозначения $v=(\tau-\varphi)/2$, получаем для указанной разности

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(u,\ \varphi,\ \tau)\,du, \tag{26}$$

где

$$\Phi(u,\ \varphi,\ \tau) := \frac{[1-r_1\cos(v-u)]\,[1-r_2\cos(v+u)]}{(1-2r_1\cos(v-u)+r_1^2)^2\,(1-2r_2\cos(v+u)+r_2^2)^2} -$$

$$-\frac{[1-r_2\cos(v-u)]\,[1-r_1\cos(v+u)]}{(1-2r_2\cos(v-u)+r_2^2)^2\,(1-2r_1\cos(v+u)+r_1^2)^2}\,.$$

Поскольку $\Phi(-u, \varphi, \tau) = -\Phi(u, \varphi, \tau)$, то интеграл (26) равен нулю, и лемма доказана.

Следствие. *В условиях леммы 2 справедливо тождество*

$$u_{f-u_f(\cdot, r_1)}(\varphi, r_2) - u_{f-u_f(\cdot, r_2)}(\varphi, r_1) = u_f(\varphi, r_2) - u_f(\varphi, r_1). \quad (27)$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $k \geqslant 1$. Докажем, что для почти всех $\varphi \in [-\pi, \pi]$ для функции $f(\varphi)$ имеет место представление

$$f(\varphi) = u_f(\varphi, 1/2) + \sum_{j=1}^{\infty} [u_f(\varphi, 1 - 1/2^{j+1}) - u_f(\varphi, 1 - 1/2^j)]. \quad (28)$$

Для этого рассмотрим очевидное равенство

$$f(\varphi) = u_f(\varphi, 1/2) + \sum_{j=1}^{N-1} [u_f(\varphi, 1 - 1/2^{j+1}) - u_f(\varphi, 1 - 1/2^j)] +$$

$$+ [f(\varphi) - u_f(\varphi, 1 - 1/2^N)] = S_N(f; \varphi) + [f(\varphi) - u_f(\varphi, 1 - 1/2^N)], \quad (29)$$

где $S_N(f; \varphi)$ — частичная сумма ряда (28). Из (29) и условия (5) получаем $\| f(\cdot) - S_N(f; \cdot) \| = \| f(\cdot) - u_f(\cdot, 1 - 1/2^N) \| \leqslant A(1/2^N)^k \omega(1/2^N) \to 0$ $(N \to \infty)$. Это означает, что последовательность $S_N(f; \varphi)$ сходится в среднем с показателем $p \geqslant 1$ к функции $f(\varphi)$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Тогда существует подпоследовательность $S_{N_m}(f; \varphi)$, сходящаяся к $f(\varphi)$ почти везде на $[-\pi, \pi]$. Этим равенство (28) обосновано.

Рассмотрим ряд

$$u_f^{(k)}(\varphi, 1/2) + \sum_{j=1}^{\infty} [u_f^{(k)}(\varphi, 1 - 1/2^{j+1}) - u_f^{(k)}(\varphi, 1 - 1/2^j)], \quad (30)$$

составленный из производных порядка k $(\geqslant 1)$ членов ряда (28), и исследуем его сходимость на $[-\pi, \pi]$. Пользуясь тождеством (27), леммой 1 и условием (5), последовательными преобразованиями получаем

$$\| u_f^{(k)}(\cdot, 1 - 1/2^{j+1}) - u_f^{(k)}(\cdot, 1 - 1/2^j) \| \leqslant \| u^{(k)}_{f-u_f(\cdot, 1-1/2^j)}(\cdot, 1 - 1/2^{j+1}) \| +$$

$$+ \| u^{(k)}_{f-u_f(\cdot, 1-1/2^{j+1})}(\cdot, 1 - 1/2^j) \| \leqslant M \left(\frac{\| f - u_f(\cdot, 1 - 1/2^j) \|}{(1/2^{j+1})^k} + \right.$$

$$\left. + \frac{\| f - u_f(\cdot, 1 - 1/2^{j+1}) \|}{(1/2^j)^k} \right) \leqslant MA \left(\frac{(1/2^j)^k \omega(1/2^j)}{(1/2^{j+1})^k} + \frac{(1/2^{j+1})^k \omega(1/2^{j+1})}{(1/2^j)^k} \right) \leqslant$$

$$\leqslant M(k)\, \omega(1/2^j), \quad (31)$$

где $M(k) > 0$ — постоянная, зависящая от k и не зависящая от j. Так как при всех $j = 1, 2, \ldots$ верна оценка $\int\limits_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \frac{\omega(u)}{u}\, du \geqslant \frac{1}{2}\, \omega\left(\frac{1}{2^j}\right)$, то из (31) находим

$$\| u_f^{(k)}(\cdot, 1 - 1/2^{j+1}) - u_f^{(k)}(\cdot, 1 - 1/2^j) \| \leqslant 2M(k) \int\limits_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \frac{\omega(u)}{u}\, du. \quad (32)$$

Кроме того, в силу условия (6) имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \frac{\omega(u)}{u}\, du = \int\limits_0^1 \frac{\omega(u)}{u}\, du < \infty. \quad (33)$$

Из (32) и (33) следует, что ряд (30) сходится на $[-\pi, \pi]$ в среднем с показателем $p \geqslant 1$. Проводя далее рассуждения, почти полностью совпадающие с доказательством теоремы 6. 1. 3 А. Ф. Тимана [2, с. 347], приходим к утверждению, что функция $f(\varphi)$ почти везде совпадает с функцией, имеющей абсолютно непрерывную производную $f^{(k-1)}(\varphi)$ на $[-\pi, \pi]$ и производную $f^{(k)} \in L_p[-\pi, \pi]$, являющуюся почти для всех $\varphi \in [-\pi, \pi]$ суммой ряда (30):

$$f^{(k)}(\varphi) = u_f^{(k)}(\varphi, 1/2) + \sum_{j=1}^{\infty} [u_f^{(k)}(\varphi, 1 - 1/2^{j+1}) - u_f^{(k)}(\varphi, 1 - 1/2^j)]. \quad (34)$$

Оценим интегральный модуль гладкости функции $f^{(k)}(\varphi)$. Для этого используем верное почти для всех $\varphi \in [-\pi, \pi]$ равенство $f^{(k)}(\varphi) = u_f^{(k)}(\varphi, 1 - 1/2^j) + \sum\limits_{m=j+1}^{\infty} [u_f^{(k)}(\varphi, 1 - 1/2^m) - u_f^{(k)}(\varphi, 1 - 1/2^{m-1})]$, обоснование которого проводится аналогично доказательству равенства (34). Применяя оценку (32), получаем

$$\| f^{(k)}(\cdot) - u_f^{(k)}(\cdot, 1 - 1/2^j) \| \leqslant \sum_{m=j+1}^{\infty} \| u_f^{(k)}(\cdot, 1-1/2^m) - u_f^{(k)}(\cdot, 1-1/2^{m-1}) \| \leqslant$$

$$\leqslant 2M(k) \sum_{m=j+1}^{\infty} \int_{2^{-(m-1)}}^{2^{-(m-2)}} \frac{\omega(u)}{u}\, du = 2M(k) \int_0^{2^{-(j-1)}} \frac{\omega(u)}{u}\, du \leqslant$$

$$\leqslant 8M(k) \int_0^{2^{-j}} \frac{\omega(u)}{u}\, du. \quad (35)$$

В [3, с. 236] доказано, что функция $\Omega(t) := \int\limits_0^t \frac{\omega(u)}{u}\, du$ обладает характеристическими свойствами модуля непрерывности второго порядка. В таком случае неравенство (35) позволяет считать, что задано уклонение $f^{(k)}(\varphi)$ от оператора $u_f^{(k)}(\varphi, 1 - 1/2^j)$ в L_p-метрике $(p \geqslant 1)$, а потому на основании случая $k = 0$ (см. теорему 2 работы [1]) приходим к заключению о справедливости неравенства $\omega_2(f^{(k)}; 1 - r) \leqslant C(1 - r)^2 \int\limits_{1-r}^{1} \frac{\Omega(u)}{u^3}\, du$, где $C > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $(1 - r)$. Преобразование правой части последнего неравенства (см. [3]) приводит к оценке (7) для случая $k \geqslant 1$. Теорема 1 доказана.

3. Обозначим через $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, класс функций $g(x)$, заданных на $R = (-\infty, \infty)$, с конечной нормой, определяемой соотношениями:

$$\| g \| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^p\, dx \right\}^{1/p}, \quad \text{если } 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\| g \| = \operatorname*{esssup}_{-\infty < x < \infty} |g(x)|, \quad \text{если } p = +\infty.$$

Теорема 2. *Если* $g \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $u_g(x, y) \in B_y$ *и при некотором фиксированном целом неотрицательном* k *выполняется неравенство* $\| u_g(\cdot, y) - g(\cdot) \| \leqslant Ay^k \omega(y)$, $y > 0$, $A = \text{const} > 0$, *где* $\omega(t)$ — *та же функция, что и в теореме* 1, *то функция* $g(x)$ *почти для всех* $x \in (-\infty, \infty)$ *совпадает с функцией, имеющей абсолютно непрерывную производную* $g^{(k-1)}(x)$ *и производную* $g^{(k)} \in L_p(-\infty, \infty)$ (*при* $p = +\infty$ *не-*

прерывную) и для $g^{(k)}(x)$ *интегральный модуль гладкости удовлетворяет соотношению*

$$\omega_2(g^{(k)};t)\leqslant\begin{cases}A_3t^2\int\limits_t^1\frac{\omega(u)}{u^3}\,du, & \text{если } k=0,\\ A_4\left[\int\limits_0^t\frac{\omega(u)}{u}\,du+t^2\int\limits_t^1\frac{\omega(u)}{u^3}\,du\right], & \text{если } k\geqslant 1,\end{cases}$$

$0<t\leqslant 1/2$, *где* A_3, A_4 — *положительные постоянные, не зависящие от* $t\,(>0)$.

Замечание. В случае $k=0$ теорема доказана в [1].

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. При этом существенно используются такие вспомогательные утверждения.

Лемма 3. *Если* $g\in L_p(-\infty,\infty)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, *и* $u_g(x,y)\in B_y$, *то для произвольного фиксированного натурального* k *выполняется неравенство* $\|\partial^k u_g(x,y)/\partial x^k\|\leqslant M'\|g\|/y^k$, $y>0$, где $M'>0$ — *постоянная, не зависящая от* y.

Замечание. В случае $k=2$ лемма установлена в [1].

Лемма 4. *Если* $g\in L_p(-\infty,\infty)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $u_g(x,y)\in B_y$, *то для произвольных фиксированных* $y_1>0$, $y_2>0$ *и всех* $x\in(-\infty,\infty)$ *справедливо равенство* $u_{u_{g(\cdot,y_1)}}(x,y_2)=u_{v_{g(\cdot,y_2)}}(x,y_1)$.

Следствие. *В условиях леммы 4 справедливо тождество*

$$u_{g-u_{g(\cdot,y_1)}}(x,y_2)-u_{g-u_{g(\cdot,y_2)}}(x,y_1)=u_g(x,y_2)-u_g(x,y_1).$$

Доказательство лемм 3 и 4 аналогично доказательству соответствующих утверждений п. 2.

1. *Горбайчук В. И.* Обратные теоремы приближения бигармоническими функциями // Математическая физика.— 1976.— Вып. 19.— С. 73—78.
2. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.— М.. Физматгиз, 1960.— 624 с.
3. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1977.— 508 с.

Луцк. пед. ин-т

Получено 21.02.85,
после доработки — 10.09.85