УДК 512.8

В. М. Петричкович, В. М. Прокип

О факторизации многочленных матриц над произвольным полем

Пусть P — поле, $P[\lambda]$ — кольцо многочленов над P, P_n и $P_n[\lambda]$ — кольца $n \times n$-матриц над P и $P[\lambda]$ соответственно. Пусть, далее, $A(\lambda)$ — многочленная матрица степени m над полем P, т. е. $A(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \ldots + A_m$, $A_i \in P_n$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $\det A(\lambda) \not\equiv 0$. Обозначим через I_k единичную матрицу порядка k. Если $A_0 = I_n$, то $A(\lambda)$ называется унитальной. Многочлен $\Delta(\lambda) = \det A(\lambda)$ называется характеристическим многочленом, а его корни — характеристическими корнями матрицы $A(\lambda)$.

Задача о факторизации многочленных матриц, т. е. представимости их в виде произведения матриц меньших степеней, рассматривалась многими авторами. Большинство результатов, полученных в этом направлении, относятся к факторизациям многочленных матриц над алгебраически замкнутыми полями, в частности над полем комплексных чисел [1—5]. В настоящей работе рассмотрена факторизация многочленных матриц над произвольным полем P, в частности приведены необходимые и достаточные условия представимости матрицы $A(\lambda)$ в виде произведения множителей, наибольший общий делитель характеристических многочленов которых взаимно прост с наибольшим общим делителем миноров $(n-1)$-го порядка матрицы $A(\lambda)$. Это позволило полностью решить задачу о факторизации многочленных матриц, элементарные делители которых попарно взаимно просты, т. е. каноническая диагональная форма которых равна

$$F_A(\lambda) = U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda) = \operatorname{diag}\{1, \ldots, 1, \Delta(\lambda)\},\ U(\lambda),$$
$$V(\lambda) \in GL_n(P[\lambda]).$$

Пусть характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ матрицы $A(\lambda)$ представим в виде произведения

$$\Delta(\lambda) = \varphi(\lambda)\psi(\lambda),\ \varphi(\lambda) = \lambda^{sn} + b_1\lambda^{sn-1} + \ldots + b_{sn}. \tag{1}$$

Будем искать факторизации матрицы $A(\lambda)$ вида

$$A(\lambda) = B(\lambda)C(\lambda), \tag{2}$$

где $B(\lambda)=I_n\lambda^s + B_1\lambda^{s-1} + \ldots + B_s$, $C(\lambda) = C_0\lambda^{m-s} + C_1\lambda^{m-s-1} + \ldots + C_{m-s}$, $B_i, C_j \in P_n$, $i = 1, \ldots, s$, $j = 0, 1, \ldots, m-s$, $\det B(\lambda) = \varphi(\lambda)$, $\det C(\lambda) = \psi(\lambda)$.

Обозначим через M и N матрицы

$$M = \left\| \begin{array}{cccccccc} A_0 & A_1 & \cdots & A_m & & & & \\ & A_0 & A_1 & \cdots & A_m & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & A_0 & A_1 & \cdots & A_m \\ I_n & b_1I_n & \cdots & b_{sn}I_n & & & & \\ & I_n & b_1I_n & \cdots & b_{sn}I_n & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & I_n & b_1I_n & \cdots & \cdots & b_{sn}I_n \end{array} \right\| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}A\\A\\A\\A\end{array}}\right\} sn-s \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}A\\A\\A\\A\end{array}}\right\} m-s \end{array}$$

$$N = \| b_1A_0 - A_1 \ldots b_mA_0 - A_m\ b_{m+1}A_0 \ldots b_{sn}A_0\ \underbrace{0 \ldots 0}_{m-s} \|.$$

На незаполненных местах в матрице M находятся нули.

Теорема 1. *Пусть $A(\lambda)$ представима в виде (2) и $B^*(\lambda) = I_n\lambda^{sn-s} + D_1\lambda^{sn-s-1} + \ldots + D_{sn-s}$ — присоединенная матрица для $B(\lambda)$. Тогда $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \right\|$ и матрица $Z_0 = \| D_1 \ldots D_{sn-s} - C_1 \ldots - C_{m-s} \|$ является решением уравнения $ZM = N$.*

Доказательство. Умножая обе части равенства (2) слева на матрицу $B^*(\lambda)$, получаем $B^*(\lambda)A(\lambda) = \varphi(\lambda)C(\lambda)$. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ:

$$\sum_{i+j=k} D_iA_j = \sum_{l+t=k} b_lC_t, \qquad k = 0, 1, \ldots, sn-s+m, \tag{3}$$

$$i = 0, 1, \ldots, sn-s,\ j = 0, 1, \ldots, m,\ l = 0, 1, \ldots, sn,\ t = 0, 1, \ldots, m-s,$$

при этом полагаем $D_0 = I_n$, $b_0 = 1$. Учитывая, что $C_0 = A_0$, из (3) находим

$$\sum_{i+j=k} D_iA_j - \sum_{l+t=k} b_lC_t = b_kA_0 - A_k, \qquad k = 1, \ldots, sn-s+m, \tag{4}$$

$$i = 1, \ldots, sn-s,\ j = 0, 1, \ldots, m,\ l = 0, 1, \ldots, sn,\ t = 1, \ldots, m-s,$$

где $b_k = 0$ при $k > sn$ и $A_k = 0$ при $k > m$. Отсюда $Z_0M = N$, т. е. уравнение $ZM = N$ разрешимо. Теорема доказана

Лемма 1. *Пусть характеристический многочлен* $\Delta(\lambda)$ *матрицы* $A(\lambda)$ *представим в виде* (1). *Если* $Z_0 = \| D_1 \dots D_{sn-s} - C_1 \dots - C_{m-s} \|$ — *решение уравнения* $ZM = N$, *то* $D(\lambda) A(\lambda) = \varphi(\lambda) C(\lambda)$, *где* $D(\lambda) = I_n \lambda^{sn-s} + D_1 \lambda^{sn-s-1} + \dots + D_{sn-s}$, $C(\lambda) = A_0 \lambda^{m-s} + C_1 \lambda^{m-s-1} + \dots + C_{m-s}$.

Доказательство. Равенство $Z_0 M = N$ равносильно равенствам (4), которые, в свою очередь, вместе с тождеством $A_0 = A_0$ равносильны (3). Умножая обе части k-го равенства из (3) на $\lambda^{sn-s+m-k}$, $k = 0, 1, \dots, sn - s + m$, и складывая левые и правые части этих $sn - s + m + 1$ равенств, после несложных преобразований получаем $D(\lambda) A(\lambda) = \varphi(\lambda) C(\lambda)$. Лемма доказана.

Пусть $E(\lambda) \in P_n[\lambda]$, $E^*(\lambda)$ — присоединенная матрица для $E(\lambda)$. Тогда $E(\lambda) E^*(\lambda) = E^*(\lambda) E(\lambda) = \det E(\lambda) I_n$. Отсюда получаем следующие утверждения.

Лемма 2. *Пусть* $K(\lambda) \in P_n[\lambda]$ *и* $\operatorname{et} K(\lambda) \not\equiv 0$. *Если матрица* $R(\lambda) \in P_n[\lambda]$ *удовлетворяет соотношению* $R(\lambda) K(\lambda) = \det K(\lambda) I_n$, *то* $R(\lambda) = K^*(\lambda)$.

Лемма 3. *Пусть* $H(\lambda) \in P_n[\lambda]$ *и* $\det H(\lambda) = \delta^{n-1}(\lambda) \not\equiv 0$. *Если матрица* $K(\lambda) \in P_n[\lambda]$ *удовлетворяет соотношению* $K(\lambda) H(\lambda) = \delta(\lambda) I_n$, *то* $K^*(\lambda) = H(\lambda)$.

Пусть

$$H(\lambda) = H_0 \lambda^l + H_1 \lambda^{l-1} + \dots + H_l, \tag{5}$$

где $\det H(\lambda) = \delta^{n-1}(\lambda)$, $\delta(\lambda) = h_0 \lambda^p + h_1 \lambda^{p-1} + \dots + h_p$. Очевидно, что не для каждой матрицы $H(\lambda)$ существует матрица $K(\lambda)$ такая, что $K^*(\lambda) = H(\lambda)$. Если $H(\lambda)$ — регулярная матрица, т. е. $\det H_0 \neq 0$, то матрица $K(\lambda)$ существует тогда и только тогда, когда разрешимо уравнение $XS = T$, где

$$S = \left.\left\| \begin{matrix} H_0 & H_1 & \cdots & H_l & & & \\ & H_0 & H_1 & \cdots & \cdots & H_l & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & H_0 & H_1 & \cdots & H_l \end{matrix} \right\|\right\} p - l + 1,$$

$$T = \| h_0 I_n \ h_1 I_n \dots h_p I_n \|,$$

$X = \| X_0 X_1 \dots X_{p-l} \|$, X_i, $i = 0, 1, \dots, p - l$, — неизвестные матрицы из P_n. На незаполненных местах в матрице S находятся нули. При этом если $\| K_0 K_1 \dots K_{p-l} \|$, $K_i \in P_n$, $i = 1, \dots, p - l$, — решение уравнения $XS = T$, то $K(\lambda) = K_0 \lambda^{p-l} + K_1 \lambda^{p-l-1} + \dots + K_{p-l}$. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Для регулярной матрицы* $H(\lambda)$ *вида* (5) *существует матрица* $K(\lambda)$ *такая, что* $K^*(\lambda) = H(\lambda)$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang} S = \operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} S \\ T \end{matrix} \right\|$.

Теорема 2. *Пусть характеристический многочлен* $\Delta(\lambda)$ *матрицы* $A(\lambda)$ *представим в виде* (1). *Пусть, далее,* $Z_0 = \| D_1 \dots D_{sn-s} - C_1 \dots - C_{m-s} \|$ — *решение уравнения* $ZM = N$ *и* $D(\lambda) = I_n \lambda^{sn-s} + D_1 \lambda^{sn-s-1} + \dots + D_{sn-s}$, $C(\lambda) = A_0 \lambda^{m-s} + C_1 \lambda^{m-s-1} + \dots + C_{m-s}$. *Если* $\det D(\lambda) = \varphi^{n-1}(\lambda)$, $\det C(\lambda) = \psi(\lambda)$ *и существует матрица* $B(\lambda)$ *такая, что* $B^*(\lambda) = D(\lambda)$. *то* $A(\lambda) = B(\lambda) C(\lambda)$.

Доказательство. На основании леммы 1 имеем $D(\lambda) A(\lambda) = \varphi(\lambda) C(\lambda)$. Умножая обе части этого равенства слева на матрицу $C^*(\lambda)$, получаем $C^*(\lambda) D(\lambda) A(\lambda) = \varphi(\lambda) \psi(\lambda) I_n = \Delta(\lambda) I_n$. Отсюда в силу леммы 2 следует $C^*(\lambda) D(\lambda) = A^*(\lambda)$. Теперь рассмотрим произведение $B(\lambda) C(\lambda) \times C^*(\lambda) D(\lambda) = \varphi(\lambda) \psi(\lambda) I_n = \Delta(\lambda) I_n$. С другой стороны, $B(\lambda) C(\lambda) \times C^*(\lambda) D(\lambda) = B(\lambda) C(\lambda) A^*(\lambda) = \Delta(\lambda) I_n$, откуда в силу леммы 3 имеем $B(\lambda) C(\lambda) = A(\lambda)$. Отметим, что $B(\lambda)$ — унитальная матрица степени s и $\det B(\lambda) = \varphi(\lambda)$. Теорема доказана.

Пусть $H(\lambda)$, $K(\lambda)$ и $R(\lambda)$ — неособенные матрицы из $P_n[\lambda]$.

Лемма 5. *Если произведение матриц $H(\lambda)$ и $K(\lambda)$ делится справа на $R(\lambda)$, т. е. $H(\lambda)K(\lambda) = Q(\lambda)R(\lambda)$ и $(\det H(\lambda), \det R(\lambda)) = 1$, то $K(\lambda)$ делится на $R(\lambda)$: $K(\lambda) = \tilde{K}(\lambda)R(\lambda)$.*

Доказательство. Пусть λ_1 — корень многочлена $\det R(\lambda)$ (λ_1 может принадлежать некоторому расширению P' поля P). Тогда столбцы матрицы $R(\lambda_1)$ линейно зависимы. Поэтому существует матрица $U \in GL_n(P')$ такая, что в матрице $R(\lambda_1)U$ первый столбец нулевой. Так как матрица $H(\lambda_1)$ неособенная, то из равенства $H(\lambda_1)K(\lambda_1)U = Q(\lambda_1) \times R(\lambda_1)U$ следует, что в матрице $K(\lambda_1)U$ первый столбец также нулевой, т. е. все элементы первых столбцов матриц $K(\lambda_1)U$ и $R(\lambda_1)U$ делятся на $\lambda - \lambda_1$. Поэтому $H(\lambda)K_1(\lambda)D_1(\lambda) = Q(\lambda)R_1(\lambda)D_1(\lambda)$, где $D_1(\lambda) = \mathrm{diag}\{\lambda - \lambda_1, 1, \ldots, 1\}$, $K_1(\lambda), R_1(\lambda) \in P'_n[\lambda]$. Теперь рассматриваем равенство $H(\lambda)K_1(\lambda) = Q(\lambda)R_1(\lambda)$ и проводим аналогичные рассуждения для корня λ_2 многочлена $\det R_1(\lambda)$ и т. д. Таким образом, $H(\lambda)K_q(\lambda)L(\lambda) = Q(\lambda)R_q(\lambda)L(\lambda)$, $K_q(\lambda)$, $R_q(\lambda)$, $L(\lambda) \in P'_n[\lambda]$, причем $\det R_q(\lambda) \in P'$. Отсюда имеем $K(\lambda) = K_q(\lambda)L(\lambda) = K_q(\lambda)R_q^{-1}(\lambda)R_q(\lambda)L(\lambda) = \tilde{K}(\lambda)R(\lambda)$. Так как $K(\lambda), R(\lambda) \in P_n[\lambda]$, то $\tilde{K}(\lambda) \in P_n[\lambda]$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $H(\lambda)K(\lambda) = \delta(\lambda)R(\lambda)$, $\delta(\lambda) \in P[\lambda]$ и $d_{n-1}(\lambda)$ — наибольший общий делитель миноров $(n-1)$-го порядка матрицы $K(\lambda)$. Если $(\delta(\lambda), d_{n-1}(\lambda)) = 1$, то $H(\lambda) = D(\lambda)\tilde{H}(\lambda)$, $\delta(\lambda)I_n = D(\lambda)Q(\lambda)$, $D(\lambda) \in P_n[\lambda]$, причем $\det D(\lambda) = \delta^{n-1}(\lambda)$.*

Доказательство. Существуют матрицы $U(\lambda), V(\lambda) \in GL_n(P_n[\lambda])$ такие, что $F_H(\lambda) = U(\lambda)H(\lambda)V(\lambda) = \mathrm{diag}\{h_1(\lambda), \ldots, h_n(\lambda)\}$, $h_i(\lambda) \mid h_{i+1}(\lambda)$. Тогда $U(\lambda)H(\lambda)V(\lambda)V^{-1}(\lambda)K(\lambda) = \delta(\lambda)U(\lambda)R(\lambda)$, или

$$F_H(\lambda)K_1(\lambda) = \delta(\lambda)R_1(\lambda). \tag{6}$$

Отсюда следует, что $\delta(\lambda) \mid h_i(\lambda)$ $\forall i = 2, \ldots, n$.

Действительно, допустим, что $\delta(\lambda) \nmid h_p(\lambda)$ для некоторого $p > 1$. Пусть $\delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$, $\lambda_i \in P'$, где P' — некоторое расширение поля P. Тогда для некоторого λ_s $(\lambda - \lambda_s)^{k_s} \nmid h_p(\lambda)$, т. е. $h_p(\lambda) = (\lambda - \lambda_s)^{l_p} g_p(\lambda)$, $g_p(\lambda_s) \neq 0$, $0 \leqslant l_p < k_s$. Так как $h_i(\lambda) \mid h_p(\lambda)$ для $i < p$, то $h_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_s)^{l_i} g_i(\lambda)$, $g_i(\lambda_s) \neq 0$, $0 \leqslant l_i \leqslant l_p$, $i = 1, \ldots, p-1$. Теперь соотношение (6) представим в виде

$$S(\lambda)\,\mathrm{diag}\{g_1(\lambda), \ldots, g_p(\lambda), h_{p+1}(\lambda), \ldots, h_n(\lambda)\} =$$

$$= S(\lambda)\,\mathrm{diag}\{\delta_1(\lambda), \ldots, \delta_p(\lambda), \delta(\lambda), \ldots, \delta(\lambda)\},$$

где $S(\lambda) = \mathrm{diag}\{(\lambda - \lambda_s)^{l_1}, \ldots, (\lambda - \lambda_s)^{l_p}, 1, \ldots, 1\}$, $\delta_i(\lambda) = \delta(\lambda)/(\lambda - \lambda_s)^{l_i}$, $i = 1, \ldots, p$. Отсюда

$$H_1(\lambda)K_1(\lambda) = Q_1(\lambda)R_1(\lambda), \tag{7}$$

где $H_1(\lambda) = \mathrm{diag}\{g_1(\lambda), \ldots, g_p(\lambda), h_{p+1}(\lambda), \ldots, h_n(\lambda)\}$, $Q_1(\lambda) = \mathrm{diag}\{\delta_1(\lambda), \ldots, \delta_p(\lambda), \delta(\lambda), \ldots, \delta(\lambda)\}$. Поскольку $\delta_i(\lambda_s) = 0$, $i = 1, \ldots, p$, то из (7) следует $\mathrm{rang}(H_1(\lambda_s)K_1(\lambda_s)) = 0$. Тогда, используя неравенство Сильвестра о ранге произведения матриц, получаем $\mathrm{rang}\, H_1(\lambda_s) \leqslant 1$. С другой стороны, $\mathrm{rang}\, H_1(\lambda_s) \geqslant p > 1$, ибо $g_i(\lambda_s) \neq 0$, $i = 1, \ldots, p$. Пришли к противоречию. Таким образом, $\delta(\lambda) \mid h_i(\lambda)$, $i = 2, \ldots, n$. Поэтому имеем $F_H(\lambda) = L(\lambda)H_2(\lambda)$, $\delta(\lambda)I_n = L(\lambda)Q_2(\lambda)$, где $L(\lambda) = \mathrm{diag}\{1, \delta(\lambda), \ldots, \delta(\lambda)\}$. Отсюда $H(\lambda) = U^{-1}(\lambda)L(\lambda)H_3(\lambda)$, $\delta(\lambda)I_n = U^{-1}(\lambda)L(\lambda)Q_3(\lambda)$, т. е. матрицы $H(\lambda)$ и $\delta(\lambda)I_n$ делятся справа на $D(\lambda) = U^{-1}(\lambda)L(\lambda)$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ матрицы $A(\lambda)$ представим в виде (1) и $(\varphi(\lambda), \psi(\lambda)) = \delta(\lambda)$; $d_{n-1}(\lambda)$ — наибольший общий делитель миноров $(n-1)$-го порядка матрицы $A(\lambda)$. Если $(\delta(\lambda), d_{n-1}(\lambda)) = 1$, то $A(\lambda)$ допускает факторизацию $A(\lambda) = B(\lambda)C(\lambda)$, где $B(\lambda)$ — унитальная матрица степени s и $\det B(\lambda) = \varphi(\lambda)$, $\det C(\lambda) = \psi(\lambda)$*

тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \right\|$. *При этом если*

$$Z_0 = \| D_1 \dots D_{sn-s} - C_1 \dots - C_{m-s} \| \tag{8}$$

— решение уравнения $ZM = N$, *то* $B(\lambda) = I_n\lambda^s + B_1\lambda^{s-1} + \dots + B_s$, $C(\lambda) = A_0\lambda^{m-s} + C_1\lambda^{m-s-1} + \dots + C_{m-s}$, *где* $B^*(\lambda) = D(\lambda) = I_n\lambda^{sn-s} + D_1\lambda^{sn-s-1} + \dots + D_{sn-s}$ *— присоединенная матрица для* $B(\lambda)$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1.

Достаточность. Если $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \right\|$, то уравнение $ZM = N$ разрешимо. Пусть матрица (8) — его решение. Тогда в силу леммы 1

$$D(\lambda) A(\lambda) = \varphi(\lambda) C(\lambda). \tag{9}$$

Многочлен $\varphi(\lambda)$ представим в виде $\varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)$, где $(\varphi_1(\lambda), d_{n-1}(\lambda)) = 1$ и $(\varphi_2(\lambda), \psi(\lambda)) = 1$. Тогда, применяя лемму 6 к соотношению (9), получаем $Q(\lambda) D_1(\lambda) A(\lambda) = Q(\lambda) R(\lambda) C(\lambda)$, $\det Q(\lambda) = \varphi_1^{n-1}(\lambda)$, откуда

$$D_1(\lambda) A(\lambda) = R(\lambda) C(\lambda). \tag{10}$$

Переходя в (10) к определителям, имеем $\det D_1(\lambda)\varphi(\lambda)\psi(\lambda) = \varphi_1(\lambda)\varphi_2^n(\lambda) \times \det C(\lambda)$, или $\det D_1(\lambda)\psi(\lambda) = \varphi_2^{n-1}(\lambda) \det C(\lambda)$, откуда следует $\det D_1(\lambda) = \varphi_2^{n-1}(\lambda) d(\lambda)$. Сопоставляя степени многочленов $\det D(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$, находим $\det D_1(\lambda) = \varphi_2^{n-1}(\lambda)$, следовательно, $\det D(\lambda) = \varphi^{n-1}(\lambda)$ и $\det C(\lambda) = \psi(\lambda)$. Теперь из (10) на основании леммы 5 вытекает, что $A(\lambda) = B(\lambda) C(\lambda)$. Тогда (9) принимает вид $D(\lambda) B(\lambda) C(\lambda) = \varphi(\lambda) C(\lambda)$ или $D(\lambda) B(\lambda) = \varphi(\lambda) I_n$. Отсюда в силу леммы 3 следует $B^*(\lambda) = D(\lambda)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть характеристический многочлен* $\Delta(\lambda)$ *матрицы* $A(\lambda)$ *представим в виде* (1). *Если* $(\varphi(\lambda), \psi(\lambda)) = 1$, *то* $A(\lambda)$ *представима в виде произведения* (2) *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \right\|$.

Следствие 2. *Пусть* $A(\lambda)$ *— многочленная матрица, элементарные делители которой попарно взаимно просты, и пусть ее характеристический многочлен* $\Delta(\lambda)$ *представим в виде* (1). *Тогда матрица* $A(\lambda)$ *допускает факторизацию вида* (2) *в том и только том случае, когда* $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \right\|$.

В условиях теоремы 3 множители $B(\lambda)$ и $C(\lambda)$ своими характеристическими многочленами $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ определяются однозначно [6]. Поэтому из теоремы 3 получаем такие следствия.

Следствие 3. *Пусть* $A(\lambda)$ *— многочленная матрица над полем* P, *элементарные делители которой попарно взаимно просты и все ее характеристические корни принадлежат* P. *Если* $A(\lambda)$ *неразложима на множители (первый из которых унитальный) над полем* P, *то* $A(\lambda)$ *неразложима и над любым алгебраически замкнутым расширением* P' *поля* P.

Следствие 4. *Пусть* $A(\lambda)$ *— действительная многочленная матрица* ($A(\lambda) \in R_n[\lambda]$), *элементарные делители которой попарно взаимно просты и все ее характеристические корни действительные. Тогда каждый ее унитальный делитель действителен.*

1. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр. мат журн.— 1980.— 32, № 4.— С. 483—498.
2. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники.—К. : Наук. думка, 1981.— 224 с.
3. *Малышев А. Н.* Факторизация матричных полиномов // Сиб. мат. журн.— 1982.— 23, № 3.— С. 136—146.
4. *Петричкович В. М.* О линейных делителях и приводимости многочленных матриц // Укр. мат. журн.— 1984.— 36, № 2.— С. 195—200.
5. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrix polynomials.— New York; London : Academie Press, 1982.— 410 p.

6. *Грига Б. С., Казимирский П. С.* К вопросу единственности выделения унитального множителя из матричного многочлена // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976.— С. 15—18.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 04.09.84