УДК 519.21

В. И. Колчинский

О предельных теоремах в несепарабельном функциональном пространстве

В данной статье изучаются предельные теоремы в несепарабельном функциональном пространстве $D_F(S)$, тесно связанные с исследованием предельного поведения последовательности эмпирических процессов на классах измеримых множеств [1—9].

1. Пусть $(A, \mathfrak{A}, \mu)$ — некоторое вероятностное пространство, λ — лебегова мера на отрезке $[0, 1]$, $\mathcal{B}_\lambda$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств $[0, 1]$. Обозначим $\Omega = A^\infty \times [0, 1]$, $\Sigma = \mathfrak{A}^\infty \times \mathcal{B}_\lambda$, $P = \mu^\infty \times \lambda$, Σ_P — пополнение Σ по мере P; в дальнейшем (Ω, Σ_P, P) будет играть роль основного вероятностного пространства. Будем считать, что заданы некоторое множество S и конечное множество $F \subset R^1$ и определена случайная функция $\xi : A \times S \to F$. Введем в S метрику τ, положив $\tau(s, t) = \mu^{1/2}(\{\xi(s) \neq \xi(t)\})$, $s, t \in S$. На вероятностном пространстве (Ω, Σ_P, P) можно определить последовательность $\{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$ независимых копий ξ: $\xi_n(\omega, s) = \xi(\omega_n, s)$, $s \in S$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega$, $n \geqslant 1$. Для $n \geqslant 1$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in F^n$, $\omega \in \Omega$ положим $\Delta(u, \omega) = \{s \in S : \xi_1(\omega, s) = u_1, \ldots, \xi_n(\omega, s) = u_n\}$.

Определение 1 (ср. с [4,8]). *Случайная функция ξ называется эмпирически измеримой, если для любого $n \geqslant 1$, $u \in F^n$ и τ-открытого $G \subset S$ выполняется условие* $\{\omega : \Delta(u, \omega) \cap G = \varnothing\} \in \Sigma_P$.

Некоторые условия эмпирической измеримости приведены в работах [4, 6, 8].

Будем предполагать, что (S, τ) — вполне ограниченное метрическое пространство, $C_0(S)$ — пространство τ-равномерно непрерывных функций на S, $D_F(S)$ — множество функций $x : S \to F$, $\tilde{D}_F(S)$ — линейная оболочка $C_0(S)$ и $D_F(S)$. В линейном пространстве $\tilde{D}_F(S)$ введем норму $\|\cdot\|_\infty$, $\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : t \in S\}$, $x \in \tilde{D}_F(S)$, и σ-алгебру $\mathfrak{B}_b$, порожденную шарами относительно $\|\cdot\|_\infty$, центры которых принадлежат $C_0(S)$.

Положим $S_n = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - M\xi)$, $n \geqslant 1$. Если ξ эмпирически измерима, то для любого $n \geqslant 1$ S_n — случайный элемент в пространстве $(\tilde{D}_F(S), \mathfrak{B}_b)$ [8]. В частности, в этом случае ξ — случайный элемент в $(\tilde{D}_F(S), \mathfrak{B}_b)$.

Последовательность $\{\zeta_n\}_{n \geqslant 1}$ случайных элементов со значениями в $(\tilde{D}_F(S), \mathfrak{B}_b)$ слабо сходится при $n \to \infty$ к случайному элементу ζ со значениями в том же измеримом пространстве, если для любой $\mathfrak{B}_b$-измеримой и $\|\cdot\|_\infty$-непрерывной $f : \tilde{D}_F(S) \to R^1$ $f(\zeta_n)$ слабо сходится к $f(\zeta)$ при $n \to \infty$ (см. [10]).

Будем говорить, что ξ удовлетворяет центральной предельной теореме, если:

а) в $C_0(S)$ существует гауссовский случайный элемент G со средним 0 и корреляционной функцией $R(t, s) = M\xi(t)\xi(s) - M\xi(t)M\xi(s)$, $t, s \in S$;

б) последовательность $n^{-1/2}S_n$ слабо сходится при $n \to \infty$ к случайному элементу G.

Определение 2. *Множество $\mathscr{E} \subset D_F(S)$ называется ЦПТ-пространством, если любая эмпирически измеримая $\xi \in \mathscr{E}$ удовлетворяет центральной предельной теореме.*

Обозначим через $H_\tau(\delta)$ δ-энтропию S относительно τ, $N(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{card}(\{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) : t \in S\})$, $H(x_1, \ldots, x_n) = \ln N(x_1, \ldots, x_n)$, $x_1, \ldots, x_n \in D_F(S)$, $N_{\mathscr{E}}(n) = \max\{N(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{E}\}$, $\mathscr{E} \subset D_F(S)$. Пусть $m = \operatorname{card}(F)$, $F^n = \underbrace{F \times \ldots \times F}_{n}$, $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqslant 1$. Для $J \subset J_n$, $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n$, положим $\pi_J : F^n \to F^k$, $\pi_J u = (u_{j_1}, \ldots, u_{j_k})$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in F^n$. Обозначим $\pi^{(k)} = \pi_{J_k}$, $k \leqslant n$, и для $A \subset F^n$ положим $A^{(k)} = \pi^{(k)} A$. Сечение множества A в точке $u \in A^{(n-1)}$ обозначим A_u: $A_u = \{v \in F : (u, v) \in A\}$.

Дадим индуктивное определение квазикубического множества. Пусть $A \subset F^n$. Если $n = 1$, то A называется квазикубическим, когда $\operatorname{card}(A) = 2$. Если же $n > 1$, то A называется квазикубическим в том и только в том случае, когда а) $A^{(n-1)}$ квазикубическое; б) для любого $u \in A^{(n-1)}$ $\operatorname{card}(A_u) = 2$, т. е. A_u квазикубическое (см. [3]). Очевидно, если $A \subset F^n$ квазикубическое, то $\operatorname{card}(A) = 2^n$. Простейшим примером квазикубического множества является $A = H^n$, где $H \subset F$, $\operatorname{card}(H) = 2$.

Назовем множество $A \subset F^n$ емким, если существует квазикубическое $B \subset A$.

Система функций $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset D_F(S)$ называется емкой, если множество $\{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) : t \in S\}$ емкое.

Пусть $\mathscr{E} \subset D_F(S)$. Назовем множество $\mathscr{E}$ n-емким, если, существуют $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{E}$, образующие емкую систему.

Пусть $V(\mathscr{E})$ обозначает наименьшее n такое, что $\mathscr{E}$ не является n-емким множеством (если $\mathscr{E}$ является n-емким для любого $n \geqslant 1$, то $V(\mathscr{E}) = \infty$). $V(\mathscr{E})$ будем называть размерностью Вапника — Червоненкиса множества $\mathscr{E}$.

Теорема 1. *Для того чтобы $\mathscr{E} \subset D_F(S)$ являлось ЦПТ-пространством, необходимо и достаточно, чтобы $V(\mathscr{E}) < +\infty$. Если $V(\mathscr{E}) = +\infty$, то для любой последовательности $\{\alpha_n\}_{n \geqslant 1}$ такой, что $\alpha_n \downarrow 0$, $n \to \infty$, существует эмпирически измеримая $\xi \in \mathscr{E}$, для которой* $\overline{\lim\limits_{n}} \dfrac{M \| S_n \|_\infty}{n \alpha_n} > 0$.

Следующее утверждение показывает, что условие $\alpha_n \downarrow 0$, $n \to \infty$, во второй части теоремы 1 существенное.

Теорема 2. *Если S — бесконечное множество, $\operatorname{card}(F) \geqslant 2$, то существует $\mathscr{E} \subset D_F(S)$ такое, что $V(\mathscr{E}) = +\infty$ и для любого $\xi \in \mathscr{E}$ $\|S_n\|_\infty = o(n)$, $n \to \infty$, с вероятностью 1 и в среднем.*

2. Сформулируем вспомогательные утверждения, которые понадобятся в дальнейшем.

При $V(\mathscr{E}) < +\infty$ из леммы 11 работы [9] легко получить такую оценку:

$$N_{\mathscr{E}}(n) \leqslant \left(\frac{me}{V(\mathscr{E})}\right)^{V(\mathscr{E})} n^{V(\mathscr{E})}. \tag{1}$$

Таким образом, либо $V(\mathscr{E}) = +\infty$ и $N_{\mathscr{E}}(n) \geqslant 2^n$, $n \geqslant 1$, либо $V(\mathscr{E}) < +\infty$ и $N_{\mathscr{E}}(n) = O(n^{V(\mathscr{E})})$, $n \to \infty$ (см. [1 — 4]).
Из леммы 10 работы [9] легко следует

$$M \sup_{t \in S} \left[\sum_1^n \varepsilon_j x_j(t) \right] \geqslant \Delta/2\, V(\{x_1, \ldots, x_n\}). \tag{2}$$

Аналогично лемме 2 работы [8] можно показать, что существует постоянная $C(\mathscr{E}) > 0$, для которой (см. [4])

$$H_\tau(\delta) \leqslant V(\mathscr{E}) \left(2 \ln \frac{1}{\delta} + \ln\ln \frac{1}{\delta}\right) + C(\mathscr{E}). \tag{3}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $V(\mathscr{E}) = +\infty$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{l_n\}_{n\geq 1}$ натуральных чисел. Покажем, что найдутся такие попарно непересекающиеся емкие системы $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{E}$, $n \geq 1$, что $\mathrm{card}(\mathscr{F}_n) = l_n$, $n \geq 1$. Действительно, можно найти такую конечную емкую систему $\mathscr{F}_1$, что $\mathrm{card}(\mathscr{F}_1) = l_1$. Пусть найдены попарно непересекающиеся емкие системы $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_k$ такие, что $\mathrm{card}(\mathscr{F}_j) = l_j$, $j = 1, \ldots, k$. Тогда можно найти емкую систему $\mathscr{F}'_{k+1}$ такую, что $\mathrm{card}(\mathscr{F}'_{k+1}) \geq l_1 + l_2 + \ldots + l_{k+1}$. Следовательно, $\mathrm{card}\left(\mathscr{F}'_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \mathscr{F}_j\right) \geq l_{k+1}$ и можно выбрать систему $\mathscr{F}_{k+1} \subset \mathscr{F}'_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \mathscr{F}_j$ также емкую, для которой $\mathrm{card}(\mathscr{F}_{k+1}) = l_{k+1}$. По индукции получаем последовательность $\mathscr{F}_n$, $n \geq 1$, удовлетворяющую необходимым свойствам.

Пусть $\{p_n\}_{n\geq 1}$ — распределение вероятностей, $p_n > 0$, $n \geq 1$, $\sum_n p_n = 1$. Определим случайный элемент $\xi \in \mathscr{E}$ таким образом, чтобы $P\{\xi = x\} = p_n l_n^{-1}$, $x \in \mathscr{F}_n$, $n \geq 1$. Очевидно, ξ эмпирически измерим. Рассмотрим последовательность $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ независимых копий ξ. Для $n \geq 1$, $j \geq 1$ обозначим через $\nu_n^{(j)}$ число попарно различных элементов выборки $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, принадлежащих $\mathscr{F}_j$. Заметим, что $V(\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}) \geq \sup_{j\geq 1} \nu_n^{(j)}$. Учитывая (2), получаем

$$M\left(\sup_{t\in S} \sum_{1}^{n} \varepsilon_j \xi_j(t) \mid \xi_1, \ldots, \xi_n\right) \geq \Delta/2 \sup_{j\geq 1} \nu_n^{(j)}.$$

Следовательно,

$$M \sup_{t\in S} \sum_{1}^{n} \varepsilon_j \xi_j(t) \geq \Delta/2 \sup_{j\geq 1} M\nu_n^{(j)}.$$

Заметим, что

$$\nu_n^{(j)} = \chi_{\mathscr{F}_j}(\xi_1) + \sum_{k=2}^{n} \chi_{\mathscr{F}_j}(\xi_k)\, \chi\{\xi_k \neq \xi_{k-1}, \ldots, \xi_k \neq \xi_1\}, \quad M\nu_n^{(j)} = P\{\xi_1 \in \mathscr{F}_j\} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} P\{\xi_k \in \mathscr{F}_j, \xi_k \neq \xi_{k-1}, \ldots, \xi_k \neq \xi_1\}.$$

Далее,

$$P\{\xi_k \in \mathscr{F}_j, \xi_k \neq \xi_{k-1}, \ldots, \xi_k \neq \xi_1\} = \sum_{x\in\mathscr{F}_j} P\{\xi_k = x\} P\{\xi_{k-1} \neq x, \ldots, \xi_1 \neq x\} =$$

$$= p_j (1 - p_j l_j^{-1})^{k-1}, \quad M\nu_n^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} p_j (1 - p_j l_j^{-1})^{k-1} = l_j (1 - (1 - p_j l_j^{-1})^n).$$

Таким образом,

$$M \sup_{t\in S} \sum^{n} \varepsilon_j \xi_j(t) \geq \frac{\Delta}{2} \sup_{j\geq 1} l_j (1 - (1 - p_j/l_j)^n).$$

Поскольку $(1 - p_j/l_j)^n \leq e^{-np_j/l_j}$, то

$$M \sup_{t\in S} \sum_{1} \varepsilon_j \xi_j(t) \geq \frac{\Delta}{2} \sup_{j\geq 1} l_j (1 - e^{-np_j/l_j}). \tag{4}$$

Покажем теперь, что последовательности $\{p_n\}_{n\geq 1}$ и $\{l_n\}_{n\geq 1}$ можно подобрать таким образом, чтобы $\sup_{j\geq 1} l_j (1 - e^{-np_j/l_j}) \geq 1/2n\alpha_n$. Действительно, пусть $p_n \downarrow 0$, $n \to \infty$. Обозначим $j_n = \max\{j \mid p_j \geq \alpha_n\}$. Если последовательность $\{l_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет условию

$$l_{j_n} \geqslant n, \quad n \geqslant 1, \tag{5}$$

то $1 - e^{-np_{j_n}/l_{j_n}} \geqslant \frac{1}{2} n \frac{p_{j_n}}{l_{j_n}}$, и, следовательно,

$$\sup_{j\geqslant 1} l_j (1 - e^{-np_j/l_j}) \geqslant 1/2\, np_{j_n} \geqslant 1/2 n\alpha_n. \tag{6}$$

Поэтому достаточно выбрать последовательность $\{l_n\}_{n\geqslant 1}$ так, чтобы выполнялось (5). С этой целью положим

$$r_1 = \min\{n \geqslant 1 : j_n > j_1\},\ r_k = \min\{n \geqslant r_{k-1} : j_n > j_{r_{k-1}}\}, \quad k \geqslant 2,$$

$$q_0 = j_1, \quad q_k = j_{r_k}, \quad k \geqslant 1, \quad l_n = 1, \quad n < q_0, \quad l_n = r_{j+1}, \quad q_j \leqslant n < q_{j+1},$$
$$j = 0, 1, \ldots.$$

Тогда при $r_j \leqslant n < r_{j+1}$ $j_n = q_j$. Следовательно, $l_{j_n} = l_{q_j} = r_{j+1} > n$. В силу (6) и (4) находим $M \sup_{t\in S} \sum_1^n \varepsilon_j \xi_j(t) \geqslant \Delta/4n\alpha_n$. Тем более

$$M \left\| \sum_1^n \varepsilon_j \xi_j \right\|_\infty \geqslant \Delta/4n\alpha_n, \quad n \geqslant 1.$$

Используя следствие 5 работы [9], получаем $\overline{\lim_n} \frac{M\|S_n\|_\infty}{n\alpha_n} > 0$. Следовательно, ξ не удовлетворяет центральной предельной теореме и $\mathscr{E}$ не является ЦПТ-пространством.

Пусть $V(\mathscr{E}) < +\infty$. Используя оценку (1), имеем $h(n) = H(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant \ln N_{\mathscr{E}}(n) \leqslant V(\mathscr{E}) \left[\ln \frac{me}{V(\mathscr{E})} + \ln n\right] = O(\ln n), \quad n \to \infty$. Из (3) следует $H_\tau(\delta) = O\left(\ln \frac{1}{\delta}\right)$, $\delta \to 0$. В силу теорем 1 и 2 работы [8] ξ в этом случае удовлетворяет центральной предельной теореме. Поскольку это справедливо для любой эмпирически измеримой $\xi \in \mathscr{E}$, то $\mathscr{E}$ является ЦПТ-пространством. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Поскольку S — бесконечно, то легко построить систему разбиений S на подмножества $\{S_i\}_{i\in D^n}$, $n \geqslant 1$, $D \doteq \{0, 1\}$, удовлетворяющую таким условиям:

$$S = \bigcup_{i\in D^n} S_i, \quad S_i \cap S_j = \varnothing, \ i \neq j, \quad i, j \in D^n, \quad S_{(i,0)} \cup S_{(i,1)} = S_i,$$
$$i \in D^n, \quad n \geqslant 1.$$

Пусть $u, v \in F$, $u \neq v$. Определим последовательность $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ функций $x_n : S \to F$, положив $x_n = u\chi_{S_{(i,0)}} + v\chi_{S_{(i,1)}}$. Пусть $\mathscr{E} = \{x_n : n \geqslant 1\}$. Заметим, что для любого $n \geqslant 1$ $\{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) : t \in S\} = \{u, v\}^n$ — емкое множество. Следовательно, $\mathscr{E}$ — n-емкий класс для любого $n \geqslant 1$ и $V(\mathscr{E}) = +\infty$. Пусть ξ — случайный элемент со значениями в $\mathscr{E}$, $P\{\xi = x_n\} = p_n$, $n \geqslant 1$, где $\{p_n\}_{n\geqslant 1}$ — некоторое распределение вероятностей. Рассмотрим последовательность $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ независимых копий ξ. Если ν_n обозначает число попарно различных элементов выборки $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то

$$N(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 2^{\nu_n}, \quad h(n) = \ln N(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \nu_n \ln 2. \tag{7}$$

Как и при доказательстве теоремы 1, легко установить, что $M\nu_n = \sum_{j=1}^\infty (1 - (1 - p_j)^n)$. Простые оценки показывают, что при этом $M\nu_n =$

$= o(n)$, $n \to \infty$. Учитывая (7), получаем $Mh(n) = o(n)$, $n \to \infty$. В силу теоремы 4 работы [8] $\| S_n \|_\infty = o(n)$, $n \to \infty$, с вероятностью 1 и в среднем. Теорема 2 доказана.

Отметим, что из полученных результатов следуют некоторые свойства классов Вапника — Червоненкиса [5].

1. *Вапник В. Н.*, *Червоненкис А. Я.* О равномерной сходимости частот появления событий к их вероятностям // Теория вероятностей и ее применения. — 1971. — **16**, № 2. — С. 264—279.
2. *Вапник В. Н.*, *Червоненкис А. Я.* Теория распознавания образов.— М. : Наука, 1974.— 415 с.
3. *Вапник В. Н.*, *Червоненкис А. Я.* Необходимые и достаточные условия равномерной сходимости средних к математическим ожиданиям // Теория вероятностей и ее применения.— 1981.— **26**, № 3.— С. 543—563.
4. *Dudley R. M.* Central limit theorems for empirical measures // Ann. Probab.— 1978.— **6**, N 6.— P. 899—929.
5. *Durst M.*, *Dudley R. M.* Empirical processes, Vapnik — Chervonenkis classes and Poisson processes // Probab. and Math. Statistics.— 1980.— **1**, N 2.— P. 109—115.
6. *Колчинский В. И.* О центральной предельной теореме для эмпирических мер // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1981.— Вып. 24.— С. 63—75.
7. *Gine E.*, *Zinn J.* On the central limit theorem for empirical processes // Ann. Probab.— 1984.— **12**, N 4.— P. 929—990.
8. *Колчинский В. И.* Функциональные предельные теоремы и эмпирическая энтропия I // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1985.— Вып. 33.— С. 31—42.
9. *Колчинский В. И.* Функциональные предельные теоремы и эмпирическая энтропия. II // Там же.— 1986.— Вып. 34.— С. 73—85.
10. *Dudley R. M.* Measures on non-separable metric spaces // Ill. J. Math.— 1967.— **11**, N 3.— P. 449—453.

Киев. ун-т

Получено 13.11.84