УДК 517.946.9:534.111

Ю. А. Митропольский, А. А. Березовский,
Н. Р. Коновалова

Эквивалентная линеаризация систем с распределенными параметрами

При построении периодических решений систем с одной степенью свободы, описываемых дифференциальным уравнением

$$md^2x/dt^2 + kx = \varepsilon f(x, dx/dt), \tag{1}$$

где m, k — положительные постоянные, ε — малый параметр, $f(x, dx/dt)$ — заданная функция, применяется метод эквивалентной линеаризации [1, 2], суть которого состоит в замене нелинейного дифференциального уравнения

(1) линейным уравнением

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} + k_e(a)\, x = 0. \tag{2}$$

Коэффициенты эквивалентного линейного уравнения (2) зависят от амплитуды колебаний a и определяются по уравнениям первого приближения асимптотического метода

$$\lambda_e(a) = \frac{\varepsilon}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi,$$
$$k_e(a) = k - \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi)\cos\psi d\psi, \tag{3}$$

где ψ — полная фаза, $\psi = \omega t + \Theta$; Θ — фаза колебаний; $\omega^2 = k/m$. К таким же выражениям для эквивалентных коэффициентов затухания $\lambda_e(a)$ и упругости $k_e(a)$ приводят принципы энергетического и гармонического балансов [2].

В данной работе идеи метода эквивалентной линеаризации применяются для исследования одномерных систем с распределенными параметрами, описывающих слабонелинейные стационарные волны в неограниченной струне, вязко-упругом стержне, электрическом кабеле, свободные и вынужденные колебания ограниченной струны и ограниченного стержня, распространение электромагнитных волн в ферромагнитном полупространстве и пластине.

Такие задачи приводят к интегрированию одномерных квазилинейных гиперболических уравнений вида

$$\rho u_{tt} - b(u_x)\, u_{xx} = 0, \quad (\rho b(u_x) > 0), \tag{4}$$

где $b(u_x) = \partial^2 U/\partial u_x^2$, ρ — линейная плотность, $U(u_x)$—потенциальная энергия. Выделив линейную часть, представим (4) в виде

$$\rho u_{tt} - b u_{xx} = F(u_x)\, u_{xx}, \tag{5}$$

где $b = b(0)$, $F(u_x) = b(u_x) - b$.

Из выражений для потенциальной энергии в случае струны и стержня

$$U(u_x) = \mu_0 (\sqrt{1 + u_x^2} - 1), \quad U(u_x) = \frac{ES}{2} u_x^2 \left(1 + \frac{\gamma}{6} u_x^2\right) \tag{6}$$

(μ_0 — постоянное натяжение струны, E, S и γ — модуль Юнга, площадь поперечного сечения и характеристика нелинейности стержня) соответственно получаем

$$F(u_x) = -\frac{\mu_0 u_x^2 (3 + 3u_x^2 + u_x^4)}{(\sqrt{1 + u_x^2})^3 (1 + (\sqrt{1 + u_x^2})^3)}, \quad b = \mu_0, \quad F(u_x) = ES\gamma u_x^2, \quad b = ES. \tag{7}$$

В обоих случаях после перехода к новой независимой переменной $v = \varepsilon^{-1/2} u$ приходим к уравнению с малым параметром

$$\rho v_{tt} - b v_{xx} = \varepsilon F(v_x,\ v_{xx},\ \varepsilon), \tag{8}$$

где $\varepsilon F(v_x,\ v_{xx},\ \varepsilon) = F(\varepsilon^{1/2} v_x)\, v_{xx}$.

Чтобы в данном случае применить идеи метода эквивалентной линеаризации для обыкновенных дифференциальных уравнений, представим уравнение (8) в операторной форме, рассматривая x как параметр:

$$\rho \ddot{v} + \gamma_0 v = \varepsilon f(v,\ \varepsilon), \tag{9}$$

где $\gamma_0 = -b\partial^2/\partial x^2$; $f(v,\ \varepsilon)$ — легко восстанавливаемая по (7) операторная функция.

Уравнение (9) при $\varepsilon = 0$ допускает решение в виде стационарной волны

$$v = a\cos\Theta, \quad \partial v/\partial t = -a\omega\sin\Theta, \tag{10}$$

где $\Theta = \omega t - kx + \varphi$ — фазовая переменная, a и $\varphi = \mathrm{const}$ — амплитуда и фаза колебаний, волновое число k и частота ω связаны дисперсионным соотношением $\omega^2 = \frac{b}{\rho}k^2$.

Формулы (10) справедливы и в случае $\varepsilon \neq 0$ при условии, что величины a и φ будем рассматривать не как постоянные, а как некоторые функции времени.

1. Линеаризация асимптотическим методом. Будем рассматривать (10) как некоторую замену переменных, считая a и φ новыми неизвестными, определив которые, с помощью (10) можно найти искомое выражение для первоначально неизвестной v. Составим дифференциальные уравнения для a, φ.

Продифференцировав обе части первой формулы (10), получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{da}{dt}\cos\Theta - a\omega\sin\Theta - a\frac{d\varphi}{dt}\sin\Theta, \tag{11}$$

откуда с учетом второго соотношения (10) будем иметь

$$\frac{da}{dt}\cos\Theta - a\frac{d\varphi}{dt}\sin\Theta = 0. \tag{12}$$

Продифференцировав обе части второй формулы (10), получим

$$\ddot{v} = -\frac{da}{dt}\omega\sin\Theta - a\omega^2\cos\Theta - a\omega\frac{d\varphi}{dt}\cos\Theta. \tag{13}$$

Подставляя в уравнение (8) вместо v, $\ddot{v}$ соответственно их значения, взятые согласно формулам (10) и (13), находим

$$-\rho\omega\frac{da}{dt}\sin\Theta - \rho a\omega\frac{d\varphi}{dt}\cos\Theta = \varepsilon f(a\cos\Theta, \varepsilon). \tag{14}$$

Решая систему двух уравнений (12) и (14) относительно неизвестных da/dt, $d\varphi/dt$, получаем

$$da/dt = -\frac{\varepsilon}{\rho\omega}f(a\cos\Theta, \varepsilon)\sin\Theta, \quad d\varphi/dt = -\frac{\varepsilon}{\rho a\omega}f(a\cos\Theta, \varepsilon)\cos\Theta. \tag{15}$$

Итак, вместо одного дифференциального уравнения второго порядка (8) относительно переменной v имеем два дифференциальных уравнения первого порядка относительно a и φ. Правые части уравнений (15) имеют по отношению к независимой переменной t период, равный $2\pi/\omega$; da/dt и $d\varphi/dt$ пропорциональны малому параметру ε, так что a и φ — медленно меняющиеся функции времени.

Переходя в (15) от переменной φ к Θ и производя усреднение, получаем

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi\rho\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos\Theta, \varepsilon)\sin\Theta d\Theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_e(a, k), \tag{16}$$

где с точностью до ε

$$\omega_e^2(a, k) = \omega^2 - \frac{\varepsilon}{\pi\rho a}\int_0^{2\pi} f(a\cos\Theta, \varepsilon)\cos\Theta d\Theta, \ \omega^2 = \frac{b}{\rho}k^2. \tag{17}$$

Из-за четности функции $f(v, \varepsilon)\frac{da}{dt} = 0$ и, следовательно, $a = \mathrm{const}$. После вычисления интеграла в (17) с учетом действия оператора $f(v, \varepsilon)$ на решение (10) получаем простое дисперсионное соотношение

$$\omega_e^2(a, k) = \frac{ES}{\rho} k^2 \left(1 + \frac{\gamma}{4} a^2k^2\right) \tag{18}$$

в случае стержня и более сложное

$$\omega_e^2(a, k) = \frac{\mu_0}{\pi a^2 \rho \sqrt{1 + a^2k^2}} \left[(1 + a^2k^2) E\left(2\pi, \frac{ak}{\sqrt{1 + a^2k^2}}\right) - \right.$$
$$\left. - F\left(2\pi, \frac{ak}{\sqrt{1 + a^2k^2}}\right)\right] \tag{19}$$

в случае струны. Здесь $F(\varphi, m)$, $E(\varphi, m)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Рассмотрим оператор

$$\gamma_e = -b_e \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -b_e k^2 \frac{d^2}{d\Theta^2}, \tag{20}$$

где

$$b_e = b - \frac{\varepsilon}{\pi a k^2} \int_0^{2\pi} f(a \cos \Theta, \varepsilon) \cos \Theta d\Theta.$$

Тогда уравнения первого приближения можно представить в виде

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\Theta}{dt} = \omega_e(a, k), \quad \omega_e^2(a, k) = \frac{b_e}{\rho} k^2. \tag{21}$$

Продифференцируем теперь выражение (10). Принимая во внимание (21), имеем

$$\dot{v} = -a\omega_e \sin \Theta. \tag{22}$$

Дифференцируя (22) еще раз, убеждаемся, что с точностью до ε

$$\ddot{v} = -\frac{ab_e}{\rho} k^2 \cos \Theta = -\frac{\gamma_e v}{\rho} \to \rho\ddot{v} + \gamma_e v = O(\varepsilon^2). \tag{23}$$

Итак, в первом приближении задача о слабонелинейных волнах сводится к задаче о волнах малой амплитуды, но с некоторым эквивалентным коэффициентом b_e, зависящим от амплитуды колебаний a и волнового числа k — $b_e = b_e(a, k)$. Сопоставляя нелинейное дисперсионное соотношение с линейным, получаем, что в случае струны — $\mu_e \leqslant \mu_0$ (чем больше натяжение, тем меньше амплитуда колебаний); в случае стержня эквивалентный модуль Юнга E_e в зависимости от знака γ (жесткая или мягкая нелинейность) соответственно должен быть больше или меньше модуля Юнга E, что также соответствует физическому смыслу.

Сравнивая уравнение (23) с уравнением (8), видим, что уравнение (23) получается из уравнения (8) путем замены нелинейного члена $F = \varepsilon f(v, \varepsilon)$ линейным $F_e = -[\gamma_e v - \gamma_0 v]$.

2. Другие методы линеаризации. Для нахождения эквивалентного коэффициента b_e приравниваем мощности, развиваемые нелинейной и эквивалентной ей линейной силами:

$$\int_0^T Fudt = \int_0^t F_e udt, \tag{24}$$

где T — период колебаний, $T = 2\pi/\omega$.

На интервале $[0, 2\pi/\omega]$ в (24) можно положить

$$v = a \cos \Theta, \quad \Theta = \omega_e t - kx + \varphi, \tag{25}$$

где a и φ постоянны.

Подставляя выражение (25) в обе части формулы (24), имеем

$$\varepsilon \int_0^{2\pi} f(a\cos\Theta,\ \varepsilon)\cos\Theta d\Theta = -\int_0^{2\pi} (\gamma_e(a\cos\Theta) - \gamma_0(a\cos\Theta))\cos\Theta d\Theta. \quad (26)$$

Подставляя найденное из (26) значение эквивалентного коэффициента b_e в (21), получаем дисперсионное соотношение для нелинейного уравнения (8), совпадающее с дисперсионным соотношением, полученным асимптотическим методом.

Если искать решение в виде (10), где $\Theta = \omega_e t - kx + \varphi$, считая a и φ постоянными, подлежащими определению, то метод гармонического баланса

$$\int_0^{2\pi} a\rho\omega^2 \cos^2\Theta d\Theta = -\int_0^{2\pi} (\gamma_e(a\cos\Theta) - \gamma_0(a\cos\Theta))\cos\Theta d\Theta$$

также приводит к дисперсионным соотношениям (18) и (19).

При отыскании стационарных волновых решений в виде (10) согласно вариационному методу Уизема рассматривается усредненный по фазовой переменной Θ лагранжиан $\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L d\Theta,\ L = T - U,\ T = \frac{\rho}{2} u_t^2$. Уравнение Эйлера для усредненного лагранжиана $\partial\mathcal{L}/\partial a = 0$ приводит к дисперсионным соотношениям (18) и (19) соответственно для стержня и струны.

К несколько отличным дисперсионным соотношениям

$$\omega_e^2 = \frac{ES}{\rho} k^2\left[1 + \frac{\gamma}{8} a^2k^2\right], \quad \omega_e^2 = \frac{2\mu_0}{\pi\rho a^2}\left[\sqrt{1 + a^2k^2}E\left(2\pi, \frac{ak}{\sqrt{1+a^2k^2}}\right) - 2\pi\right]$$

приводит линеаризация (отыскание эквивалентных параметров μ_e и E_e), основанная на равенстве усредненных по периоду потенциальных энергий нелинейной и эквивалентной ей линейной задач.

3. Изгибные стационарные волны в стержнях при нелинейном законе упругости. Поперечные колебания физически нелинейного стержня описываются решениями квазилинейного дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка [3]

$$\partial^2W/\partial t^2 + \alpha^2\partial^4W/\partial x^4 = -\alpha^2\lambda\,[\partial^4W/\partial x^4\,(\partial^2W/\partial x^2)^2 + 2\,(\partial^3W/\partial x^3)^2\partial^2W/\partial x^2], \quad (27)$$

где $W(x, t)$ — прогиб точки x оси стержня в момент времени t; α и λ — некоторые постоянные, содержащие геометрические и упругие характеристики стержня.

Нелинейному уравнению (27) сопоставляется линейное уравнение $\partial^2W/\partial t^2 + \alpha_e^2\partial^4W/\partial x^4 = 0$ с точным решением в виде бегущих периодических волн $W = a\cos\Theta,\ \Theta = kx - \omega t + \varphi$ и дисперсионным соотношением $\omega^2 = \alpha_e^2k^4$. Методом эквивалентной линеаризации получено дисперсионное соотношение $\omega = \alpha k^2\sqrt{1 + \lambda a^2k^4/4}$, $\alpha_e = \alpha\sqrt{1 + \lambda a^2k^4/4}$. Для данного уравнения было получено [4] точное дисперсионное соотношение $\frac{\pi}{2}\omega = \alpha k^2\sqrt{1 + \lambda a^2k^4}\left(2E\left(\frac{\pi}{2},\ m\right) - K(m)\right)$, где $K(m)$ — полный эллиптический интеграл. В асимптотике полученные дисперсионные соотношения совпадают.

4. Стационарные решения нелинейного телеграфного уравнения. Распространение нелинейных волн в электрическом кабеле описывается дифференциальным уравнением

$$\partial^2V/\partial x^2 = a\partial^2V/\partial t^2 + 2b\partial V/\partial t + cV - \varepsilon\sigma\,[LV^2\partial V/\partial t + RV^3]. \quad (28)$$

Здесь a, b, c, σ — постоянные, характеризующие физические свойства кабеля, V — напряжение, $b = \varepsilon\beta$, $\beta > 0$.

Нелинейному уравнению (28) сопоставляется линейное уравнение $a\partial^2 V/\partial t^2 + c_e V - \partial^2 V/\partial x^2 = 0$ с точным решением $V = A\sin(\omega t - kx + \varphi)$ и дисперсионным соотношением $\omega^2 = (c + k^2)/a$. Методом эквивалентной линеаризации получено дисперсионное соотношение $\omega_e^2(A, k) = \frac{c + k^2}{a} - \frac{3}{4}\varepsilon\frac{\sigma}{a}RA^2$.

5. Распространение электромагнитных волн в ферромагнитном полупространстве и пластине. Нелинейному уравнению задачи о распространении электромагнитных волн в ферромагнитном полупространстве и пластине $u_{xx} - \sigma(\mu|u|u)_t - \varepsilon(\mu(|u|)u)_{tt} = 0$ сопоставляется линейное уравнение $u_{xx} - \sigma\mu_э u_t - \varepsilon\mu_э u_{tt} = 0$ с дисперсионным соотношением $k^2 + i\omega\sigma'\mu_э = 0$, $i = \sqrt{-1}$, $\sigma' = \sigma - i\omega\varepsilon$, и точными решениями

$$u(x, t) = \mathrm{Re}\{ae^{-kx - i(\omega t - \varphi)}\}, \quad x > 0,$$

$$u(x, t) = \mathrm{Re}\left\{a\,\frac{\mathrm{sh}\,kx}{\mathrm{sh}\,k}\,e^{-i(\omega t - \varphi)}\right\}, \quad |x| < 1.$$

Для эквивалентной магнитной проницаемости $\mu_э$ получены функциональные зависимости от амплитуды a и комплексного волнового числа k:

$$\mu_э(a) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\mu(ae^{-x}|\cos\tau|)\,e^{-2x}\cos^2\tau\,d\tau dx, \quad x > 0,$$

$$\mu_э(a, k) = \frac{\omega\,[\mathrm{ch}\,(k + \bar{k}) - \mathrm{ch}\,(k - \bar{k})]}{2\pi a^2\left[\frac{\mathrm{sh}\,(k + \bar{k})}{k + \bar{k}} - \frac{\mathrm{sh}\,(k - \bar{k})}{k - \bar{k}}\right]}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\mu(|u(x, t)|)\,u^2(x, t)\,dxdt,$$
$$|x| < 1.$$

Здесь σ и ε — электрическая проводимость и диэлектрическая постоянная среды; u — напряженность магнитного поля.

6. Свободные и вынужденные колебания ограниченной струны. Вертикальное смещение закрепленной струны $u(x, t)$ определяется как решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_0\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}}\right) - \rho u_{tt} = 0, \tag{29}$$

удовлетворяющее краевым условиям $u(0, t) = u(l, t) = 0$, где l — длина струны. Соответствующая линейная задача имеет точное аналитическое решение

$$u(x, t) = a\sin kx\cos\omega t, \quad k = \frac{\pi}{l}n, \quad n \in N, \quad \omega^2 = \frac{\mu_e}{\rho}k^2 = \frac{\mu_e\pi^2}{\rho l^2}n^2. \tag{30}$$

Необходимо установить функциональную зависимость $\mu_e = \mu_e(\mu_0)$ таким образом, чтобы имела место определенная эквивалентность. Такая зависимость вытекает из условий удовлетворения решения (30) с заменой ω на ω_e дифференциальному уравнению (29) в смысле метода Бубнова—Галеркина:

$$\omega_e^2 = \frac{2\mu_0}{\pi\rho a^2\sqrt{1 + \frac{a^2\pi^2}{l^2}}}\left[\left(1 + \frac{a^2\pi^2}{l^2}\right)E\left(\pi, \frac{a\pi}{l\sqrt{1 + \frac{a^2\pi^2}{l^2}}}\right) - F\left(\pi, \frac{a\pi}{l\sqrt{1 + \frac{a^2\pi^2}{l^2}}}\right)\right].$$

В случае, когда один конец ($x = 0$) струны закреплен, а второй подвергается действию силы $u_0 \cos \omega t$, приближенное аналитическое решение уравнения (29) с краевыми условиями

$$u(0, t) = 0, \quad \mu_0 \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \bigg|_{x=l} = u_0 \cos \omega t \tag{31}$$

будем искать в виде (30). В линейном случае $a = \frac{q}{k\mu_0 \cos kl}$, $\omega^2 = \frac{\mu_e}{\rho} k^2$. Требуя, чтобы уравнение (29) и второе краевое условие (31) удовлетворялись в смысле метода Бубнова — Галеркина, получаем

$$\omega^2 = \frac{2\mu_0}{\rho k l a^2 K(kl) \sqrt{1 + a^2k^2}} \left[(1 + a^2k^2) E\left(kl, \frac{ak}{\sqrt{1 + a^2k^2}}\right) - F\left(kl, \frac{ak}{\sqrt{1 + a^2k^2}}\right) - \frac{a^2k^2}{2} \frac{\sin 2kl}{\sqrt{1 + a^2k^2 \cos^2 kl}} \right],$$

$$\frac{\mu_0}{ak \cos kl \sqrt{1 + a^2k^2 \cos^2 kl}} \left[(1 + a^2k^2 \cos^2 kl) E\left(2\pi, \frac{ak \cos kl}{\sqrt{1 + a^2k^2 \cos^2 kl}}\right) - F\left(2\pi, \frac{ak \cos kl}{\sqrt{1 + a^2k^2 \cos^2 kl}}\right) \right] = \pi u_0,$$

где $K(kl) = 1 - \frac{\sin 2kl}{2kl}$.

После исключения $ak\cos kl$ первое из этих уравнений представляет собой нелинейное дисперсионное соотношение, связывающее частоту ω с волновым числом k и амплитудой u_0 заданной силы.

Когда один конец струны закреплен, а на втором конце приложена сила, пропорциональная смещению $u(0, t) = 0$, $\mu_0 \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \Big|_{x=l} = \varkappa u(l, t)$, и в случае физически оправдываемой линеаризации $\left(\frac{1}{2} u_x^2 \ll 1\right)$, получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \frac{\mu_0}{\rho} k^2 \left[1 - \frac{9}{64} \left(\frac{4kl - \sin 4kl}{2kl - \sin 2kl} \right) \frac{B^2k^2}{\cos^2 kl} \right],$$

где $B = a \cos kl$ находится из уравнения

$$B^2 + \frac{4}{3} \frac{\varkappa}{\mu_0 k^3} \operatorname{tg} kl - \frac{4}{3} = 0.$$

7. Вынужденные колебания стержня. Нелинейной задаче о вынужденных продольных колебаниях вязко-упругого стержня

$$(1 + \gamma u_x^2) u_{xx} - \lambda^2 u_{tt} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x, t + 2\pi) = u(x, t),$$

$$0 \leqslant x < 1, \quad u(0, t) = 0, \quad u_x + \frac{1}{3} \gamma u_x^3 = P \cos t, \quad x = 1, \quad t > 0,$$

сопоставляется линейная задача

$$u_{xx} - k^2 u_{tt} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x, t + 2\pi) = u(x, t),$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = q \cos t$$

с точным аналитическим решением $u(x, t) = a \sin kx \cos t$, $ak \cos k = q$.

В этом случае получены следующие соотношения:

$$\lambda^2 = k^2\left[1 \pm \frac{3|\gamma|}{32\cos^2 k}\frac{4k - \sin 4k}{2k - \sin 2k}q^2\right], \quad \gamma < 0, \quad \gamma > 0,$$

$$q = \frac{4}{\sqrt{3|\gamma|}}\operatorname{sh}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arcsh}\frac{3\sqrt{3|\gamma|}}{4}p\right], \quad \gamma > 0,$$

$$q = \frac{4}{\sqrt{3|\gamma|}}\cos\left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3|\gamma|}}{4}p\right], \quad \gamma < 0.$$

После исключения q первое из уравнений представляет собой нелинейное дисперсионное соотношение, связывающее волновое число k с частотой ω и амплитудой p заданной сжимающей силы ($\lambda = \omega l \times \sqrt{\rho/E}$); E, ρ и l — модуль Юнга, плотность и длина стержня. В физическом смысле предпринятая линеаризация означает замену нелинейного закона Гука линейным с эквивалентным значением для модуля Юнга $E_e = E\dfrac{\lambda^2}{k^2}$ и амплитуды p — эквивалентной амплитудой q.

В заключение отметим, что применимость эквивалентной линеаризации для волновых систем с распределенными параметрами, к которым относятся рассмотренные задачи, ограничивается рамками асимптотического метода, позволяющего оценить степень малости отбрасываемых величин. Эти рамки значительно расширяются, если основной интерес представляет не само решение, а только некоторые функционалы от него, например период T или основная частота колебаний $\omega = 2\pi/T$, средняя за период работа A, совершаемая при продольных колебаниях стержня $A = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T E_e u_x(0, t) \times u(0, t)\,dt$ и средние поверхностные потери $P = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \frac{1}{\sigma}u_x(0, t)\,u(0, t)\,dt$ в ферромагнитном полупространстве. Проведенные численные эксперименты показали, что погрешность в определении таких функционалов незначительна.

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний.— Киев : Изд-во ВУАН, 1934.— 112 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.— 410 с.
3. *Каудерер Г.* Нелинейная механика.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 777 с.
4. *Березовский А. А., Жерновой Ю. В.* Изгибные стационарные волны в стержнях при нелинейном законе упругости // Укр. мат. журн.— 1981.— 33, № 4.— С. 493—498.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 03.03.86