УДК 517.538.5

В. В. Ковтунец

Дифференциальные свойства оператора наилучшего приближения комплекснозначных функций. 1

Пусть $\mathfrak{M}$ — метрический компакт, $C(\mathfrak{M})$ — комплексное банахово пространство непрерывных на $\mathfrak{M}$ комплекснозначных функций, снабженное равномерной нормой. Предположим, что в $C(\mathfrak{M})$ задана некоторая чебышевская система функций $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$. Обозначим через $M\ (\subset C(\mathfrak{M}))$ линейное подпространство, натянутое на элементы $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, комплексной размерности $n+1$; через $P: C(\mathfrak{M}) \to M$ — оператор наилучшего равномерного приближения функций из $C(\mathfrak{M})$ обобщенными полиномами $Q(z) = \sum_{q=0}^{n} c_q \varphi_q(z) \in M$ по чебышевской системе функций $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, так что $\| f - P(f) \| = \min \{ \| f - Q \| : Q \in M \}$. Для произвольной функции $f \in C(\mathfrak{M})$ положим $E(f) := \| f - P(f) \|$ — величина (функционал) наилучшего приближения.

Хорошо известно, что оператор P является однозначным и непрерывным на $C(\mathfrak{M})$ [1, с. 28, 31]. Исследуем его дифференциальные свойства. В первой части работы изучается дифференцируемость оператора P в точках $f \in C(\mathfrak{M})$ таких, что характеристическое множество функции f имеет максимальную длину, т. е. состоит из $2n+3$ точек. Множество функций с таким свойством является открытым и всюду плотным в $C(\mathfrak{M})$, если только компакт $\mathfrak{M}$ имеет не более $n+1$ изолированных точек [2].

Следует отметить, что в действительном случае дифференциальные свойства оператора P исследованы в работах [3—5].

Приведем некоторые определения и известные факты. e-Точкой функции $h(z) \in C(\mathfrak{M})$ будем называть всякую точку $\zeta \in \mathfrak{M}$, в которой имеет место равенство $|h(\zeta)| = \| h \|_{C(\mathfrak{M})}$. Согласно критерию А. Н. Колмогорова [1, с. 47] полином $P(f, z) = \sum_{q=0}^{n} c_q \varphi_q(z)$ является полиномом наилучшего равномерного приближения функции f тогда и только тогда, когда для всякого полинома $Q \in M$ выполняется неравенство $\min \{ \mathrm{Re}\, [\overline{f(z) - P(f, z)}]\, Q(z) : z \in \mathcal{E} \} \leqslant 0$, где $\mathcal{E}$ — множество всех e-точек разности $f - P(f)$.

Согласно критерию В. К. Иванова — Е. Я. Ремеза [1, с. 56] полином $P(f, z)$ является полиномом наилучшего приближения функции f тогда и только тогда, когда найдутся такие e-точки $z_1, \ldots, z_m$ и положительные числа $\delta_1, \ldots, \delta_m$, что при всех $q = 0, 1, \ldots, n$ выполняются равенства $\sum_{j=1}^{m} \delta_j [\overline{f(z_j) - P(f, z_j)}]\, \varphi_q(z_j) = 0$. Обозначив $\hat{\varphi}(z) = \begin{pmatrix} \varphi_0(z) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n(z) \end{pmatrix}$, условие В. К. Иванова — Е. Я. Ремеза представим в виде $\sum_{j=1}^{m} \delta_j [\overline{f(z_j) - P(f, z_j)}] \times \hat{\varphi}(z_j) = 0$.

Характеристическим множеством функции f, $f \notin M$, называется такое множество $E \subset \mathfrak{M}$, что полином $P(f, z)$ является наилучшим приближением функции f не только на $\mathfrak{M}$, но и на множестве E, причем для всякого собственного подмножества $E_0 \subset E$ последнее утверждение неверно. Известно [1, с. 53], что в случае, когда f не является полиномом, характеристическое множество существует, любая его точка является e-точкой разности $f - P(f)$, и при этом мощность его $m = |E|$ удовлетворяет неравенствам $n + 2 \leqslant m \leqslant 2n + 3$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Если всякое характеристическое множество функции $f \in C(\mathfrak{M}) \setminus M$ содержит $2n+3$ точки, то оператор P в точке f имеет односторонние производные по каждому направлению $h \in C(\mathfrak{M})$. Коэффициенты производной*

$$\lim_{t \to +0} \frac{P(f + th) - P(f)}{t} =: D_+(f, h) \in M$$

однозначно определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathrm{Re}\, [\overline{f(\xi_j) - P(f, \xi_j)}]\, D_+(f, h, \xi_j) + \alpha E(f) = \\ = \mathrm{Re}\, [\overline{f(\xi_j) - P(f, \xi_j)}]\, h(\xi_j), \quad j = 1, \ldots, 2n+3, \tag{1}$$

где $\{\xi_1, \ldots, \xi_{2n+3}\} = E$ — характеристическое множество функции f, которое является пределом характеристических множеств $E_k := \{\xi_{k1}, \ldots, \xi_{k(2n+3)}\}$ функций $f + t_k h$ при некоторой последовательности (t_k), $t_k \to$

$\to +0,\ k\to\infty$, *т. е.* $\xi_j = \lim\limits_{k\to\infty} \xi_{kj},\ \ j = 1, \ldots, 2n+3$; α — *действительное неизвестное*, $\alpha := \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{E(f+th) - E(f)}{t}$.

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[0, \delta]$ такой, что при любом $t \in [0, \delta]$ функция $f + th$ не является полиномом: $f + th \notin M$. Положим $P(t; z) := P(f + th, z)$, $E(t) := \| f + th - P(f + th) \|$, $\Psi(t, z) := \dfrac{f(z) + th(z) - P(t; z)}{E(t)}$. Исследуем дифференцируемость функции $\Psi(t, z)$ по параметру t в точке $t = 0$ справа.

Лемма. *Если функция f удовлетворяет условиям теоремы 1, то найдется такая окрестность $U = U(f) \subset C(\mathfrak{M}) \setminus M$ и константа $K > 0$, что для всех $g \in U(f)$ и всех $s \in C(\mathfrak{M})$ верно неравенство*

$$\| P(g) - P(s) \| < K \| g - s \|. \tag{2}$$

Доказательство леммы. Для произвольных $g \in C(\mathfrak{M})$ и $s \in C(\mathfrak{M})$ положим $u := g - P(g)$, $v := s - P(s)$ и докажем, что найдется такая окрестность $U = U(f)$ и константа $K_1 > 0$, что для произвольных $g \in U(f)$ и $s \in C(\mathfrak{M})$ выполняется неравенство

$$\| u - v \| \leqslant K_1 \| u - v - P(u - v) \| = K_1 E(u - v). \tag{3}$$

Предположив противное, найдем такие последовательности $(u_k)_{k=1}^{\infty}$, $(v_k)_{k=1}^{\infty}$, $P(u_k) = P(v_k) = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u_0 := f - P(f)$, что справедливо соотношение

$$\frac{u_k - v_k - P(u_k - v_k)}{\| u_k - v_k \|} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что $u_k - v_k \to 0$ при $k \to \infty$, т. е. $v_k \to u_0$. В самом деле, если предположить, что $\| u_k - v_k \| \to \infty$ при $k \to \infty$, то $\| v_k \| \to \infty$ и при всех достаточно больших k имеем $E(u_k - v_k) \geqslant E(v_k) - E(u_k) \geqslant \gamma \| v_k - u_k \|$, $\gamma = \text{const} > 0$, что противоречит (4). Следовательно, норма $\| u_k - v_k \|$ ограничена равномерно по всем k, и тогда $u_k - v_k - P(u_k - v_k) \to 0$. Используя ограниченность последовательности полиномов $P(u_k - v_k)$, считаем ее сходящейся: $\lim\limits_{k\to\infty} P(u_k - v_k) =: Q$. Тогда последовательность $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ также сходится: $\lim\limits_{k\to\infty} v_k =: v_0$. В силу непрерывности оператора P имеем $u_0 = v_0 + Q$, и из условия $P(u_0) = 0$ следует $Q = 0$. Следовательно, $u_k - v_k \to 0$, $k \to \infty$.

Таким образом, (4) можно представить в виде

$$u_k = v_k + P(u_k - v_k) + \alpha_k = v_k + P_k + \alpha_k, \tag{5}$$

где $\| \alpha_k \| = o(\| u_k - v_k \|)$ при $k \to \infty$.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться возможностью выбирать подпоследовательности с нужными свойствами из последовательностей $(u_k)_{k=1}^{\infty}$, $(v_k)_{k=1}^{\infty}$. Для упрощения записи за подпоследовательностями всякий раз будем сохранять обозначения, принятые для последовательностей.

Так, последовательность полиномов $\left(\dfrac{P_k}{\| u_k - v_k \|}\right)_{k=1}^{\infty}$ можно считать сходящейся:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{\| u_k - v_k \|} = \lim_{k\to\infty} \frac{u_k - v_k}{\| u_k - v_k \|} =: P_0, \quad \| P_0 \| = 1. \tag{6}$$

Не ограничивая общности, будем полагать, что при всех $k = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\| v_k \| \leqslant \| u_k \|. \tag{7}$$

Обозначим через E_k некоторое характеристическое множество функций u_k, $k = 1, 2, \ldots$. Из результатов работы [2] следует, что при всех достаточно больших k характеристическое множество функции u_k содержит $2n+3$ точки: $E_k = \{\xi_{k1}, \ldots, \xi_{k(2n+3)}\}$. В силу компактности $\mathfrak{M}$ последовательности $\{\xi_{kj}\}_{k=1}^{\infty}$, $j = 1, \ldots, 2n+3$, можно считать сходящимися: $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_{kj} = \xi_j$, $j = 1, \ldots, 2n+3$. Из непрерывности оператора наилучшего приближения легко следует, что во множестве $E = \{\xi_1, \ldots, \xi_{2n+3}\}$ содержится характеристическое множество функции u_0. Из условия теоремы вытекает, что множество E является характеристическим для функции u_0.

Пользуясь очевидным в силу (7) неравенством $|v_k(\xi_{kj})| \leqslant |u_k(\xi_{kj})|$, из (5) и (6) получаем

$$\operatorname{Re} \overline{u_0(\xi_j)}\, P_0(\xi_j) \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, 2n+3. \tag{8}$$

Докажем, что на самом деле в (8) выполняется равенство при каждом j. Действительно, если окажется, что $\operatorname{Re} \overline{u_0(\xi_l)}\, P_0(\xi_l) > 0$ хотя бы в одной точке $\xi_l \in E$, то это сразу ведет к противоречию с критерием В. К. Иванова — Е. Я. Ремеза, согласно которому $\sum_{j=1}^{2n+3} \delta_j \overline{u_0(\xi_j)}\, P_0(\xi_j) = 0$, и все δ_j положительны. Итак, при всех $j = 1, \ldots, 2n+3$ имеем равенства

$$\operatorname{Re} \overline{u_0(\xi_j)}\, P_0(\xi_j) = 0. \tag{8$'$}$$

Докажем, что $P_0 = 0$. В самом деле, равенства (8′) образуют систему из $2n+3$ действительных линейных алгебраических уравнений относительно $2n+2$ действительных неизвестных — действительных и мнимых частей коэффициентов полинома P_0. Нетрудно убедиться, исходя из условий В. К. Иванова — Е. Я. Ремеза $\sum_{j=1}^{2n+3} \delta_j \overline{u_0(\xi_j)}\, \hat{\varphi}(\xi_j) = 0$, что ранг матрицы такой системы на единицу меньше мощности характеристического множества; в данном случае ранг равен $2n+2$ (см. также [2]).

Это значит, что система имеет лишь тривиальное решение и $P_0 = 0$. Но тогда приходим к противоречию с (6). Этим неравенство (3) доказано.

Теперь из (3) достаточно просто получается требуемое неравенство (2):

$$\|P(g) - P(s)\| = \|P(g) + u - P(s) - v - u + v\| \leqslant$$
$$\leqslant \|g - s\| + \|u - v\| \leqslant \|g - s\| + K_1 \|u - v - P(u - v)\| \leqslant$$
$$< \|g - s\| + K_1 \|u - v + P(g) - P(s)\| = (K_1 + 1)\|g - s\|.$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству существования производной $\partial\Psi(0+0, z)/\partial t$. Заметим, что величина наилучшего приближения $E(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|E(f_1) - E(f_2)| \leqslant \|f_1 - f_2\| \quad \forall f_1, f_2 \in C(\mathfrak{M}).$$

Поэтому согласно лемме найдется такая последовательность $(t_k)_{k=1}^{\infty}$, $t_k \to +0$, что существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Psi(t_k, z) - \Psi(0, z)}{t_k} =: R_1(z).$$

Если предположить, что производная $\partial\Psi(0+0, z)/\partial t$ не существует, то найдется последовательность $(\tau_k)_{k=1}^{\infty}$, $\tau_k \to +0$, $k \to \infty$, такая, что предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Psi(\tau_k, z) - \Psi(0, z)}{\tau_k} =: R_2(z)$$

отличен от $R_1(z)$: $R_2(z) \not\equiv R_1(z)$.

Легко видеть, что функции R_1 и R_2 представимы в виде

$$R_i(z) = -\frac{\alpha_i}{E(0)} \Psi(0, z) + \frac{1}{E(0)} [h(z) - \sum_{q=0}^{n} c_{qi} \varphi_q(z)] =$$
$$= -\frac{\alpha_i}{E(0)} \Psi(0, z) + \frac{1}{E(0)} [h(z) - P_i(z)], \quad i = 1, 2, \tag{9}$$

где

$$\alpha_1 := \lim_{k\to\infty} \frac{E(t_k) - E(0)}{t_k}, \quad \alpha_2 := \lim_{k\to\infty} \frac{E(\tau_k) - E(0)}{\tau_k},$$

$$D_1(z) := \lim_{k\to\infty} \frac{P(t_k, z) - P(0, z)}{t_k}, \quad D_2(z) := \lim_{k\to\infty} \frac{P(\tau_k, z) - P(0, z)}{\tau_k}.$$

Через $E_k = \{\xi_{k1}, \ldots, \xi_{k(2n+3)}\}$ обозначим характеристическое множество функции $\Psi(t_k, z)$. Благодаря компактности $\mathfrak{M}$, как и при доказательстве леммы, можно считать, что существуют пределы $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_{kj} =: \xi_j$, $j = 1, \ldots, 2n+3$. Тогда $E = \{\xi_1, \ldots, \xi_{2n+3}\}$ — характеристическое множество функции $\Psi(0, z)$.

Докажем сначала, что в представлении (9) $\alpha_1 = \alpha_2$. Пусть, для определенности, $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$. Тогда

$$R_1(z) - R_2(z) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{E(0)} \Psi(0, z) + Q(z), \tag{10}$$

где $Q(z) = \frac{1}{E(0)} \sum_{q=0}^{n} (c_{q2} - c_{q1}) \varphi_q(z) \in M$. Поскольку в каждой e-точке ζ функции $\Psi(0, z)$ выполняются неравенства $|\Psi(\tau_k, \zeta)| \leqslant |\Psi(0, \zeta)|$, $|\Psi(t_k, \zeta)| \leqslant |\Psi(0, \zeta)|$, то с помощью соотношений

$$\Psi(t_k, z) = \Psi(0, z) + t_k R_1(z) + o(t_k), \qquad \Psi(\tau_k, z) = \Psi(0, z) + \tau_k R_2(z) + o(\tau_k) \tag{11}$$

получаем

$$\operatorname{Re} \overline{\Psi(0, \zeta)}\, R_1(\zeta) \leqslant 0, \tag{12}$$

$$\operatorname{Re} \overline{\Psi(0, \zeta)}\, R_2(\zeta) \leqslant 0. \tag{12'}$$

Аналогично, отправляясь от очевидных неравенств $|\Psi(0, \xi_{kj})| \leqslant |\Psi(t_k, \xi_{kj})|$, имеем $\operatorname{Re} \overline{\Psi(0, \xi_j)}\, R_1(\xi_j) \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, 2n+3$. Отсюда с учетом (12) следует равенство

$$\operatorname{Re} \overline{\Psi(0, \xi_j)}\, R_1(\xi_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, 2n+3. \tag{13}$$

Используя (10), (12′), (13), получаем неравенства

$$\operatorname{Re} \overline{\Psi(0, \xi_j)}\, Q(\xi_j) \geqslant (\alpha_1 - \alpha_2)/E(0), \quad j = 1, \ldots, 2n+3.$$

Из критерия А. Н. Колмогорова следует $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha$.

Докажем равенство полиномов $D_1 = D_2$. В силу изложенного выше справедливы неравенства

$$\operatorname{Re} \overline{\Psi(0, \xi_j)}\, Q(\xi_j) \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, 2n+3. \tag{14}$$

На самом деле в (14) при всех j имеет место знак равенства, ибо иное противоречило бы критерию В. К. Иванова — Е. Я. Ремеза, согласно которому $\sum_{j=1}^{2n+3} \delta_j \overline{\Psi(0, \xi_j)}\, Q(\xi_j) = 0$, $\delta_j > 0$, $j = 1, \ldots, 2n+3$. Тогда из (10) следуют равенства

$$\operatorname{Re} \overline{\Psi(0, \xi_j)}\, R_2(\xi_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, 2n+3. \tag{13'}$$

Обозначим, выделяя в соответствующих выражениях действительные и мнимые части

$$\overline{\Psi(0, \xi_j)}\, \varphi_q(\xi_j) = \gamma_q(\xi_j) + i\varkappa(\xi_j), \quad c_{q1} = a_{q1} + ib_{q1},$$

$$c_{q2} = a_{q2} + ib_{q2}, \quad q = 0, 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, 2n+3.$$

Равенства (13) представляют собой систему алгебраических линейных уравнений относительно $2n+3$ действительных неизвестных α, a_{q1}, b_{q1}. Докажем, что эта система имеет единственное решение.

Матрица системы (13) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_0(\xi_1) & \dots\ \gamma_n(\xi_1) & -\varkappa_0(\xi_1) & \dots -\varkappa_n(\xi_1) & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_0(\xi_{2n+3}) & \dots\ \gamma_n(\xi_{2n+3}) & -\varkappa_0(\xi_{2n+3}) & \dots -\varkappa_n(\xi_{2n+3}) & 1 \end{pmatrix}$$

В силу результатов работы [2] матрица A_1, полученная из A вычеркиванием последнего столбца, имеет ранг $2n+2$. Единственная линейная зависимость строк матрицы A_1 исходит из условия В. К. Иванова — Е. Я. Ремеза

$$\Sigma_{j=1}^{2n+3}\delta_j\gamma_q(\xi_j) = 0, \quad \Sigma_{j=1}^{2n+3}\delta_j\varkappa_q(\xi_j) = 0, \quad \delta_j > 0, \quad j = 1, \dots, 2n+3.$$

Но этой линейной зависимости не могут удовлетворять строки всей матрицы A. Таким образом, ранг матрицы A равен $2n+3$ и система (13) имеет единственное решение.

Из (13′) следует, что коэффициенты функции $R_2(z)$ также удовлетворяют системе (13) и, следовательно, $R_2 = R_1$. Этим существование производной $\partial\Psi(0+0, z)/\partial t = R_1(z) = R_2(z) =: R(z)$ доказано.

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно заметить, что с учетом (9) равенства (13) равносильны системе (1).

Следствие. *Если функция $f \in C(\mathfrak{M}) \setminus M$ такова, что разность $f - P(f)$ имеет в точности $2n+3$ е-точки, которые образуют ее характеристическое множество, то оператор $P: C(\mathfrak{M}) \to M$ дифференцируем по Гато в точке f. При этом производная $D(f, h)$ по направлению h может быть найдена из системы уравнений* (1), *в которой $\xi_1, \dots, \xi_{2n+3}$ — упомянутые выше е-точки разности $f - P(f)$.*

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *для одновременного существования производной оператора P и функционала наилучшего приближения E в точке $f \in C(\mathfrak{M}) \setminus M$ по направлению h необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $R(z) = R(h, z)$ вида* (9), *которая в каждой е-точке разности $f - P(f)$ удовлетворяет уравнению* (13) (*или, что то же самое, уравнению* (1)).

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1. Необходимость вытекает из того, что для любой е-точки ζ разности $f - P(f)$ функция $m(t) := |\Psi(t, \zeta)|^2$ достигает максимума при $t = 0$ и поэтому $m'(0) = 2\mathrm{Re}\,\overline{\Psi(0, \zeta)}\,R(0, \zeta) = 0$, где $R(0, z) = \partial\Psi(0, z)/\partial t$ имеет вид (9).

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 1. Ее можно использовать для вычисления односторонних производных оператора P в случаях, когда характеристическое множество функции f не является единственным.

Теорема 3. *Пусть функция $f \in C(\mathfrak{M}) \setminus M$ удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда для всякой функции $h \in C(\mathfrak{M})$ существует единственный полином $D_+(z) = D_+(f, h, z)$ и единственное действительное число α, которые удовлетворяют условиям:*

1) *в каждой е-точке ζ разности $f - P(f)$ выполняется неравенство*

$$\mathrm{Re}\,\overline{[f(\zeta) - P(f, \zeta)]}\,D_+(f, h, \zeta) + \alpha E(f) \geqslant \mathrm{Re}\,\overline{[f(\zeta) - P(f, \xi)]}\,h(\zeta);$$

2) *существует характеристическое множество $E = \{\xi_1, \dots, \xi_{2n+3}\}$ функции f, во всех точках которого справедливо равенство*

$$\mathrm{Re}\,\overline{[f(\xi_j) - P(f, \xi_j)]}\,D_+(f, h, \xi_j) + \alpha E(f) = \mathrm{Re}\,\overline{[f(\xi_j) - P(f, \xi_j)]}\,h(\xi_j).$$

При э ом $D_+(f, h, z) = \left.\dfrac{\partial P(f + th)}{\partial t}\right|_{t=+0}$, $\alpha = \left.\dfrac{dE(f + th)}{dt}\right|_{t=+0}$.

Аналог этой теоремы в действительном случае — лемма 2 из [4].

1. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 509 с.
2. *Blatt H. P.* On strong uniqueness in linear complex Chebyshev approximation // J. Approxim. Theory.— 1984.— **41**, N 2.— P. 159—169.

3. *Kroo A.* Differential properties of the operator of best approximation // Acta math. Acad. sci. hung.— 1977.— 30, N 3—4.— P. 185—203.
4. *Колушов А. В.* О дифференцируемости оператора наилучшего приближения // Мат. заметки.— 1981.— 29, № 4.— С. 577—596.
5. *Ковтунец В. В.* Обобщение параметрического метода С. Н. Бернштейна // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 6.— С. 689—695.

Ровен. пед. ин-т

Получено 25.02.85,
после доработки — 02.09.85