УДК 519.41/47

Д. И. Зайцев

# О теореме Ито и произведениях групп

1. Настоящая статья является продолжением работы [1]. С помощью способа доказательства теоремы Ито [2] в [1] было доказано следующее утверждение о группах, разложимых в произведение абелевой подгруппы и $FC$-подгруппы (т. е. подгруппы с конечными классами сопряженных элементов).

Лемма 1. ([1], следствие леммы 1). *Пусть группа $G$ является произведением $G = AX$ абелевой подгруппы $A$ и $FC$-подгруппы $X$, $F$ — произвольная конечно порожденная подгруппа взаимного коммутанта $[A, \zeta(X)]$ подгруппы $A$ и центра $\zeta(X)$ подгруппы $X$. Тогда для любой подгруппы $H$, входящей в централизатор $C_G(F)$, и любого элемента $a \in A$ индекс $|H : C_H(F^a)|$ конечен.*

В настоящей работе более детально изучено строение подгруппы $[A, \zeta(X)]$ группы $G$ (лемма 2), что позволило усилить основной результат из [1] — теорему о непростоте бесконечных групп вида $G = AX$ с $\zeta(X) \neq 1$, а также указать ряд естественных условий, при которых группа $G$ обладает нетривиальной абелевой нормальной подгруппой (теорема 1). Кроме того, при ограничениях, исключающих из рассмотрения случай конечных групп, доказана разрешимость групп, разложимых в произведение абелевой и нильпотентной $FC$-подгрупп, и приведена оценка ступени разрешимости группы, зависящая от ступени нильпотентности $FC$-подгруппы (теорема 2 и ее следствие). Отметим, что для конечных групп, факторизуемых двумя нильпотентными подгруппами, неизвестно, ограничена ли ступень ее разрешимости числом, зависящим только от ступеней нильпотентности множителей факторизации. Это неизвестно даже для конечных $p$-групп вида $G = AX$, где подгруппа $A$ абелева, подгруппа $X$ нильпотентна ступени 2.

В работе используются обозначения, принятые в [1]; кроме того, $G^{(n)}$ — $n$-й коммутант группы $G$. В [1] можно найти и объяснение встречающихся здесь понятий, например понятия $FC$-централизатора подгруппы, а также ссылки на источники, содержащие необходимые сведения о строении $FC$-групп.

Основные результаты данной работы анонсированы в [3, 4].

**2.** Для $FC$-центра группы $G$, разложимой в произведение $G = AX$ двух $FC$-подгрупп $A$, $X$, и $FC$-централизаторов множителей справедливы следующие соотношения:

$$FC(G) = (A \cap FC(G))(X \cap FC(G)),\ FC_G(X) = X \cdot FC(G). \tag{1}$$

Они аналогичны известным соотношениям для центра группы, факторизуемой двумя абелевыми подгруппами, и для централизаторов этих подгрупп.

Докажем первое из соотношений (1). Пусть $g = ax \in FC(G)$, $a \in A$, $x \in X$, $A_1 = C_A(g) \cap C_A(a)$. Так как $A$ — $FC$-подгруппа и $g$ — элемент $FC$-центра группы $G$, то индекс $|A : A_1|$ конечен. Для любого элемента $a_1 \in A_1$ имеем $g^{a_1} = g = ax$, $g^{a_1} = a^{a_1}x^{a_1} = ax^{a_1}$, поэтому $x = x^{a_1}$ и, значит, $a_1 \in C_G(x)$. Этим доказано, что $A_1 \leqslant C_G(x)$. Индекс $|X : C_X(x)|$ централизатора элемента $x$ в $FC$-подгруппе $X$ конечен, поэтому, используя лемму 5.1 из [5], получаем конечность индекса $|G : \langle A_1, C_X(x)\rangle|$, а это ввиду соотношения $\langle A_1, C_X(x)\rangle \leqslant C_G(x)$ влечет конечность индекса $|G : C_G(x)|$. Значит, $x \in X \cap FC(G)$ и тогда $a = gx^{-1} \in A \cap FC(G)$, что доказывает первое из соотношений (1). Второе устанавливается аналогично.

Докажем теперь два вспомогательных утверждения. Пусть группа $G = AX$ разложима в произведение абелевой подгруппы $A$ и $FC$-подгруппы $X$. Подгруппа $K$ — взаимный коммутант $K = [A, Z]$ подгруппы $A$ и некоторой подгруппы $Z$, содержащейся в центре $\zeta(X)$ подгруппы $X$. Подгруппа $K$ нормальна в группе $G$; для $Z = \zeta(X)$ это отмечено в лемме 2 из [1], в общем случае устанавливается таким же способом.

Лемма 2. *Справедливы следующие утверждения:* 1) $K \cap FC_G(X)$ — *нормальная подгруппа группы* $G$; 2) *фактор-группа* $K/K \cap FC_G(X)$ *двуступенно разрешима*; 3) *фактор-группа* $K \cap FC_G(X)/K \cap FC(G)$ *абелева*.

Доказательство. 1. Так как $K$ — нормальная подгруппа группы $G$, то пересечение $K \cap FC_G(X)$ является нормальной подгруппой $FC$-централизатора $FC_G(X)$ подгруппы $X$. Далее, $FC$-подгруппа $X$ входит в свой $FC$-централизатор, следовательно, $X \leqslant N_G(K \cap FC_G(X))$ и поэтому остается показать, что подгруппа $A$ содержится в $N_G(K \cap FC_G(X))$. Возьмем в пересечении $K \cap FC_G(X)$ произвольный элемент $g$ и в подгруппе $A$ произвольный элемент $a$. В силу леммы 1 индекс $|H : C_H(g^a)|$, где $H = C_X(g)$, конечен. По определению $FC$-централизатора подгруппы $X$ индекс $|X : C_X(g)| = |X : H|$ также конечен. Значит, конечен и индекс $|X : C_H(g^a)|$. Вследствие соотношений $H \leqslant X$, $C_H(g^a) \leqslant C_X(g^a)$ отсюда вытекает конечность индекса $|X : C_X(g^a)|$ централизатора элемента $g^a$ в подгруппе $X$. По определению $FC$-централизатора подгруппы $X$ это означает, что $g^a \in FC_G(X)$. Кроме того, поскольку $K$ — нормальная подгруппа группы $G$ и $g \in K$, то $g^a \in K$, Таким образом, $g^a \in K \cap FC_G(X)$ и ввиду произвольности выбора элементов $g$, $a$ подгрупп $K \cap FC_G(X)$, $A$ соответственно доказано, что $A \leqslant N_G(K \cap FC_G(X))$.

2. Прежде всего отметим, что в утверждении 2 действительно можно говорить о фактор-группе $K/K \cap FC_G(X)$, так как в силу утверждения 1 $K \cap FC_G(X)$ — нормальная подгруппа группы $G$. Положим $\overline{G} = G/K \cap FC_G(X)$. Поскольку $K \cap X \leqslant K \cap FC_G(X)$, то $K \cap X\,(K \cap FC_G(X)) = K \cap FC_G(X)$ и, значит, для образов $\overline{K}$, $\overline{X}$ подгрупп $K$, $X$ в группе $\overline{G}$ выполняется соотношение $\overline{K} \cap \overline{X} = \overline{1}$. Поэтому, применяя к группе $\overline{G} = \overline{A}\overline{X}$ и к ее нормальной подгруппе $\overline{K}$ утверждение 2 леммы 5 из [1], видим, что подгруп-

па $\bar{K} = K/K \cap FC_G(X)$ двуступенно разрешима (в частности, она может быть и абелевой).

3. Обозначим $S = K \cap FC_G(X)$ и докажем, что $S' \leqslant K \cap FC(G)$. Так как $S \leqslant K$, то включение $S' \leqslant K$, очевидно, выполняется, поэтому остается установить, что $S' \leqslant FC(G)$. Перейдем к фактор-группе $\bar{G} = G/FC(G)$. В силу второго из соотношений (1) $S = K \cap X \cdot FC(G)$, значит, $\bar{S} = \bar{K} \cap \cap \overline{X \cdot FC(G)} = \bar{K} \cap \bar{X} \leqslant \bar{X}$, откуда вытекает, что подгруппа $\bar{Z}$, входящая в центр подгруппы $\bar{X}$, централизует подгруппу $\bar{S}$, т. е. $\bar{Z} \leqslant C_{\bar{G}}(\bar{S})$ (напомним, что в соответствии с принятыми обозначениями $K = [A, Z]$, $Z \leqslant \zeta(X)$). Централизатор $C_{\bar{G}}(\bar{S})$ нормальной (по утверждению 1) подгруппы $\bar{S}$ группы $\bar{G}$ также является ее нормальной подгруппой, поэтому $\bar{K} = [\bar{A}, \bar{Z}] \leqslant \leqslant [\bar{A}, C_{\bar{G}}(\bar{S})] \leqslant C_{\bar{G}}(\bar{S})$ и, следовательно, $[\bar{K}, \bar{S}] = \bar{1}$. Так как $\bar{S} \leqslant \bar{K}$, то отсюда вытекает $\bar{S}' \leqslant [\bar{K}, \bar{S}] = \bar{1}, \bar{S}' = \bar{1}$, а это равносильно соотношению $S' \leqslant FC(G)$. Лемма доказана.

Следствие. *Подгруппа $[A, \zeta(X)]$ является расширением подгруппы $[A, \zeta(X)] \cap FC(G)$ с помощью разрешимой группы ступени не выше* 3.

Это утверждение вытекает из леммы 2, если в качестве подгруппы $Z$, входящей в определение подгруппы $K = [A, Z]$, взять центр $\zeta(X)$ подгруппы $X$.

Лемма 3. *Если центр $\zeta(X)$ подгруппы $X$ нетривиален и подгруппа $X$ совпадает со своим $FC$-централизатором в группе $G$, то группа $G$ имеет нетривиальную абелеву нормальную подгруппу.*

Доказательство. В силу соотношения (1) и условия леммы $X = FC_G(X) = X \cdot FC(G)$, значит, $FC(G) \leqslant X$ и поэтому $\zeta(X) \leqslant C_G(FC(G))$. Вследствие этого, так как $C_G(FC(G))$ — нормальная подгруппа группы $G$, то $[A, \zeta(X)] \leqslant [A, C_G(FC(G))] \leqslant C_G(FC(G))$. Отсюда явствует, что пересечение $[A, \zeta(X)] \cap FC(G)$ является абелевой подгруппой и тогда по следствию леммы 2 подгруппа $[A, \zeta(X)]$ разрешима. Это влечет разрешимость подгруппы $\zeta(X)[A, \zeta(X)]$. Она нормальна в группе $G$ и ввиду предположения $\zeta(X) \neq 1$ нетривиальна. Отсюда вытекает существование в группе $G$ нетривиальной абелевой нормальной подгруппы.

3. Теорема 1. *Пусть $G = AX$ — группа, разложимая в произведение абелевой подгруппы $A$ и $FC$-подгруппы $X$. Тогда, если центр $\zeta(X)$ подгруппы $X$ нетривиален, то группа $G$ имеет некоторую нетривиальную абелеву или конечную нормальную подгруппу. При этом группа $G$ имеет нетривиальную абелеву нормальную подгруппу в каждом из следующих трех случаев:* 1) *подгруппа $A$ полная;* 2) *подгруппа $A$ не имеет кручения;* 3) *подгруппа $X$ не содержится в большей $FC$-подгруппе группы $G$.*

Доказательство. В силу леммы 3 при доказательстве теоремы можно считать, что $X \neq FC_G(X)$. Тогда согласно второму из соотношений (1) $FC(G) \not\leqslant X$, согласно первому — $A \cap FC(G) \neq 1$.

Возьмем в $FC(G)$ некоторый отличный от единицы элемент $g$. Из определения $FC$-центра группы следует, что элемент $g$ порождает в группе $G$ нормальную $FC$-подгруппу $N$, имеющую конечное множество образующих элементов. Из известных фактов о строении $FC$-групп следует, что $N$ — конечное расширение своего центра $\zeta(N)$, поэтому при $\zeta(N) \neq 1$ центр $\zeta(N)$ является нетривиальной абелевой нормальной подгруппой группы $G$, а при $\zeta(N) = 1$ подгруппа $N$ конечна. Этим доказано первое утверждение теоремы.

Если $A$ — полная подгруппа, то $A$ входит в централизатор любого элемента $FC$-центра $FC(G)$ группы $G$. Следовательно, $A \leqslant C_G(FC(G))$ и потому пересечение $A \cap FC(G)$ содержится в центре подгруппы $FC(G)$. Нетривиальность этого центра является следствием соотношения $A \cap FC(G) \neq 1$.

Если подгруппа $A$ без кручения, то ввиду соотношения $A \cap FC(G) \neq \neq 1$ подгруппа $FC(G)$ содержит элементы бесконечного порядка. Обозначим через $N$ нормальную подгруппу группы $G$, порожденную одним из таких элементов. В этом случае, как отмечено выше, центр $\zeta(N)$ подгруппы $N$ есть нетривиальная абелева нормальная подгруппа группы $G$.

Рассмотрим третий случай. Поскольку $FC(G) \not\leqslant X$, то, как и выше, находим конечно порожденную нормальную $FC$-подгруппу $N$, не входящую в $X$. Подгруппа $N$ не может быть конечной, так как в противном случае $NX$ — $FC$-подгруппа, не совпадающая с $X$, а это невозможно по предположению. Значит, подгруппа $N$ бесконечна и, как отмечалось, ее центр $\zeta(N)$ есть нетривиальная абелева нормальная подгруппа группы $G$. Теорема доказана.

Следствие. *Если группа $G$ разложима в произведение $G = AX$ полной абелевой подгруппы $A$ и $FC$-подгруппы $X$, то центр $\zeta(X)$ подгруппы $X$ содержится в подгруппе $R(G)$ — предельном члене построенного индуктивно возрастающего ряда нормальных подгрупп группы $G$ с абелевыми факторами.*

Действительно, по определению подгруппы $R(G)$ фактор-группа $G/R(G)$ не имеет нетривиальных абелевых нормальных подгрупп. Значит, так как фактор-группа $G/R(G)$ разложима в произведение полной абелевой подгруппы $AR(G)/R(G)$ и $FC$-подгруппы $XR(G)/R(G)$, то ввиду первого случая второго утверждения теоремы 1 центр подгруппы $XR(G)/R(G)$ группы $G/R(G)$ должен быть тривиальным. Значит, тривиальна и подгруппа $\zeta(X)R(G)/R(G)$, а это означает, что $\zeta(X) \leqslant R(G)$.

Теорема 2. *Пусть $G = AX$ — группа, разложимая в произведение абелевой подгруппы $A$ и нильпотентной ступени $\alpha$ $FC$-подгруппы $X$. 1. Если $\alpha = 2$, то $G^{(6)} \leqslant FC(G)$. 2. Если группа $G$ не имеет собственных подгрупп конечного индекса, то группа $G$ разрешима ступени не выше $5\alpha - 3$.*

Доказательство. Положим $M = \zeta(X)[A, \zeta(X)]$. Подгруппа $M$ нормальна в группе $G$, и если $\alpha = 2$, то фактор-группа $XM/M$ абелева. Значит, фактор-группа $G/M$ разлагается в произведение двух абелевых подгрупп — образов подгрупп $A$, $X$ в $G/M$, и тогда по теореме Ито [2] фактор-группа $G/M$ двуступенно разрешима. Далее фактор-группа $M/[A, \zeta(X)]$, очевидно, абелева и в силу следствия леммы 2 третий коммутант подгруппы $[A, \zeta(X)]$ содержится в $FC$-центре $FC(G)$ группы $G$. Отсюда вытекает требуемое соотношение $G^{(6)} \leqslant FC(G)$.

Доказательство второго утверждения теоремы проводится индукцией по $\alpha$. При $\alpha = 1$ (т. е. в случае абелевой подгруппы $X$) по теореме Ито группа $G$ двуступенно разрешима и, значит, оценка $5\alpha - 3$ верна. Предположим, что утверждение верно, если ступень нильпотентности подгруппы $X$ не превышает $\alpha - 1$. Рассмотрим, как и выше, подгруппу $M = \zeta(X)[A, \zeta(X)]$. По следствию леммы 2 $[A, \zeta(X)]^{(3)} \leqslant FC(G)$, и поэтому $M^{(4)} \leqslant FC(G)$. Так как группа $G$ не имеет собственных подгрупп конечного индекса, то $FC$-центр $FC(G)$ группы $G$ содержится в ее центре $\zeta(G)$. Следовательно, $M^{(4)} \leqslant FC(G) \leqslant \zeta(G)$ и тем самым подгруппа $M$ разрешима ступени не выше 5. Фактор-группа $G/M$, как и группа $G$, не имеет собственных подгрупп конечного индекса и разложима в произведение абелевой подгруппы $AM/M$ и нильпотентной $FC$-подгруппы $XM/X$. Ввиду изоморфизма $XM/M \simeq X/X \cap M$ и соотношения $\zeta(X) \leqslant M$ ступень нильпотентности подгруппы $XM/M$ группы $G/M$ не превышает $\alpha - 1$. Тогда по предположению индукции группа $G/M$ разрешима ступени не выше $5(\alpha - 1) - 3$, а так как ступень разрешимости $M$ не выше 5, то ступень разрешимости группы $G$ не выше $5(\alpha - 1) - 3 + 5 = 5\alpha - 3$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $G = AX$ — группа, разложимая в произведение абелевой подгруппы $A$ и нильпотентной ступени 2 $FC$-подгруппы $X$. Если группа $G$ не имеет нетривиальных конечных нормальных подгрупп, то группа $G$ разрешима ступени не выше 7.*

Действительно, по теореме 2 $G^{(6)} \leqslant FC(G)$, и поэтому достаточно заметить, что $FC$-центр $FC(G)$ группы $G$ абелев. Так как группа $G$ не имеет нетривиальных конечных нормальных подгрупп, то $FC(G)$ — подгруппа без кручения, и тогда, как известно, подгруппа $FC(G)$ должна быть абелевой.

1. *Зайцев Д. И.* Теорема Ито и произведения групп // Мат. заметки. — 1983.— 33, № 6.— С. 807—818.
2. *Ito N.* Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen // Math. Z.— 1955.— 62, N 3.— S. 400—401.

3. *Зайцев Д. И.* Признаки непростоты произведений групп // XVI Всесоюз. алгебр. конф. (Ленинград, 22—25 сент. 1981 г.) : Тез. докл. — Л. : Ленингр. отд-ние Мат. ин-та АН СССР, 1981.— Ч. 1.— С. 52—53.
4. *Зайцев Д. И.* О ступени разрешимости произведения абелевой и нильпотентной групп // XVII Всесоюз. алгебр. конф. (Минск, 14—17 сент. 1983 гг.): Тез. докл.— Минск : Ин-т математики АН БССР, 1983.— Ч. 1.— С. 75.
5. *Amberg B.* Artinian and Noetherian factorized groups // Rend. Semin. mat. Univ. Padova.— 1976.— 55.— P. 105—122.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 18.06.85

УДК 517.5

*Н. В. Зорий*

# Экстремальная задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов

В работе даны необходимые и достаточные условия разрешимости экстремальной задачи о минимуме ньютоновой энергии в одном классе зарядов, ассоциированных с пространственным конденсатором (теоремы 1 и 2). Исследовано соотношение между этой минимальной величиной и гриновой емкостью одной из пластин конденсатора относительно дополнения к другой (теорема 2). Описаны свойства носителей и потенциалов минимизирующих зарядов (теорема 3). Указаны достаточно общие условия, наложенные на последовательность конденсаторов, при которых их минимизирующие заряды сходятся по норме к равновесной мере компакта (теорема 4). В качестве вспомогательных утверждений получен результат о полноте специальных пространств зарядов (теорема А) и установлено характеристическое свойство множеств, разреженных на бесконечности, в терминах теории выметания зарядов (теорема В).

**1.** Постановка задачи. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 3$, будем рассматривать борелевские заряды [1] $\nu$, их носители $S(\nu)$, ньютоновы энергии $\mathscr{I}(\nu) = \iint\limits_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p} |x-y|^{2-p} d\nu(x)\, d\nu(y)$ и потенциалы $U^{\nu}(x) := = \int\limits_{\mathbb{R}^p} |x-y|^{2-p} d\nu(y)$. Следуя [1], величину $\nu(\mathbb{R}^p)$ обозначим $\nu(1)$.

Пару $E = (E^+, E^-)$ непустых замкнутых множеств $E^+, E^- \subset \mathbb{R}^p$, одно из которых ограничено, назовем конденсатором. Для $E$ введем классы зарядов $\mathfrak{N}(E) = \{\nu = \nu^+ - \nu^- : S(\nu^+) \subset E^+,\ S(\nu^-) \subset E^-,\ (\nu^+ + \nu^-)(1) < < +\infty\}$ и $\mathfrak{N}^1(E) = \{\nu \in \mathfrak{N}(E) : \nu^+(1) = \nu^-(1) = 1\}$. Обозначим $V(E) = \inf\limits_{\nu\in\mathfrak{N}^1(E)} \mathscr{I}(\nu)$ и рассмотрим экстремальную $\mathfrak{N}^1$-задачу о существовании и единственности заряда $\lambda = \lambda_E$, удовлетворяющего условию

$$\mathscr{I}(\lambda) = V(E). \tag{1}$$

Чтобы $\mathfrak{N}^1$-задача была содержательна, всюду далее для $E$ будем полагать $V(E) < +\infty$, или, что равносильно, ньютонову емкость каждой из пластин $E^+$, $E^-$ будем считать ненулевой.

Для $E$ с ограниченной границей $\partial(E^+ \cup E^-)$ $\mathfrak{N}^1$-задача решена в [2]. В общем случае при ее решении возникают трудности, обусловленные отсутствием слабой компактности $\mathfrak{N}^1(E)$.

Для плоских конденсаторов и логарифмического ядра аналогичная вариационная задача рассматривалась в [3, 4]. Наши результаты и методы исследований для пространственных конденсаторов существенно отличаются от результатов и методов исследований на плоскости, что обусловлено неинвариантностью величины $V(E)$ относительно мебиусовых преобразований $\mathbb{R}^p$.