УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов

О неравенствах для производных полиномов с вещественными нулями

Для алгебраических полиномов $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ положим $\| P_n \| = \max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} | P_n(x) |$, для тригонометрических полиномов $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — $\| T_n \| = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} | T_n(x) |$.

В [1] доказано, что если все n нулей $P_n(x)$ лежат в $[-1, 1]$, то

$$\| P_n' \| \geqslant C \sqrt{n} \| P_n \|, \tag{1}$$

где C — абсолютная константа (в [1] она равна 1/6). Аналогичное неравенство для тригонометрических полиномов, имеющих только вещественные нули, установлено в [2]. Докажем точные неравенства типа (1) для вторых производных алгебраических и тригонометрических полиномов.

Теорема 1. *Если все n нулей алгебраического полинома $P_n(x)$, $n = 2, 3, \ldots$, лежат в $[-1, 1]$, то*

$$\| P_n'' \| \geqslant \min\{n, (n-1) n/4\} \| P_n \|. \tag{2}$$

При этом $\min\{n, (n-1)n/4\} = (n-1)n/4$, если $n = 2, 3, 4, 5$, и (2) обращается в равенство только для полиномов вида $P_n(x) = a(x \pm 1)^n$. Если $n \geqslant 6$, то $\min\{n, (n-1)n/n\} = n$, и при четных $n = 2m$ равенство в (2) выполняется только для полиномов вида $P_n(x) = a(x-1)^m (x+1)^m$, где $a \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Если тригонометрический полином $T_n(x)$ порядка n, $n = 1, 2, \ldots$, имеет (с учетом кратности) $2n$ нулей в $[0, 2\pi)$, то*

$$\| T_n'' \| \geqslant \frac{n}{2} \| T_n \|. \tag{3}$$

При этом равенство в (3) выполняется только для полиномов вида

$$T_n(x) = a \left(\sin \frac{x - \gamma}{2} \right)^{2n}. \tag{4}$$

Для тригонометрических полиномов $T_n(x)$, все нули которых вещественны, докажем также точное неравенство типа (3) с $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} | \Delta_h^2 T_n(x) | = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} | T_n(x+h) - 2T_n(x) + T_n(x-h) |$ вместо $\| T_n'' \|$ в левой части. Обозначим через (T_n) минимальное расстояние между различными нулями тригонометрического полинома $T_n(x)$.

Теорема 3. *Если тригонометрический полином $T_n(x)$ порядка n, $n = 1, 2, \ldots$, имеет (с учетом кратности) $2n$ нулей в $[0, 2\pi)$ и $0 < h < \min\{h(T_n'), 2\arccos(1/2)^{1/2n}\}$, то*

$$\max_{x \in \mathbb{R}} | \Delta_h^2 T_n(x) | \geqslant 2(1 - (\cos h/2)^{2n}) \| T_n \|. \tag{5}$$

При этом для полиномов вида (4) (*и только для них*) *в* (5) *выполняется равенство.*

Как следствие из (5), конечно, можно получить (3).

Доказательство теоремы 1. Если все n нулей полинома $P_n(x)$ лежат в $[-1,1]$, то $P_n(x)$ можно представить в виде $P_n(x) = a\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$, где $a\in\mathbb{R}$, $-1\leqslant x_1\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant 1$. Для $x\neq x_k$, $k=1,\ldots,n$, положим $\Sigma(x)=\sum_{k=1}^{n}(x-x_k)^{-1}$. Ясно, что $\Sigma'(x)=-\sum_{k=1}^{n}(x-x_k)^{-2}$. Если $x\neq x_k$, $k=1,\ldots,n$, то, как легко проверить,

$$P_n'(x)=P_n(x)\Sigma(x),\ P_n''(x)=P_n'(x)\Sigma(x)+P_n(x)\Sigma'(x)=$$
$$=P_n(x)(\Sigma^2(x)+\Sigma'(x)). \tag{6}$$

Предположим сначала, что

$$\|P_n\|=|P_n(x_0)|, \tag{7}$$

где $x_0\in(-1,1)$. Тогда $P_n'(x_0)=0$ и поскольку, очевидно, $P_n(x_0)\neq 0$, $\Sigma(x_0)=0$. В силу второго из соотношений (6)

$$|P_n''(x_0)|=|P(x_0)||\Sigma'(x_0)|. \tag{8}$$

Докажем, что $|\Sigma'(x_0)|\geqslant n$. Действительно, учитывая, что $\Sigma(x_0)=0$ и $|x_k|\leqslant 1$ для $k=1,\ldots,n$, получаем

$$n=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_0-x_k}{x_0-x_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{-x_k}{x_0-x_k}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{|\Sigma'(x_0)|}\sqrt{n},$$

так что $\sqrt{n}\leqslant\sqrt{|\Sigma'(x_0)|}$ и требуемое доказано.

Теперь ввиду (7) и (8) получаем

$$\|P_n''\|\geqslant|P_n''(x_0)|\geqslant n|P(x_0)|=n\|P_n\|. \tag{9}$$

Теперь предположим, что максимум $|P_n(x)|$ достигается в одном из концов отрезка $[-1,1]$ (для определенности пусть $\|P_n\|=P(1)$). Ввиду второго из соотношений (6)

$$|P_n''(1)|=|P(1)|(\Sigma^2(1)+\Sigma'(1))=$$
$$=|P(1)|\left(\sum_{k=1}\frac{1}{(1-x_k)^2}-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-x_k}\right)^2\right)=2|P(1)|\sum_{i<j}\frac{1}{(1-x_i)(1-x_j)}.$$

Поскольку в последней сумме $n(n-1)/2$ слагаемых и для всех i, j $1/((1-x_i)(1-x_j))\geqslant 1/4$, получаем

$$\sum_{i<j}\frac{1}{(1-x_i)(1-x_j)}\geqslant\frac{n(n-1)}{8}, \tag{10}$$

так что

$$\|P_n''\|\geqslant|P_n''(1)|\geqslant 2|P_n(1)|\left|\sum_{i<j}\frac{1}{(1-x_i)(1-x_j)}\right|\geqslant$$
$$\geqslant 2|P_n(1)|\frac{n(n-1)}{8}=\frac{n(n-1)}{4}\|P_n\|. \tag{11}$$

Сопоставляя (10) и (11), получаем соотношение (2).

Утверждение об обращении неравенства (2) в равенство для полиномов соответствующего вида проверяется простым вычислением. Утверждение о том, что равенство в (2) выполняется только для таких полиномов, легко усматривается из приведенного доказательства. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Если все нули полинома $T_n(x)$ вещественны, то $T_n(x)$ можно представить в виде

$$T_n(x) = a \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{x - x_k}{2}, \tag{12}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n} < x_1 + 2\pi$. Для $x \neq x_k$, $k = 1, \ldots, 2n$, положим $\Sigma(x) = \sum_{k=1}^{2n} \operatorname{ctg} \frac{x - x_k}{2}$. Ясно, что для $x \neq x_k$, $k = 1, \ldots, 2n$,

$$\Sigma'(x) = - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2\sin^2 \frac{x - x_k}{2}} \leqslant -n. \tag{13}$$

Легко также проверить, что

$$T_n'(x) = \frac{1}{2} T_n(x) \Sigma(x), \; T_n''(x) = \frac{1}{2} T_n'(x) \Sigma(x) + \frac{1}{2} T(x) \Sigma'(x). \tag{14}$$

Пусть

$$\| T_n \| = | T_n(x_0) |. \tag{15}$$

Тогда $T_n'(x_0) = 0$ и, так как $T_n(x_0) \neq 0$, справедливо второе из соотношений (14). Отсюда, а также из (15) и (12) имеем $\| T_n'' \| \geqslant | T_n''(x_0) | = \frac{1}{2} | T_n(x_0) | \, | \Sigma'(x_0) | \geqslant \frac{n}{2} | T_n(x_0) | = \frac{n}{2} \| T_n \|$. Соотношение (3) доказано.

Легко проверить, что для полиномов вида (4) неравенство (3) обращается в равенство. Поскольку равенство $| \Sigma'(x) | = n/2$ возможно только для полиномов вида (4), теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Покажем, что для полиномов $T_n(x)$ вида (12), рассматриваемых как функции от x, a, x_1, .., x_{2n}, в экстремальной задаче

$$T(0) \to \sup, \; T'(0) = 0, \; \Delta_h^2 T(0) = -1, \; x_{2n} - 2\pi \leqslant -h < h \leqslant x_1, \tag{16}$$

$h \in (0, 2 \arccos (1/2)^{1/2n})$ — фиксированное число, верхняя грань (обозначим ее через B) достигается. В силу определения верхней грани найдется последовательность $\{T_{n,l}\}_{l=1}^{\infty}$ полиномов $T_{n,l}(x) = a_l \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{x - x_{kl}}{2} = a_l \Pi_l(x)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (16), такая, что $T_{n,l}(0) \uparrow B$ при $l \to \infty$. Ограниченную последовательность $\{\Pi_l\}_{l=1}^{\infty}$ будем (переходя, если нужно, к подпоследовательности) считать сходящейся к некоторому полиному $\Pi_\infty(x) = \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{x - x_{k,\infty}}{2}$, где $x_{1,\infty} \leqslant x_{2,\infty} \leqslant \ldots \leqslant x_{2n,\infty} < x_{1,\infty} + 2\pi$. При этом $\Pi_\infty'(0) = 0$, $x_{2n,\infty} - 2\pi \leqslant -h < h \leqslant x_{1,\infty}$. Так как все нули полинома Π_∞ вещественны и на интервале $(-h, h)$ нет его нулей, точка 0 — единственная точка максимума Π_∞ на этом интервале, и на $[-h, 0]$, $[0, h]$ полином Π_∞ строго монотонен. Следовательно, $\Pi_\infty(\pm h) < \Pi_\infty(0)$ и $\Delta_h^2 \Pi_\infty(0) < 0$. Так как $\Delta_h^2 T_{n,l}(0) = a_l \Delta_h^2 \Pi_l(0) = -1$ и при больших l разность $\Delta_h^2 \Pi_l(0)$ отделена, по доказанному, от нуля, то последовательность

$\{a_l\}$ ограничена, так что (переходя, возможно, к подпоследовательности) ее также можно считать сходящейся к некоторому числу a_∞. Ясно, что полином $T = a_\infty \Pi_\infty$ удовлетворяет всем ограничениям задачи (16) и $T(0) = B$. Таким образом, $B < \infty$ и T — экстремальный полином.

Предположим, что экстремальный полином T имеет вид

$$T(x) = a \prod_{k=1}^{r} \left(\sin \frac{x - x_k}{2}\right)^{m_k}, \tag{17}$$

где $h \leqslant x_1 < \ldots < x_r \leqslant 2\pi - h$, $m_k = 1, 2, \ldots$, $\sum_{k=1}^{r} m_k = 2n$. Тогда этот полином является экстремальным в задаче (16) не только среди всех полиномов вида (12), но и среди полиномов вида (17).

Задача (16) для полиномов вида (17) — это гладкая задача с ограничениями типа равенств и неравенств. Для ее изучения применим принцип Лагранжа (см. [3], § 3.2). Функцию Лагранжа этой задачи можно представить так: $\mathscr{L} = T(0) + \lambda T'(0) + \mu (T(h) + T(-h) - 2T(0) + 1) + \xi_1 (x_r - 2\pi + h) + \xi_2 (x_1 - h)$.

Необходимые условия, которым должны удовлетворять нули $x_1, \ldots, x_r$ и коэффициент a экстремального полинома T, таковы:

1) условия стационарности функции Лагранжа по переменным $a, x_1, \ldots, x_r$, т. е.

$$\partial \mathscr{L}/\partial a = 0, \ \partial \mathscr{L}/\partial x_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, r; \tag{18}$$

2) условия дополняющей нежесткости

$$\xi_1 (x_r - 2\pi + h) = 0, \ \xi_2 (x_1 - h) = 0; \tag{19}$$

3) ограничения типа равенств

$$T'(0) = 0, \ T(h) + T(-h) - 2T(0) = -1. \tag{20}$$

Прежде всего отметим, что для нулей $x_r - 2\pi$ и x_1 полинома T, реализующего верхнюю грань в задаче (16), справедливы строгие неравенства $x_r - 2\pi < -h$ и $h < x_1$. Действительно, если выполняется хотя бы одно из равенств $x_r - 2\pi = -h$ или $x_1 = h$, то, поскольку $T(\pm h) \geqslant 0$ и $T(\pm h) < T(0)$, в силу второго из условий (20) получаем $T(0) \leqslant 1$. В то же время для полинома $\overline{T}(x) = a (\cos x/2)^{2n}$, где a выбрано так, чтобы $\Delta_h^2 \overline{T}(0) = -1$, т. е. $a = (2 - 2(\cos h/2)^{2n})^{-1}$ конечно, будет $\overline{T}(0) = (2 - 2(\cos h/2)^{2n})^{-1} > 1$, так как $h < 2 \arccos (1/2)^{1/2n}$. Поэтому ввиду условий (19)

$$\xi_1 = 0, \ \xi_2 = 0. \tag{21}$$

Далее первое из условий (18) можно представить в виде

$$a^{-1} T(0) + \lambda a^{-1} T'(0) + \mu a^{-1} (T(h) + T(-h) - 2T(0)) = 0. \tag{22}$$

Учитывая условия (20) и то, что у экстремального полинома коэффициент a отличен от нуля, из (22) получаем

$$\mu = T(0), \tag{23}$$

в частности $\mu \neq 0$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T(0) = \frac{m_j}{2} \operatorname{ctg} \frac{x_j}{2} T(0), \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T(\pm h) = -\frac{m_j}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pm h - x_j}{2} T(\pm h), \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T'(0) = \frac{m_j}{2} \operatorname{ctg} \frac{x_j}{2} T'(0) + \frac{m_j}{2} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x_j}{2}} T(0). \tag{26}$$

Учитывая (21) и (23) — (26), последние r из условий (18) можно представить в виде

$$\mu \operatorname{ctg} \frac{x_j}{2} + \frac{\lambda\mu}{2\sin^2 \frac{x_j}{2}} + \mu\left[- \operatorname{ctg} \frac{h - x_j}{2} T(h) - \operatorname{ctg} \frac{-h - x_j}{2} T(-h) - \right.$$

$$\left. - 2 \operatorname{ctg} \frac{x_j}{2} T(0) \right] = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, r,$$

или ($\mu \neq 0$)

$$\operatorname{ctg} \frac{x_j}{2} + \frac{\lambda}{2\sin^2 \frac{x_j}{2}} - \left(\operatorname{ctg} \frac{h - x_j}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x_j}{2}\right) T(h) - \left(\operatorname{ctg} \frac{-h - x_j}{2} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{ctg} \frac{x_j}{2}\right) T(-h) + \operatorname{ctg} \frac{x_j}{2} (T(h) + T(-h) - 2T(0)) = 0,$$

$$j = 1, \ldots, r.$$

Учитывая (20), после элементарных преобразований находим

$$\frac{\lambda}{2\sin^2 \frac{x_j}{2}} - \frac{\sin \frac{h}{2}}{\sin \frac{h - x_j}{2} \sin \frac{x_j}{2}} T(h) - \frac{\sin \frac{h}{2}}{\sin \frac{h + x_j}{2} \sin \frac{x_j}{2}} T(-h) = 0. \qquad (27)$$

Поскольку вместе с полиномом $T(x)$ экстремальным полиномом в рассматриваемой задаче будет также полином $T(-x)$, его нули, расположенные в $[h, 2\pi - h]$, т. е. точки $-x_j + 2\pi$, $j = 1, \ldots, r$, также должны удовлетворять (27), т. е. при $j = 1, \ldots, r$

$$\frac{\lambda}{\sin^2 \frac{x_j}{2}} + \frac{\sin \frac{h}{2}}{\sin \frac{h + x_j}{2} \sin \frac{x_j}{2}} T(-h) + \frac{\sin \frac{h}{2}}{\sin \frac{h - x_j}{2} \sin \frac{x_j}{2}} T(h) = 0. \qquad (28)$$

Соотношения (27) и (28) могут выполняться одновременно только при $\lambda = 0$, так что x_j, $j = 1, \ldots, r$, должны удовлетворять следующему уравнению (с неизвестным z)

$$T(h) \sin \frac{h + z}{2} + T(-h) \sin \frac{h - z}{2} = 0, \qquad (29)$$

которое в $[0, 2\pi)$ может иметь только один корень.

Таким образом, в (17) $r = 1$, $m_1 = 2n$ (иначе получается противоречие), так что экстремальный полином T имеет вид $T(x) = a\left(\sin \frac{x - \gamma}{2}\right)^{2n}$. Однако условию $T'(0) = 0$ удовлетворяет только $\gamma = \pi$, так что

$$T(x) = \frac{(\cos x/2)^{2n}}{2(1 - (\cos h/2)^{2n})} \qquad (30)$$

и

$$B = 2^{-1} (1 - (\cos h/2)^{2n})^{-1}. \qquad (31)$$

Таким образом, задача (16) для полиномов вида (12) решена.

Доказывая неравенство (5) для полиномов T_n порядка n, имеющих только вещественные нули, можно считать, что $\| T_n \| = T_n(0)$. Пусть $\Delta_h^2 T_n(0) = \alpha$ (в силу того, что $h < h(T_n')$, $\alpha < 0$). Тогда полином $-\alpha^{-1} T_n$ удовлетворяет (после подходящей нумерации его нулей) ограничениям задачи (16), так что $-\alpha^{-1}T_n(0) \leqslant B = 2^{-1}(1-(\cos h/2)^{2n})^{-1}$. Следовательно,

$$\|T_n\| = T_n(0) \leqslant -\frac{\alpha}{2(1-(\cos h/2)^{2n})} = -\frac{\Delta_h^2 T_n(0)}{2(1-(\cos h/2)^{2n})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\limits_{x\in R} |\Delta_h^2 T_n(x)|}{2(1-(\cos h/2)^{2n})},$$

что, конечно, эквивалентно (5).

Неравенство (5) обращается в равенство для полиномов вида (4), так как для любого x

$$\left|\Delta_h^2 \cos^{2n}\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2^{2n}}\left|\Delta_h^2\left[\sum_{k=0}^{n-1} 2C_{2n}^k \cos 2(n-k)x + C_{2n}^n\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n-1} 2C_{2n}^k |\Delta_h^2 \cos 2(n-k)x| \leqslant \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n-1} 2C_{2n}^k (2-2\cos 2(n-k)h) =$$

$$= 2 - 2\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n}.$$

Теорема доказана.

1. *Turan P.* Über die Ableitung von Polynomen // Compos. math.— (1939/40).— 7.— S. 89—95.
2. *Zhou Songping.* On the Turan inequality in L^p-norm // J. Hangzhou Univ. Natur. Sci. Ed.— 1984.— 11, N 1.— P. 28—33.
3. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление.— М. : Наука, 1979.— 430 с.

Днепропетр. ун-т

Получено 21.02.85,
после доработки — 14.04.85