УДК 512.48

*А. А. Бовди, И. И. Хрипта*

# Групповые алгебры с полициклической мультипликативной группой

Пусть $U(KG)$ — мультипликативная группа групповой алгебры $KG$ группы $G$ над полем $K$. Очевидно, если $U(KG)$ — полициклическая группа, то мультипликативная группа поля $K$ также будет полициклической группой и, как известно, тогда $K$ — конечное поле. Поэтому в случае конечной группы $G$ полное описание групповых алгебр с полициклической мультипликативной группой следует из леммы 2 работы [1]. Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Если $U(KG)$ является бесконечной полициклической группой, то $K$ — конечное поле характеристики $p$, элементы конечного порядка бесконечной полициклической группы $G$ образуют конечную абелеву подгруппу $\pi(G)$, порядок которой не делится на $p$ и все идемпотенты алгебры $K\pi(G)$ центральны в $KG$.*

*Обратно, если $K$ — конечное поле характеристики $p$, бесконечная полициклическая группа $G$ удовлетворяет указанным выше условиям и в скрещенном произведении группы $G/\pi(G)$ и поля $K\pi(G)$ для любого минимального идемпотента $e$ алгебры $K\pi(G)$ существуют только тривиальные обратимые элементы, то группа $U(KG)$ является полициклической.*

Отметим, что если полициклическая группа без кручения правоупорядочена, то скрещенное произведение такой группы и поля содержит только тривиальные обратимые элементы [2].

В дальнейшем через $\pi(G)$ обозначим множество всех элементов конечного порядка группы $G$. Как известно [2], множество всех элементов $\Delta = \Delta(G)$ группы $G$, принадлежащих конечным классам сопряженных элементов группы $G$, и его подмножество $\Delta^+(G) = \pi(G) \cap \Delta(G)$ являются нормальными подгруппами группы $G$.

Лемма. *Пусть все периодические подгруппы группы $G$ конечны и характеристика поля $K$ не делит порядки элементов из $\pi(G)$. Если $U(KG)$ разрешима, то $\pi(G)$ является подгруппой.*

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем, когда $G = \langle a, b \mid a^m = b^n = 1\rangle$. Пусть $G = G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_t = 1$ — ряд коммутантов группы $G$, $\pi(G) \neq G$ и $G_k$ — такой член ряда коммутантов группы $G$, что $\pi(G_k) \neq G_k$ и $\pi(G_{k+1}) = G_{k+1}$. Выберем элемент $g$ бесконечного порядка группы $G_k$ и рассмотрим подгруппу $H = \langle a, g\rangle$. В силу условия леммы подгруппа $\Delta^+(H)$ конечна и поэтому, если $H_1 = H/\Delta^+(H)$, то $\Delta^+(H_1) = 1$. Тогда ввиду теоремы 21 из [2] кольцо $KH_1$ первично. Пусть $\mathcal{I}(\Delta^+(H))$ — идеал кольца $KH$, порожденный элементами $h - 1$, $h \in \Delta^+(H)$. Если $f = \frac{1}{|\Delta^+(H)|} \sum_{h\in\Delta^+(H)} h$, то $KH = KHf \oplus KH(1-f)$ и $KH_1 \cong KH/\mathcal{I}(\Delta^+(H))$. Легко видеть, что группы $U(KH_1)$ и $U(KHf)$ изоморфны, а отсюда вытекает разрешимость группы $U(KH_1)$. Так как $H \cap G_{k+1} \subseteq \Delta^+(H)$, то элемент $\bar{g} = g\Delta^+(H)$ принадлежит абелевой нормальной подгруппе $H \cap G_k/\Delta^+(H)$ группы $H_1$. Поскольку $\Delta^+(H_1) = 1$, то эта подгруппа без кручения. Очевидно, $[H_1 : C_{H_1}(\bar{g})] \leqslant m$. Пусть $C$ — класс сопряженных элементов группы $H_1$, содержащий элемент $\bar{g}$, и $w = \sum_{h\in C} h$. Тогда $w$ из центра кольца $KH_1$ и принадлежит групповому кольцу абелевой группы без кручения. Таким образом, мы доказали, что $KH_1$ — первичное кольцо с разрешимой мультипликативной группой, содержащее такой центральный элемент $w$, что $w \neq w^i$, $i = 2, 3, 4$.

Предположим, что $a \bar{\in} \Delta^+(H)$. Тогда $\frac{1}{m}(1 + a + a^2 + \ldots + a^{m-1}) + \mathcal{I}(\Delta^+(H))$—нетривиальный идемпотент кольца $KH_1$ и согласно теореме Ланского [3] разрешимая группа $U(KH_1)$ абелева, что противоречит предположению $a \bar{\in} \Delta^+(H)$. Значит, $g^r \in C_G(a)$ при некотором $r$ и по аналогичным соображениям $g^s \in C_G(b)$. Поэтому в центре группы $G$ имеется элемент бесконечного порядка. Если $e = \frac{1}{|\Delta^+(G)|} \sum_{h\in\Delta^+(G)} h$, $KGe \cong KG/\Delta^+(G)$— первичное кольцо с разрешимой мультипликативной группой. Тогда $\frac{1}{m}(1 + a + a^2 + \ldots + a^{m-1})e$ — нетривиальный идемпотент и снова по теореме Ланского группа $U(KG/\Delta^+(G))$ абелева. Следовательно, абелева группа $G/\Delta^+(G)$ конечна, поэтому и группа $G$ конечна, а это противоречит предположению $\pi(G) \neq G$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Необходимость. Очевидно, $K$ — конечное поле характеристики $p$ и предположим, что $G$ имеет элемент $h$ порядка $p$. Тогда $h$ не содержится в конечной нормальной подгруппе группы $G$. Действительно, в противном случае в централизаторе $C_G(h)$ существовал бы элемент $a \in G$ бесконечного порядка и группа $U(KG)$ содержала бы бесконечную периодическую подгруппу $\langle 1 + a^i(h-1) \mid i \in Z\rangle$, что в полициклической группе невозможно.

Пусть $G = G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_t = 1$ — ряд коммутантов группы $G$ и $G_k$ — последняя бесконечная подгруппа этого ряда. Положим $H = G/G_{k+1}$ и $H_k = G_k/G_{k+1}$. Как доказано выше, подгруппа $G_{k+1}$ не содержит элементов порядка $p$ и поэтому $\frac{1}{|G_{k+1}|}\sum_{g \in G_{k+1}} g$ — центральный идемпотент кольца $KG$. Очевидно, $KH \cong KGe$ и поскольку $U(KGe) \times U(KG(1-e)) = U(KG)$, то группа $U(KH)$ полициклическая. Если $r$ — порядок периодической части абелевой группы $H_k$, то $A = H_k^r$ — нормальная подгруппа без кручения группы $H$. Пусть $1 \neq a \in A$ и $h$ — элемент порядка $p$ группы $H$. Тогда элемент $\eta = \sum_{i=0}^{p-1} h^i a h^{-i}$ не является делителем нуля, $\eta a = a\eta$, $\eta h = h\eta$ и $\langle 1 + \eta^i(h-1) \mid i \in Z\rangle$ — бесконечная периодическая подгруппа группы $U(KH)$, что невозможно. Следовательно, группа $G$ без элементов порядка $p$ и по лемме $\pi(G)$ — подгруппа.

Легко видеть, что группа $\pi(G)$ конечна и алгебра $K\pi(G)$ не содержит нильпотентных элементов. Действительно, если $u$ — нильпотентный элемент из $K\pi(G)$ и $g$ — элемент бесконечного порядка из централизатора подгруппы $\pi(G)$, то в $U(KG)$ существует бесконечная периодическая подгруппа $\langle 1 + g^i u \mid i \in Z\rangle$, что невозможно. Далее, если минимальный идемпотент $e$ алгебры $K\pi(G)$ не принадлежит центру алгебры $KG$ и циклическая подгруппа $\langle a\rangle$ порядка $m$ не является нормальной в $G$, то существует такой элемент $g \in G$ бесконечного порядка, что элементы $eg$ и $(1 + a + a^2 + \ldots + a^{m-1})g(1-a)$ нильпотентны. Тогда некоторая степень элемента $g$ принадлежит централизатору подгруппы $\pi(G)$ и повторением предыдущих рассуждений получаем противоречие. Следовательно, все идемпотенты алгебры $K\pi(G)$ центральны в $KG$ и каждая подгруппа группы $\pi(G)$ нормальна в $G$. Поэтому, если $\pi(G)$ неабелева, то она содержит подгруппу кватернионов $Q$. Тогда алгебра $KQ$ конечна и имеет нильпотентный элемент, так как конечные тела коммутативны. Однако это невозможно и группа $\pi(G)$ абелева. Необходимость условия доказана.

Достаточность. Если $e_1, e_2, \ldots, e_t$ — полный набор минимальных попарно ортогональных идемпотентов алгебры $K\pi(G)$, то $KG = KGe_1 \oplus KGe_2 \oplus \ldots \oplus KGe_t$ и $U(KG) = U(KGe_1) \times U(KGe_2) \times \ldots \times U(KGe_t)$. Алгебра $KGe_i$ изоморфна скрещенному произведению группы без кручения $G/\pi(G)$ и поля $K\pi(G)e_i$. В силу предположения группа $U(KGe_i)$ тривиальна, а отсюда следует, что группа $U(KG)$ полициклическая. Теорема доказана.

1. *Бовди А. А., Хрипта И. И.* Групповые алгебры периодических групп с разрешимой мультипликативной группой // Мат. заметки.— 1977.— 22, № 3.— С. 421—432.
2. *Бовди А. А.* Групповые кольца.— Ужгород : Ужгород. ун-т, 1974.— 118 с.
3. *Lanski C.* The group of units of a simple ring, I.// J. Algebra.— 1970.— N 15.— P. 554—569.

Ужгород. ун-т
Дрогобыч. пед. ин-т.

Получено 11.10.84