УДК 517.54

В. А. Похилевич

О некоторых подклассах однолистных функций с фиксированным вторым коэффициентом

В настоящей статье находятся области значений функционалов

$$I(f_\alpha) = \operatorname{Re}\frac{zf'_\alpha}{f_\alpha} + i\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''_\alpha}{f'_\alpha}\right), \tag{1}$$

$$I(f_\alpha) = \operatorname{Re} f'_\alpha + i\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''_\alpha}{f'_\alpha}\right) \tag{2}$$

на подклассах функций, обозначаемых соответственно через $S^*(2\alpha)$, $U(\alpha)$,

$$f_\alpha(z) = z + 2\alpha z^2 + c_3 z^3 + \ldots, \tag{3}$$

регулярных и однолистных в единичном круге $E = \{z, |z| < 1\}$, соответственно отображающих E на области звездообразные относительно $w_0 = f(0) = 0$ и с ограниченным вращением, у которых коэффициент $c_2 = 2\alpha$ в разложении (3) фиксирован, $\alpha \in [0, 1)$. Точка $z = re^{i\varphi} \in E$ и фиксирована. Как следствия получены соответственно границы выпуклости классов $S^*(2\alpha)$, $U(\alpha)$ (в (3) для класса $U(\alpha)$ коэффициент 2α необходимо заменить на α). Показано, что дуги линий уровня могут быть выпуклыми (вогнутыми) вне круга радиуса выпуклости соответственно в зависимости от $\operatorname{Re} zf'_\alpha/f_\alpha$, $\operatorname{Re} f'_\alpha$ для класса $U(\alpha)$.

В работе [1] получена область значений функционала (1) на всем классе звездообразных функций; в [2—4]— область значений функционала (1) на подклассах звездных функций порядка (рода) α, $\alpha \in [0, 1)$, нормированных разложением $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + \ldots$.

Поскольку метод доказательства теоремы 1 аналогичен [3], ограничимся приведением кратких сведений относительно классов $S^*(2\alpha)$ и $U(\alpha)$ и укажем, как получить область значений функционала (2) для функций класса $U(\alpha)$.

Пусть P — класс функций $P(z) = z + p_1 z + \ldots$ регулярных в E и $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $z \in$ E. Известно, что если $f(z) \in S^*$, то

$$zf'(z)/f(z) = p(z). \tag{4}$$

Пусть $S^*(2\alpha)$ — подкласс класса S^* функций $f(z)$, нормированных разложением (3), у которых коэффициент $c_2 = 2\alpha$ фиксирован. Если $f_\alpha(z) \in S^*(2\alpha)$, то функции вида $p_\alpha(z) = 1 + 2\alpha z + 2(c_3 - 2\alpha^2) z^2 + \ldots$ представляют собой подкласс $P(2\alpha)$ класса P с фиксированным коэффициентом при z. Если $p_\alpha(z) \in P(2\alpha)$, то формула

$$\omega_\alpha(z) = \frac{p_\alpha(z) - 1}{p_\alpha(z) + 1} = \alpha z + \ldots, |\omega_\alpha| < 1, \quad z \in E, \tag{5}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между функциями классов $P(2\alpha)$ и $\Omega(\alpha)$— классом регулярных в E функций с фиксированным коэффициентом α при z.

Обратно, из (5) имеем

$$p_\alpha(z)=\frac{1+\omega_\alpha(z)}{1-\omega_\alpha(z)}. \tag{6}$$

Функции $\omega_\alpha \in \Omega(\alpha)$ и функции ω класса Ω всех регулярных в E функций ω, $|\omega|<1$, связаны соотношением

$$\omega_\alpha(z)=z\,\frac{\omega(z)+\alpha}{1+\alpha\omega(z)}. \tag{7}$$

Подставляя ω_α по (7) в (6), получаем

$$p_\alpha(z)=\frac{1+\alpha z+(\alpha+z)\,\omega(z)}{1-\alpha z+(\alpha-z)\,\omega(z)}. \tag{8}$$

Из соотношения (8) при фиксированном $z=re^{i\varphi}$, $r=|z|<1$, легко следуют оценки для $\operatorname{Re} p_\alpha(z)$:

$$\underline{R}\equiv\frac{1-r^2}{1-2\alpha r+r^2}\leqslant \operatorname{Re} p_\alpha(z)\leqslant\frac{1+2\alpha r+r^2}{1-r^2}\equiv\overline{R}. \tag{9}$$

Действительно, если z — фиксированная точка круга E, то, учитывая, что $|\omega|\leqslant|z|$, нетрудно получить область значений $p_\alpha(z)$, которая представляет собой круг радиуса ρ с центром в точке a, где

$$a=\frac{1-2\alpha^2r^2+r^4}{(1-r^2)[1-2\alpha r+r^2]},\qquad \rho=\frac{2(1-\alpha^2)\,r^2}{(1-r^2)[1-2\alpha r+r^2]}.$$

Поскольку между функциями $f_\alpha(z)\in S^*(2\alpha)\,(U(\alpha)))$ и $p_\alpha(z)\in P(2\alpha)$ существует взаимно-однозначное соответствие, устанавливаемое формулами

$$zf'_\alpha/f_\alpha=p_\alpha,\quad f'_\alpha=p_\alpha, \tag{10}$$

то соответственно имеем

$$1+\frac{zf''_\alpha}{f'_\alpha}=\begin{cases}p_\alpha+zp'_\alpha/p_\alpha, & f_\alpha\in S^*(2\alpha);\\ 1+zp'_\alpha/p_\alpha, & f_\alpha\in U(\alpha).\end{cases} \tag{11}$$

Отсюда задача нахождения областей значений функционалов (1) и (2) сводится к задаче нахождения соответственно областей значений функционалов

$$I(p_\alpha)=\operatorname{Re}p_\alpha+i\operatorname{Re}\begin{Bmatrix}p_\alpha+zp'_\alpha/p_\alpha\\ 1+zp'_\alpha/p_\alpha\end{Bmatrix} \tag{12}$$

на классе $P(2\alpha)$. Таким образом, для обоих классов $S^*(2\alpha)$, $U(\alpha)$ задача сводится к нахождению области значений функционала

$$I(p_\alpha)=\operatorname{Re}p_\alpha+i\operatorname{Re}\frac{zp'_\alpha}{p_\alpha} \tag{13}$$

на классе $P(2\alpha)$, $z\in E$и фиксировано.

Отсюда, как и в [1, 4], граница ∂D области значений функционала (13), а следовательно, и (12) будет найдена, если удастся решить задачу на относительный экстремум: при фиксированном значении $x=\operatorname{Re}p_\alpha(z)$ найти максимум и минимум функции $\operatorname{Re}(zp_\alpha/p'_\alpha)$. Последняя находится аналогично [4], а потому приведем полученный результат для класса $S^*(2\alpha)$, из которого легко следует результат как для $U(\alpha)$, так и для функционала (13).

Т е о р е м а 1. *Область значений функционала* (1) *на классе* $S^*(2\alpha)$, $\alpha\in[0,1)$, z — *фиксированная точка круга* E, *представляет собой замкнутую область, которая определяется следующим образом:*

а) *при* $0<r\leqslant\bar r(\alpha)$ *область выпукла, ограничена сверху кривой* Γ_3^+, *снизу* Γ^-, *где*

$$\Gamma_3^+: I = x + i\Phi_3(x),\quad x\in[\underline{R}, \overline{R}],$$

$$\Phi_3(x) = x + \frac{-(1-r)^2x + \dfrac{2(1-2\alpha r^2+r^4)}{1-r^2} - \dfrac{(1+r)^2}{x}\ ;}{2(1-\alpha)r}\ ; \qquad (14)$$

$$\Gamma^-: I = x + i\Phi(x),$$

$$\Phi(x) = x + \frac{(1+r)^3(1-r)x^2 - 2(1+2\alpha r^2+r^4)x - (1-r)^3(1+r)}{2(1+\alpha)r(1-r^2)x}; \quad (15)$$

б) *при* $\bar r(\alpha)\leqslant r<1$ *область ограничена сверху кривой* Γ^+, *состоящей из трех непрерывных дуг* $\Gamma_1^+, \Gamma_2^+, \Gamma_3^+$, *и снизу* Γ^-, *где*

$$\Gamma_1^+: I = x + i\Phi_1(x),\quad \underline{R}\leqslant x\leqslant \xi_1,$$

$$\Phi_1(x) = x + \frac{-(\alpha-2r+\alpha r^2) - \dfrac{\alpha+2r+\alpha r^2}{2ax-a^2+\rho^2}x + 2\alpha(1-r^2)}{2(1-\alpha^2)r}, \qquad (16)$$

ξ_1 — *единственный на интервале* $(\underline{R}, \overline{R})$ *корень уравнения*

$$(2ax-a^2+\rho^2)^{3/2} - \frac{\alpha+2r+\alpha r^2}{1+2\alpha r+r^2}x = 0, \qquad (17)$$

$$\Gamma_2^+: I = x + i\Phi_2(x),\quad \xi_1\leqslant x\leqslant\xi_2,\quad \Phi_2(x) = x + \frac{1}{2(1-\alpha^2)r}\Big[-(\alpha-2r+$$

$$+\alpha r^2)x + 2\alpha(1-r^2) - \frac{\alpha+2r+\alpha r^2}{y_0^2} - (1-2\alpha r+r^2)\times$$

$$\times\frac{y_0^2-2ax+a^2-\rho^2}{y_0}\Big], \qquad (18)$$

$$\xi_2 = -a + \sqrt{2a^2-\rho^2+\frac{2(\alpha+2r+\alpha r^2)}{1-2\alpha r+r^2}}, \qquad (19)$$

а y_0 — *единственный на интервале корень уравнения*

$$(x, (2ax-a^2+\rho^2)^{1/2}) \qquad (20)$$

$$y^3 + (2ax-a^2+\rho^2)y - 2\frac{\alpha+2r+\alpha r^2}{1-2\alpha r+r^2}x = 0. \qquad (21)$$

Кривая Γ_3^+ — *та же, что и в п.* а), *но определенная теперь на интервале* $\xi_2\leqslant x\leqslant\overline{R}$, Γ^- — *та же, что и в п.* а). *Переходное значение* $\bar r(\alpha)$ *определяется по формуле*

$$\bar r(\alpha) = (1+\alpha+\sqrt{\alpha^2+2\alpha+5} - \sqrt{2(1+\alpha)[1+\alpha+\sqrt{\alpha^2+2\alpha+5}]})/2.$$

Очевидно, чтобы получить область значений функционала (2) на классе $U(\alpha)$, надо в функциях Φ_i и Φ первое слагаемое (стоящее вне скобок) заменить на 1, а для функционала (13) это слагаемое заменить нулем, т. е. выбросить.

З а м е ч а н и е. Аналогично [1, 4] доказывается, что дуги Γ^+, Γ^- непрерывно дифференцируемые; дуги Γ_1^+, Γ_+^3 выпуклые, Γ_2^+, Γ^- вогнутые. Кроме того, нетрудно убедиться, что функция Φ по (15) достигает абсолютного минимума в точке $x_0=(1-r)/\sqrt{(1+r)^2+2(1+\alpha)r}$. Однако, почти очевидно, что $x_0<\underline{R}$ (см. (9)), а потому минимум функции $\Phi(x)$ на $(\underline{R},\overline{R})$ достигается на левом конце.

$$\Phi(\underline{R})=\frac{1+2\alpha r-6r^2+2\alpha r^3+r^4}{(1-r^2)(1-2\alpha r+r^2)}. \tag{22}$$

Таким образом, как следствие, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Граница выпуклости $r(\alpha)$ класса $S^*(2\alpha)$ определяется по формуле*

$$r(\alpha)=\frac{\sqrt{\alpha^2+8}-\alpha-\sqrt{2\alpha^2+4-2\alpha\sqrt{\alpha^2+8}}}{2}. \tag{23}$$

Экстремальная функция имеет вид

$$f_\alpha^{(0)}(z)=\frac{z}{(1-z)^{1+\alpha}(1+z)^{1-\alpha}}. \tag{24}$$

Аналогично определяется граница выпуклости класса $U(\alpha)$.

Теорема 3. *Граница выпуклости $r_1(\alpha)$ класса $U(\alpha)$ определяется как единственный на интервале $(0,1)$ корень уравнения*

$$1+4\alpha r^3-4r^2-r^4=0. \tag{25}$$

Экстремальная функция имеет вид

$$f_{1\alpha}^{(0)}(z)=\int_0^z\frac{1+2\alpha t+t^2}{1-t^2}\,dt. \tag{26}$$

Теперь приведем без доказательства для случая б) свойства дуг линий уровня быть выпуклыми или только вогнутыми вне круга радиуса выпуклости для функций класса $U(\alpha)$ в зависимости от $\mathrm{Re} f'_\alpha$. Напомним, что линией уровня $L(f,r)$ мы называем образ окружности $|z|=r$ при отображении функцией $f(z)$ единичного круга E.

Теорема 4. *Для каждого $r_1(\alpha)\leqslant r<1$ дуга линии уровня любой функции $f_\alpha\in U(\alpha)$ будет выпуклой, если*

$$\gamma^{(2)}\overline{R}\leqslant\mathrm{Re}\, f'_\alpha(z)\leqslant\overline{R}. \tag{27}$$

Но для любого $\varepsilon>0$ найдется функция $f_\alpha\in U(\alpha)$, для которой некоторая дуга ее линии уровня не будет выпуклой, хотя на ней $(\gamma^{(2)}-\varepsilon)\overline{R}\leqslant\leqslant\mathrm{Re}\, f'_\alpha(z)\leqslant\overline{R}$. Здесь $x_2=\dfrac{1+2\alpha r^2+r^4-(1+\alpha)r(1-r^2)+\sqrt{\Delta}}{(1+r)^3(1-r)}$,

$\gamma^{(2)}=\dfrac{x_2}{\overline{R}}$, $\Delta=(1+\alpha)r(r^2+2r-1)[2-2(1-\alpha)r^2+2r^4-(1+\alpha)\times\times r(1-r^2)]$, *$x_2$ — точка пересечения кривой $\Phi(x)$ с вещественной осью на интервале $(\underline{R},\overline{R})$.*

Теорема 5. *Для каждого $r_1(\alpha)\leqslant r<1$ дуга линии уровня любой функции $f_\alpha\in U(\alpha)$ будет вогнутой, если $\underline{R}\leqslant\mathrm{Re}\, f'_\alpha(z)\leqslant\gamma^{(1)}\underline{R}$. Но для любого $\varepsilon>0$ найдется функция $f_\alpha\in U(\alpha)$, для которой некоторая дуга ее линии уровня не будет вогнутой, хотя на ней $\underline{R}\leqslant\mathrm{Re}\, f'_\alpha(z)\leqslant(\gamma^{(1)}+\varepsilon)\underline{R}$. Здесь $\gamma^{(1)}=x_1/\underline{R}$, x_1 — меньший корень уравнения $\Phi_1(x)=0$. Ввиду громоздкого выражения для x_1 мы не приводим его в явном виде.*

Замечание 2. Аналогично решаются рассмотренные задачи на других классах однолистных функций, имеющих представление через класс $P(2\alpha)$.

1. *Гутлянский В. Я.* Об областях значений некоторых функционалов и свойствах линий уровня на классах однолистных функций // Тр. Томск. ун-та.— 1968.— 200.— С. 71—98.
2. *Похилевич В. А.* Области некоторых функционалов на специальных классах аналитических функций // Мат. сборник.— Киев : Наук. думка, 1976.— С. 13—17.
3. *Кайдан В. А., Похилевич В. А.* Про області значень деякого функціоналу на спеціальних класах зіркових функцій // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1976.— № 1.— С. 5—8.
4. *Похилевич В. А., Кайдан В. А.* Об областях значений некоторых функционалов на специальных классах аналитических функций // Укр. мат. журн.— 1978.— 30, № 2.— С. 192—200.

Киев. политехн. ин-т Получено 28.02.85