УДК 517.9

М. Волленберг, В. Д. Кошманенко

Обобщенные асимптотические постоянные

1. Пусть $\mathscr{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство и H — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$. Обозначим $U_t := \exp(-itH)$, $t \in \mathbb{R}^1$. Ограниченный оператор X в $\mathscr{H}$ называется гладкой асимптотической постоянной для H, если $U_{-t}XU_t$ сходится очень быстро при $t \to +\infty$ (или $t \to -\infty$) к пределу на некотором множестве векторов (подробнее см. в [1 — 3]).

В последнее время в связи с приложениями в квантовой физике появилась необходимость обобщить это понятие на неограниченные и даже незамыкаемые операторы (см., например, [4—7]). Так, в современной формулировке теории рассеяния Хаага — Рюэля [4, 8, 9] возникает, вообще говоря, незамыкаемый оператор J (оператор отождествления) такой, что $JU_t\,u$ очень быстро сходится на специальном множестве векторов u. Аналогичным свойством обладают и некоторые классы неограниченных наблюдаемых в квантовой механике. Отметим также, что близкие объекты появляются и в различных конструктивных подходах в квантовой теории поля и задаче рассеяния.

Цель данной работы — ввести обобщенное понятие асимптотической постоянной, дать его характеристику, изучить простейшие свойства.

2. Вектор $u \in \mathscr{H}$ называется преходящим для оператора H, если $|(u, U_tu)| < c_n(1 + |t|)^{-n}$, $t \in \mathbb{R}^1$, $n \in \mathscr{N}$ ($\mathscr{N}$ — натуральный ряд чисел) [10]. Линейная оболочка множества всех преходящих векторов образует подпространство $\mathcal{H}^t(H)$, инвариантное относительно U_t. Отметим следующие факты [3, 10].

(A). Ортопроектор P_H^t на $\mathcal{H}^t(H)$ является спектральным проектором, т. е. существует борелевское множество Δ такое, что $P_H^t = E_H(\Delta)$, где $E_H(\lambda)$ — разложение единицы оператора H.

(B). $P_H^t \leqslant P_{H,ac}$, причем в большинстве приложений справедливо равенство.

(C). Всегда существует преходящее многообразие D, т. е. линейное многообразие, каждый вектор которого является преходящим, плотное в $\mathcal{H}^t(H)$ и такое, что для каждого $u \in D$ имеется ограниченный замкнутый интервал Δ такой, что $u = E_H(\Delta)u$.

Далее мы рассматриваем операторы $X: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, где $\mathcal{H}_1 \equiv \mathcal{H}$, а $\mathcal{H}_2$ — произвольное гильбертово пространство; D — преходящее многообразие, плотное в $\mathcal{H}_1^t(H)$ и такое, что $U_t D \subset D$.

Определение. *Линейный оператор $X: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ назовем обобщенной асимптотической постоянной для оператора H на многообразии D, если 1) $D \subseteq \operatorname{dom} X$, $\mathbb{R}_+ \ni t \to XU_t u$ сильно непрерывно для $u \in D$; 2) существует линейный оператор $X_+: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ такой, что $D \subseteq \operatorname{dom} X_+$, $X_+ U_t u = X_+ u$, $t \in \mathbb{R}^1$, $u \in D$, $X_+ = X_+ P_H^t$ и*

$$\| XU_t u - X_+ u \| \leqslant c_{n,u} (1 + |t|)^{-n}, \quad t \geqslant 0, \quad n \in \mathcal{N}. \tag{1}$$

Множество всех таких операторов обозначим через $l_+(D, H)$. Подмножество операторов $X \in l_+(D, H)$, для которых $X_+ = 0$, обозначим через $l_+^0(D, H)$.

Аналогично можно ввести множества операторов $l_-(D, H)$ и $l_-^0(D, H)$. Мы здесь ограничиваемся изучением множеств только со знаком плюс.

Замечания 1. В случае, когда X замыкаем, легко убедиться, что $X_+ = 0$ — единственная возможность. Так что $X_+ \neq 0$ — типичный феномен незамыкаемости. 2. Поведение X_+ на подпространстве $(1 - P_H^t)\mathcal{H}_1$ произвольно. Поэтому в дальнейшем полагаем $P_H^t = 1$.

Предложение 1. а). *$l_+(D, H)$ — линейное пространство.* б). *Если Y — ограниченный оператор в $\mathcal{H}_2$, а $X \in l_+(D, H)$, то $YX \in l_+(D, H)$ также.* в). *Для каждого $X \in l_+(D, H)$ справедливо представление $X = X_0 + X_+$, где $X_0 \in l_+^0(D, H)$, а X_+ обладает при всех $t \in \mathbb{R}^1$ свойством $X_+ U_t u = X_+ u$, $u \in D$. Обратно, если $X = X_0 + X_+$ и X_0, X_+ такие, как выше, то $X \in l_+(D, H)$.*

Доказательство тривиально.

3. Из предложения 1 следует, что операторы $X \in l_+(D, H)$ в значительной степени характеризуются своей компонентой $X_0 \in l_+^0(D, H)$. Поэтому изучим свойства множества $l_+^0(D, H)$.

Введем на $l_+^0(D, H)$ систему полунорм (ср. с [11]):

$$p_{n,u}(X) := \sup_{t \geqslant 0} (1 + |t|)^n \| XU_t u \|, \quad u \in D, \quad n \in \mathcal{N}.$$

Соответствующую топологию на $l_+^0(D, H)$ называем τ-топологией. Последовательность $C_n \in l_+^0(D, H)$ назовем фундаментальной в τ-топологии, если $p_{n,u}(C_m - C_s) \to 0$, $m, s \to \infty$, для всех $u \in D$, $n \in \mathcal{N}$; C_n по определению сходится в τ-топологии к $C \in l_+^0(D, H)$, если $p_{n,u}(C_m - C) \to 0$, $m \to \infty$, для всех $u \in D$, $n \in \mathcal{N}$.

Предложение 2. *Множество $l_+^0(D, H)$ секвенциально замкнуто в τ-топологии, т. е. каждая фундаментальная в τ-топологии последовательность C_m имеет предел $C \in l_+^0(D, H)$.*

Доказательство. Понятно, что для последовательности C_m имеется оператор C такой, что $\lim\limits_{m \to \infty} p_{n,u}(C_m - C) = 0$ и $p_{n,u}(C) < \infty$, $u \in D$,

$n \in \mathcal{N}$. Нужно лишь доказать, что $CU_t u$, $u \in D$, сильно непрерывно по t. Имеем

$$\| CU_t u - CU_{t+\delta} u \| \leqslant \| (C - C_m) U_t u \| +$$
$$+ \| (C - C_m) U_{t+\delta} u \| + \| C_m (U_t - U_{t+\delta}) u \|.$$

Поскольку $p_{0,u}(C_m - C) = \sup\limits_{t \geqslant 0} \| (C_m - C) U_t u \| \to 0$, $m \to \infty$, то первое и второе слагаемые справа меньше произвольного $\varepsilon > 0$ для всех t и δ, если $m > N(\varepsilon)$. Фиксируем $m > N(\varepsilon)$ и находим, что третье слагаемое меньше, чем ε для достаточно малого δ, так как $C_m U_t u$ сильно непрерывно по t. Ввиду произвольности ε это доказывает сильную непрерывность $CU_t u$ по $t \in \mathbb{R}_+$.

4. Покажем, что каждый элемент из $l_+^0(D, H)$ является пределом в τ- топологии последовательности конечномерных операторов из $l_+^0(D, H)$.

Теорема 1. *Множество $l_+^0(D, H)$ совпадает с замкнутой в τ-топологии линейной оболочкой множества обобщенных конечномерных асимптотических постоянных.*

Доказательство. Пусть P_N — последовательность ортопроекторов, $\dim P_N = N$, $\lim\limits_{N \to \infty} P_N = 1$, и оператор $X \in l_+^0(D, H)$ фиксирован. Рассмотрим последовательность $X_N := P_N X$. Очевидно, что операторы $X_N \in \in l_+^0(D, H)$. Убедимся, что $p_{n,u}(X_N - X) \to 0$, $N \to \infty$. Имеем

$$p_{n,u}(X_N - X) = p_{n,u}((1 - P_N) X) = \sup_{t \geqslant 0} (1 + |t|)^n \| (1 - P_N) XU_t u \| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \sup_{t \in [0, T(\varepsilon)]} (1 + |t|)^n \| (1 - P_N) XU_t u \| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + (1 + T(\varepsilon))^n \sup_{t \in [0, T(\varepsilon)]} \| (1 - P_N) XU_t u \|.$$

Используем условие сильной непрерывности $w_t := XU_t u$ на финитном интервале $[0, T(\varepsilon)]$. Как следствие получаем компактность множества $\{w_t \mid t \in [0, T(\varepsilon)]\}$. Поэтому последовательность $(1 - P_N)$ на этом множестве сходится к нулю равномерно. Это обеспечивает стремление к нулю всей правой части при $N \to \infty$.

Если интересоваться только ограниченными операторами $X \in l_+^0(D, H)$ (гладкими асимптотическими постоянными), то естественно вводить топологию с помощью полунорм $p_{n,v}(X) := \| Xv \| + \sup\limits_{t \geqslant 0} (1 + |t|)^n \| XU_t u \|$, $u \in D$, $v \in \mathcal{H}_1$, $n \in \mathcal{N}$. Предложения 1, 2 и теорема 1 справедливы и в этом случае.

Имеется также возможность вводить обобщенные асимптотические постоянные в слабом смысле, заменяя $s - \lim$ в данном выше определении на $w - \lim$ и оценку (1) на $|(v, U_{-t}(X - X_+) U_t u)| \leqslant c_{n,u,v}(1 + |t|)^{-n}$. Очевидно, что при соответствующей модификации полунорм справедливы утверждения, аналогичные предложениям 1, 2 и теореме 1.

5. Для асимптотических постоянных (как и для волновых операторов) справедлив аналог принципа инвариантности (см. [4, 12]). Оказывается, что в случае обобщенных асимптотических постоянных также имеет силу подобный принцип, т. е. существование $s - \lim\limits_{t \to \infty} \exp(itH) J \exp(-itH) u$ влечет существование $s - \lim\limits_{t \to \infty} \exp(it\varphi(H)) J \exp(-it\varphi(H)) u$ и их равенство при выполнении дополнительных предположений на φ и J. Но здесь нам необходимо, чтобы быстрая сходимость $JU_t u$ влекла такую же сходимость $J \exp(-it\varphi(H)) u$. Очевидно это требует более сильных дополнительных предположений на φ, J и вектор u.

Для простоты ограничимся вещественными функциями $\varphi(\cdot)$ такими, что 1) $\varphi(\cdot)$ определена на открытом множестве Δ_H, содержащем спектр H; 2) $\varphi(\cdot)$ есть C^∞-функция на Δ_H; 3) $\varphi'(x) > 0$ на Δ_H. Такие функции назовем допустимыми для H. Позже сделаем некоторые замечания об'обобщении этого определения.

Сначала необходимо показать, что при незначительных дополнительных предположениях преходящие векторы для H являются такими же для $\varphi(H)$, а также что $P_H^t = P_{\varphi(H)}^t$. С этой целью докажем следующий факт.

Лемма *Пусть* φ — *допустимая функция для* H. *Пусть* $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ *и* $\operatorname{supp} g \subset \Delta_H$. *Пусть функция* $v \geqslant 0$ *непрерывна на* $\mathbb{R}^1$, $v(s) \leqslant d_n(1 + |s|)^{-n}$ $\forall\ s \geqslant 0$, $n \in \mathcal{N}$ *и* $v(s) \leqslant b(1+|s|)^m$ *для* $s \leqslant 0$ *с некоторыми* $m \in \mathcal{N}$, $b \geqslant 0$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} |G(t,s)|\, v(s)\, ds \leqslant a_n(1+(t))^{-n}, \quad t \geqslant 0, \quad n \in \mathcal{N}, \tag{2}$$

где

$$G(t,s) := (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \exp(isx - t\varphi(x))\, g(x)\, dx.$$

Если же $v(s) \leqslant d_n(1+|s|)^{-n}$ $\forall\ s \in \mathbb{R}^1$, $n \in \mathcal{N}$, *то* (2) *выполняется* $\forall t \in \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Определим $V := \{x \mid x = \varphi'(y),\ y \in \operatorname{supp} g\}$ и зафиксируем числа $c > a > 0$ так, чтобы $V \subset [a, c]$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $a - \varepsilon > 0$. Тогда для всех s, t таких, что $s/t \in [a-\varepsilon, c+\varepsilon]$, имеем оценку $|G(t,s)| \leqslant c_m(1+|s|+|t|)^{-m}$ $\forall m \in \mathcal{N}$ (см. [13, с. 49]). Согласно этой оценке с учетом того, что $|G(t,s)| \leqslant a$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} |G(t,s)|\, v(s)\, ds \leqslant \int\limits_{-\infty}^{t(a-\varepsilon)} c_{m+n+2}(1+|s|+|t|)^{-(m+n+2)} \times$$

$$\times\, b(1+|s|)^m ds + \int\limits_{t(a-\varepsilon)}^{t(a+\varepsilon)} a d_{n+1}(1+|s|)^{-(n+1)} ds +$$

$$+ \int\limits_{t(a+\varepsilon)}^{\infty} c_n(1+|s|+|t|)^{-n} d_2(1+|s|)^{-2} ds \leqslant a_n(1+|t|)^{-n}, \quad t \geqslant 0.$$

Последняя часть леммы доказывается аналогично.

Предложение 3. а). *Пусть* φ — *допустимая функция для* H. *Тогда* $P_H^t = P_{\varphi(H)}^t$. б). *Пусть* D — *преходящее многообразие, обладающее свойством* (С) *из п.* 2. *Тогда* D *является преходящим многообразием для оператора* $\varphi(H)$.

Доказательство. Предположим, что б) доказано. Это дает $P_H^t \leqslant P_{\varphi(H)}^t$. Так как φ обратима на $\varphi(\Delta_H)$, обратная функция φ^{-1} допустима для $K := \varphi(H)$. Поэтому можно проводить все вычисления с заменой H на K, $\varphi(H)$ на H, φ на φ^{-1}. Это дает $P_{\varphi(H)}^t \leqslant P_H^t$. Таким образом, доказательство утверждения а) сводится к доказательству утверждения б).

Пусть $u \in D$. Согласно предположению на D существует функция $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ такая, что $g(H)u = u$ и $\operatorname{supp} g \subset \Delta_H$. Поэтому имеем

$$\exp(-it\varphi(H))\, u = \exp(-it\varphi(H))\, g(H)\, u = \int G(t,s) \exp(-isH)\, u ds,$$

где G определена как в лемме 1. Интеграл существует в сильном смысле. Отсюда получаем

$$|(v, \exp(-it\varphi(H))\, u)| \leqslant \int |G(t,s)|\, |(v, \exp(-isH)\, u)|\, ds$$

для $v \in D$. Теперь имеем $|(v, \exp(-isH)\, u)| \leqslant c_n(1+|s|)^{-n}$ для $s \in \mathbb{R}^1$, $n \in \mathcal{N}$, поскольку u, v являются преходящими векторами из D. Применяя лемму 1 к этой оценке, находим

$$|(v, \exp(-it\varphi(H)\, u)| \leqslant a_n(1+|t|)^{-n}, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad n \in \mathcal{N}.$$

Таким образом, D — преходящее многообразие для $\varphi(H)$.

Естественно поставить следующий вопрос: является ли элемент X, принадлежащий $l_+(D, H)$, также элементом из $l_+(D, \varphi(H))$, если φ — допустимая функция? При некоторых предположениях ответ положителен.

Теорема 2. *Пусть $X \in l_+(D, H)$ и X_+ — его предел. Пусть φ — допустимая функция для H. Предположим, что*

1) *D обладает свойством* (С) *из п. 2; кроме того, если $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, то требуем, чтобы $\alpha(H) D \subseteq D$;*

2) *$\mathbb{R}^1 \ni t \to XU_t u$, $u \in D$, сильно непрерывно и $\|(X - X_+) U_t u\| \leqslant c_m (1 + |t|)^m$ для $t \leqslant 0$ и некоторых c_m, $m \geqslant 0$;*

3) *если α_n, $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$,* и *$\alpha_n$ сходится в C_0^∞ к α, то сильная сходимость векторов $X\alpha_n(H) u$, $u \in D$, влечет $s - \lim\limits_{n\to\infty} X\alpha_n(H) u = X\alpha(H) u$.*

Тогда $X \in l_+(D, \varphi(H))$ и X_+ — его предел.

Доказательство. Согласно предложению 3 D — преходящее многообразие для $\varphi(H)$ и оно плотно в $P^t_{\varphi(H)}\mathcal{H}$. В силу условия 1 и свойств φ справедливо включение $\exp(-it\varphi(H)) D \subseteq D$. Если оператор $X - X_+$ ограничен, то имеем ($u \in D$)

$$(X - X_+) \exp(-it\varphi(H)) u = \int G(t, s)(X - X_+) \exp(-isH) u, \tag{3}$$

где G определена в лемме, а $u = g(H) u$ (такая функция g существует, причем $g \in C_0^\infty$ в силу условия 1). Для операторов X, удовлетворяющих условию 3 в смысле слабой сходимости, (3) доказано в [5]. Далее, согласно предположениям теоремы условие 3 выполнено для X, а так как $X_+ U_t u = X_+ u$, то и для X_+, а следовательно, и для $X - X_+$. Теперь из (3) получаем

$$\|(X - X_+) \exp(-it\varphi(H)) u\| \leqslant \int |G(t, s)| \, \|(X - X_+) \exp(-isH) u\| \, ds.$$

Снова используя лемму, находим

$$\|(X + X_+) \exp(-it\varphi(H) u\| \leqslant a_{n,u}(1 + |t|)^{-n}, \quad u \in D, \quad n \in \mathcal{N}.$$

Осталось показать, что $X \exp(-it\varphi(H))$ сильно непрерывно по $t \in [0, \infty)$ Это следует из оценки

$$\|X(\exp(-it\varphi(H)) - \exp(-i(t + \delta)\varphi(H))) u\| \leqslant$$
$$\leqslant \int |G(t, s) - G(t + \delta, s)| \, \|X \exp(-isH) u\| \, ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int \left[\int \exp(isx)[1 - \exp(-i\delta\varphi(x))] \exp(-it\varphi(x)) g(x) \, dx \right] \times$$
$$\times \|\exp(-isH) u\| \, ds$$

с помощью следующей аргументации. Функция $[1 - \exp(-i\delta\varphi(x))] \times \exp(-it\varphi(x)) g(x)$ стремится к нулю в пространстве Шварца, когда $\delta \to 0$ при каждом фиксированном t. Поэтому преобразование Фурье также сходится к нулю в том же смысле. Используя это, а также неравенство $\|X \exp(-isH) u\| \leqslant b(1 + |s|)^m$, $b \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, получаем, что правая сторона приведенной оценки стремится к нулю при $\delta \to 0$.

Заметим, что предположения 2 и 3 обусловлены неограниченностью (незамыкаемостью) оператора X. Если X замыкаем, то предположение 3 автоматически удовлетворено, а если X ограничен, то можно опустить предположения 2 и 3. Отметим еще, что оператор отождествления J в задаче рассеяния квантовой теории поля удовлетворяет предположениям теоремы 2 (см. [4—6]). Следовательно, этот оператор является обобщенной асимптотической постоянной для всех операторов $\varphi(H)$, если φ — допустимая функция.

Лемму, предложение 3 и теорему 2 можно распространить на случай, когда φ кусочно-допустима, т. е. допустима отдельно на каждом из интервалов при некотором разбиении Δ_H. Точную формулировку соответствующих утверждений мы не приводим.

Примеры. а). Пусть $\mathcal{H} = L^2(\Delta; d\lambda, \mathfrak{N})$, где Δ — финитный интервал, а $\mathfrak{N}$ — произвольное гильбертово пространство. Пусть H — мультипликатор на λ, а $D = C_0^\infty(H)$. Очевидно, что $P_H^t = 1$ и D является преходящим многообразием для H. Зададим оператор X: $(Xu)(\lambda) := v(\lambda) \int \mu^r (w, u(\mu))_{\mathfrak{N}} d\mu$, где $w \in \mathfrak{N}$, $v \in \mathcal{H}$, $r \in \mathcal{N}$. Тогда $\rho(t) = \int \mu^r (w, (U_t u)(\mu))_{\mathfrak{N}} d\mu = \int d\mu^r (w, u(\mu))_{\mathfrak{N}} \times \times \exp(-it\mu)$ является преобразованием Фурье шварцевской функции. Поэтому $\| XU_t u \| = \| v \| \| \rho(t) \|$ убывает к нулю скорее любой степени от $|t|^{-1}$, т. е. $X \in l_+^0(D, H)$.

б). Пусть $\mathcal{H} = F$ — пространство Фока над $L^2(\mathbb{R}^3; d^3x)$, а H — оператор энергии свободного поля (см. [13]). Очевидно, $P_H^t \mathcal{H} = P_{H,ac} \mathcal{H} = \mathcal{H} \ominus \ominus \mathbb{C}$. Определим D как линейное подмножество в $\mathcal{H}$, состоящее из всех функций класса C_0^∞. Очевидно, D является преходящим многообразием для H. В качестве X рассмотрим оператор уничтожения $a^-(x_0)$ в фиксированной точке $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Это, как известно, незамыкаемый в F оператор. В то же время нетрудно убедиться, что $a^-(x_0)$ является обобщенной асимптотической постоянной для H с $X_+ = 0$, т. е. $a^-(x_0) \in l_+^0(D, F)$.

1. *Baumgartel H., Wollenberg M.* Interpolating asymptotic constants for the Poincare group, in particular on Fock space // Math. Nachr.— 1984.— **119**.— P. 15—40.
2. *Baumgartel H., Wollenberg M.* A class of Nontrivial weakly local massive Wightman fields with interpolating properties // Communs Math. Phys.— 1984.— **94**.— P. 331—352.
3. *Wollenberg M.* Smooth acymptotic constants // Math. Nachr.— 1986.— **126**.— P. 239—251.
4. *Baumgartel H., Wollenberg M.* Mathematical scattering theory.— Berlin : Akademie Verlag, 1983.— 449 p.
5. *Koshmanenko V. D., Neidhardt H., Wollenberg M.* On the scattering theory with unbounded identification operator.— Berlin, 1983.— 31 p.— (Preprint, Inst. fur Math.).
6. *Волленберг М., Найдхардт Х., Кошманенко В. Д.* К задаче рассеяния в теории сингулярных возмущений самосопряженных операторов //Укр. мат. журн. — 1984. — **36**, № 1.— С. 7—12.
7. *Кондратьев Ю. Г., Кошманенко В. Д.* Задача рассеяния для операторов, ассоциированных с формами Дирихле // Докл. АН СССР.— 1982.— **267**, № 2.— С. 285—288.
8. *Кошманенко В. Д.* Теория рассеяния Хаага—Рюэля как теория рассеяния в различных пространствах состояний // Теорет. и мат. физика.— 1979.— **38**, № 2.— С. 163—178.
9. *Глимм Дж., Джаффе А.* Математические методы квантовой физики.— М. : Мир, 1984.— 445 с.
10. *Avron J., Simon B.* Transient and recurrent spectrum// J. Funct. Anal.—1981.—**43**, N 1.— P. 1—31.
11. *Baumgartel H.* Zueinem problem von M. G. Krien // Math. Nachr.— 1973.— **58**.— P. 279—294.
12. *Wollenberg M.* On the invariance principle of scattering theory with two Hilbert spaces // Ibid.— 1977.— **79**.— P. 265—269.
13. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Теория рассеяния.— М.: Мир, 1982.— Т. 3.— 443 с.

Ин-т математики АН ГДР, Берлин
Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 27.09.85