УДК 517.5

А. И. Вейцблит

Нормы, обладающие критическим показателем

Критическим показателем нормы в $\mathbb{R}^n$ называется такое минимальное натуральное число q, что для всех линейных операторов A таких, что $\| A \| = 1$, равенство $\| A^q \| = 1$ влечет $\| A^m \| = 1$, $m > q$. Впервые критический показатель был введен Маржиком и Птаком в [1]. Для евклидовой нормы $q = n$ [2]. Вместе с тем норма может быть и такой, что критический показатель не существует [3].

Существование критического показателя позволяет алгоритмически исследовать поведение итерационного процесса, определяемого оператором A (см. [4]).

В. М. Киржнер и М. И. Табачников доказали [3], что если сфера содержится в алгебраическом многообразии, не проходящем через нуль, то существует критический показатель.

Следующее утверждение распространяет указанную теорему на аналитическую ситуацию.

Теорема 1. *Пусть U — некоторая комплексная окрестность шара $D = \{v \mid v \in \mathbb{R}^n, \| v \| \leqslant 1\}$. Если сфера $\| v \| = 1$ содержится во множестве нулей голоморфной в U функции f и $f(0) \neq 0$, то существует критический показатель.*

Доказательство. Пусть U' — некоторая ограниченная комплексная окрестность единичного шара Δ пространства линейных операторов. Для каждого натурального m выберем такую комплексную окрестность U_m шара D, что $A \in U' \Rightarrow A^m U_m \subset U$. Можно предполагать, что $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_m \supset \ldots$. Положим $K = D \times \Delta$, $W_m = U_m \times U'$, $V_m = \{(w, B) \mid (w, B) \in W_m, f(w) = 0, f(Bw) = 0, \ldots, f(B^m w) = 0\}$. Множество K компактно, $K \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$, V_m — аналитическое подмножество в W_m и $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_m \supset \ldots$. Следовательно (см. [5]), найдется такое натуральное q, что $V_m \cap K = V_q \cap K$ при $m > q$. Допустим теперь, что не существует критического показателя. Это означает, что для каждого натурального k найдутся такие вектор v_k и оператор A_k, что $\| A_k \| = 1$, $r(A_k) < 1$, $\| A_k^i v_k \| = 1$, $0 \leqslant i \leqslant k$. При $k = q$ получаем $f(A_q^i v_q) = 0$, $0 \leqslant i \leqslant q$, откуда $(v_q, A_q) \in V_q \cap K$. Следовательно, $(v_q, A_q) \in V_m \cap K$ при $m > q$. Таким образом, $f(A_q^m v_q) = 0$, $m \geqslant q$, откуда при $m \to \infty$ получаем $f(0) = 0$, поскольку $r(A_q) < 1$.

О проведенном доказательстве использовано свойство обрыва убывающих цепей аналитических множеств в пересечении с компактом. Вместо этого можно было бы воспользоваться «дуальным» свойством нетеровости кольца ростков голоморфных функций. На этом пути получается также доказательство следующей гипотезы Ю. И. Любича [3].

Теорема 2. *Если сфера является аналитическим подмногообразием в $\mathbb{R}^n$, то критический показатель существует.*

Анализ контрпримера из [3] приводит к следующему общему необходимому условию существования критического показателя.

Теорема 3. *Если критический показатель существует, то сфера не содержит кривых вида $v = e^{Bt} v_0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, где $\| v_0 \| = 1$, B — линейный оператор, $\| e^{Bt} \| \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, $e^{Bt} \to 0$, $t \to +\infty$.*

Доказательство. Спектр оператора B, очевидно, лежит в открытой левой полуплоскости, а $\| e^{Bt} \| = 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$, так как $\| e^{Bt} v_0 \| = 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Рассмотрим последовательность сжатий $A_k = e^{BT/k}$, $k = 1, 2, \ldots$. По теореме об отображении спектров $r(A_k) < 1$ для каждого k. С другой стороны, $\| A_k \| = \| A_k^k \| = 1$, $k = 1, 2 \ldots$.

Обращение теоремы 3 требует дополнительных условий аналитичности или кусочной аналитичности сферы. Будем говорить, что сфера кусочно аналитична, если она содержится в объединении конечного набора аналитических множеств $V_1, V_2, \ldots, V_m$.

Теорема 4. *Критический показатель существует, если сфера кусочно аналитична и выполнено одно из двух условий:* 1) *сфера не содержит кривых вида* $v = e^{Bt}v_0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *где* $\| v_0 \| = 1$, $e^{Bt} \to 0$, $t \to +\infty$; 2) *каждое из множеств* V_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, *не содержит кривых вида* $v = e^{Bt}v_0 \not\equiv v_0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *где* $\| v_0 \| = 1$, $\| e^{Bt} \| \leqslant 1$, $t \geqslant 0$.

Следствие. *Пусть сфера в* $\mathbb{R}^2$ *кусочно аналитична. Тогда условие теоремы 3 не только необходимо, но достаточно для того, чтобы существовал критический показатель.*

Рассмотрим случай гладкой сферы.

Теорема 5. *Пусть сфера содержится во множестве нулей функции* $f \in C^k$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$. *Критический показатель существует, если для каждого вектора* v *и линейного оператора* B *таких, что* $\| v \| = 1$, $\| e^{Bt} \| \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, $e^{Bt}v \not\equiv v$, *при некотором натуральном* $m < k$ *выполнено неравенство*

$$\frac{d^m}{dt^m} f(e^{Bt}v)\,|_{t=0} \neq 0.$$

В работе [2] Птак поставил вопрос: существует ли критический показатель для l_p-нормы. Положительный ответ для рациональных p получен В. М. Киржнером и М. И. Табачниковым [3].

Теорема 6. *l_p-норма при любом* p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *обладает критическим показателем.*

При доказательстве теоремы 6 (а также теоремы 5) используется специально развитая автором техника «порядков» функциональных последовательностей. Будем говорить, что последовательность вещественнозначных функций $f_k(m)$ натурального аргумента обладает порядком, если существуют числовые последовательности α_k, $\beta_k > 0$ и полином $P(t) \not\equiv 0$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{f_k(m)}{\alpha_k \beta_k^m} = P(m)$, $m = 1, 2, \ldots$. Если критический показатель не существует, то, очевидно, найдутся такие последовательности операторов A_k и векторов v_k, что

$$\| A_k^m v_k \| = 1, \ 0 \leqslant m \leqslant k. \tag{1}$$

Если удается доказать, что функциональная последовательность $F_k(m) = \| A_k^m v_k \| - 1$ обладает порядком, то возникает противоречие. В самом деле, пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{F_k(m)}{\alpha_k \beta_k^m} = P(m) \not\equiv 0$. Тогда в силу (1) $P(m) \equiv 0$.

1. *Mařik J., Ptak V.* Norms, spectra and combinatorial properties of matrices // Chech. Math. J.— 1960.— **10**, N 2.— P. 181—196.
2. *Ptak V.* Norms and spectral radiur of matrices // Ibid.— 1962.— **8**, N 7.— P. 553—557.
3. *Киржнер В. М., Табачников М. И.* О критических показателях норм в n-мерном пространстве // Сиб. мат. журн.— 1971.— **12**, № 3.— С. 672—675.
4. *Ptak V.* Universal estimates of the spectral radius // Banach center publ.— 1982.— 8.— P. 374—387.
5. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных.— М.: Мир, 1969.— 395 с.

Физ.-техн. ин-т низких температур, Харьков

Получено 28.06.85