УДК 517:43

Ф. С. Вахер

О линейной конечномерной регуляризуемости оператора аналитического продолжения

Вопрос о регуляризации оператора аналитического продолжения рассматривался в работах [1, 2]. В [1] доказана регуляризуемость (но не линейная конечномерная) оператора аналитического продолжения с кривой, расположенной внутри односвязной области, на всю область; в [2] — конечномерная регуляризуемость этого оператора с компактного подмножества границы положительной линейной меры.

Настоящая заметка дополняет соответствующий результат работы [2]. Рассмотренный в [2] метод удалось применить к решению общей задачи — доказать конечномерную регуляризуемость оператора аналитического продолжения с любого определяющего подмножества замыкания односвязной области, т. е. когда задача регуляризации имеет смысл.

Пусть G — односвязная область в C, ограниченная кусочно-гладкой кривой; Γ — подмножество замыкания G: $A(G)$ — банахово пространство функций, аналитичных внутри G и непрерывных вплоть до ее границы, с нормой $\|x\| = \sup_{z \in G} |x(z)|$, R — оператор ограничения (сужения) функций из $A(G)$ на Γ.

Определение 1. *Однозначную линейную ветвь отображения R^{-1} назовем оператором аналитического продолжения с подмножества* Γ *и обозначим* T.

Банахово пространство функций, аналитичных внутри G и ограниченных в G, с нормой $\|x\| = \operatorname{ess}\sup\limits_{t\in\partial G} |x(t)|$, где $x(t)$ — граничные значения функции $x(z)$, обозначим $H^\infty(G)$.

Определение 2. *Множество* Γ *назовем определяющим в* G, *если* (а) $\mu(\Gamma \cap \partial G) > 0$, *где* μ — *лебегова мера на* ∂G, *либо* (б) *для любой функции* $x(z)$ *из* $H^\infty(G)$ *равенство* $x(z) = 0$ *на* Γ *влечет* $x(z) = 0$ *на* G.

На множестве ограничений функций из $A(G)$ на Γ вводится норма $\|x\| = \sup\limits_{z\in\Gamma} |x(z)|$. Образ пространства $A(G)$ при отображении $R: A(G) \to C(\Gamma)$ обозначим через E.

Если Γ определяющее в G, то, очевидно, отображение R^{-1} однозначно, т. е. оператор аналитического продолжения T существует, причем, как легко проверить, область его определения E незамкнута в $C(\Gamma)$ и T неограничен. В связи с этим возникает вопрос о возможности регуляризации оператора T и допустимых свойствах регуляризующего семейства. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Оператор аналитического продолжения с любого определяющего подмножества* Γ *односвязной области* G *допускает линейную конечномерную регуляризацию.*

Приведем некоторые замечания.

1. Достаточно провести доказательство в предположении, что область G — единичный круг с центром в точке $z = 0$.

2. Предлагаемый здесь метод доказательства существенно использует результаты статьи [3]. Для того чтобы этот результат сформулировать, необходимо определить понятие квазибазисности, введенное его авторами. Пусть X — банахово пространство, X^* — сопряженное к X.

Определение 3. *Подпространство* $D \subset X^*$ *называют квазибазисным, если существует равномерно ограниченное семейство непрерывных конечномерных операторов* $\{A_\alpha\}_\alpha$ *такое, что:* 1) *для любого конечномерного подпространства* $K \subset X$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдется оператор* A_α *такой, что* $\|A_\alpha x - x\| < \varepsilon \|x\|$ $\forall x \in K$; 2) $\forall A_\alpha: A_\alpha^*(X^*) \subset D$.

Пусть Z — линейное нормированное пространство, $A: X \to Z$ — взаимно-однозначный линейный оператор.

Теорема (Винокуров, Пличко [3]). Для того чтобы оператор A^{-1} допускал конечномерную регуляризацию, необходимо и достаточно, чтобы подпространство $A^*(Z^*) \subset X^*$ было квазибазисным.

3. Если Γ — определяющее в G подмножество со связным дополнением, не имеющее внутренних точек, например $\Gamma \subset \partial G$, то, как известно, $E = R(A(G))$ плотно в $C(\Gamma)$. Заметим, что если Γ со связным дополнением имеет внутренние точки, то $R(A(G))$ плотно в $A(\operatorname{int}\Gamma)$ — собственном замкнутом подпространстве $C(\Gamma)$.

Доказательство теоремы. На основании результата [3] для доказательства теоремы достаточно проверить квазибазисность подпространства $R^*(E^*) \subset A^*(D)$. При этом необходимо учесть следующее: пространство, сопряженное к $A(G)$, допускает разложение

$$A^*(G) = L^1/H_0^1 \oplus l, \tag{1}$$

где L^1 и l — пространства мер соответственно абсолютно непрерывных и сингулярных относительно лебеговой меры на окружности ∂G, H_0^1 — подпространство L^1, состоящее из мер, интегралы Пуассона которых аналитичны в G и обращаются в нуль в точке $z = 0$; причем компонента этого разложения L^1/H_0^1 квазибазисна, так как в ней содержится строка функционалов, сопряженная последовательности $\{z^n\}_{n=0}^\infty$ (операторный базис в $A(G)$). Отсюда вытекает (см. [3]), что любое подпространство пространства L^1/H_0^1, плотное в нем, квазибазисно.

Докажем плотность подпространства $R^*(E^*) \subset A^*(G)$ в компоненте L^1/H_0^1.

В определяющем множестве Γ выделяем подмножество Γ', имеющее связное дополнение и не имеющее внутренних точек. Если: а) $\mu(\Gamma \cap \cap \partial G) > 0$, полагаем $\Gamma' = \Gamma \cap \partial G$, если же б) $\mu(\Gamma \cap \partial G) = 0$, то найдется определяющая последовательность $\{a_n\} \subset \Gamma \cap \operatorname{int} G$, сходящаяся в замыкании G, и принимаем $\Gamma' = \{a_n\}$.

Пространство $C^*(\Gamma')$ рассматриваем как подпространство $C^*(\Gamma)$, состоящее из мер, сосредоточенных на подмножестве $\Gamma' \subset \Gamma$. Отметим при этом (см. замечание 3), что для любого функционала $f \in C^*(\Gamma') \subset C^*(\Gamma)$: $: \|f\| = \sup\limits_{0 \neq x \in E} \frac{|(f, x)|}{\|x\|}$. Отсюда образ подпространства $C^*(\Gamma')$ при отображении $I^*: C^*(\Gamma) \to E^*$, где I^* — сопряженное к отображению вложения $I: E \to C(\Gamma)$, изометричен $C^*(\Gamma')$. Проверим теперь, что R^* — образ выделенного подпространства $I^*(C^*(\Gamma')) \subset E^*$ — плотен в L^1/H_0^1. При этой проверке проявляются некоторые различия вариантов а) и б). Рассмотрим их отдельно.

а) $\Gamma' = \Gamma \cap \partial G$. Для пространства $C^*(\Gamma')$ запишем разложение: $C^*(\Gamma') = L_{\Gamma'}^1 \oplus l_{\Gamma'}$, соответственно* $I^*(C^*(\Gamma')) = I^*(L_{\Gamma'}^1) \oplus I^*(l_{\Gamma'})$. Проследим за R^* — образом слагаемого $L_{\Gamma'}^1$. Сначала воспользуемся существованием естественной изометрии пространства $L_{\Gamma'}^1$ с подпространством пространства L^1, состоящим из абсолютно непрерывных мер, сосредоточенных на подмножестве $\Gamma' \subset \partial G$, и отождествим $L_{\Gamma'}^1$ с этим подпространством.

При таком отождествлении оператор $R^*|_{L_{\Gamma'}^1}$ совпадает с ограничением на $L_{\Gamma'}^1$ канонического отображения $\eta: L^1 \to L^1/H_0^1$. Кроме того, аннулятор H_0^1 не содержит мер из подпространства $L_{\Gamma'}^1 \subset L^1$, а канонические отображения I^* и η не меняют двойственных соотношений на $A(G)$, следовательно, оператор $R^*|_{L_{\Gamma'}^1}: L_{\Gamma'}^1 \to L^1/H_0^1$ инъективен и для каждого функционала $f \in R^*(L_{\Gamma'}) \subset L^1/H_0^1$ найдется единственная мера m, сосредоточенная на Γ', такая, что $\forall x \in A(G): (f, x) = \int\limits_{\partial G} x(t)\, dm$.

Предположим теперь, что нашелся функционал $F^0 \in (L^1/H_0^1)^*$ такой, что

$$(F^0, f) = 0 \text{ для любого } f \in R^*(L_{\Gamma'}^1). \tag{2}$$

Принимая во внимание, что для пространства $(L^1/H_0^1)^*$ существует изоморфное функциональное представление **

$$\gamma: (L^1/H_0^1)^* \to H^\infty, \tag{3}$$

соотношение (2) можем переформулировать так: существует функция $h^0(z)$ из H^∞ такая, что для любой меры m, абсолютно непрерывной относительно меры μ, сосредоточенной на подмножестве $\Gamma' \subset \partial\Gamma$, выполняется $\int\limits_{\partial G} h^0(t)\, dm = 0$, где $h^0(t)$ — граничные значения функции $h^0(z)$. Тогда (см., например, [5]) $h^0(z) = 0$, отсюда $F^0 = 0$. Плотность подпространства $R^*(L^1(\Gamma'))$ в компоненте L^1/H_0^1 доказана.

б) $\Gamma' = \{a_n\}_{n=1}^\infty \subset G$; $C^*(\Gamma')$, а следовательно, и $I^*(C^*(\Gamma'))$ — пространства мер, сосредоточенных на дискретном в G подмножестве Γ'. Покажем сначала, что $R^*(I^*(C^*(\Gamma')))$ содержится в слагаемом L^1/H_0^1 разложения (1). Воспользуемся для этого изоморфным функциональным представлением пространства L^1/H_0^1 [4]:

$$\delta: L^1/H_0^1 \to \widetilde{H}_A^1,$$

---

* Слагаемое $I^*(L_{\Gamma'}^1)$ отождествлено с его изометрическим образом $L_{\Gamma'}^1$.

** $H^\infty(G)$, когда G — единичный круг, обозначают H^∞.

где $\tilde{H}_A^1$ — пространство функций, аналитичных вне круга G, граничные значения которых A-интегрируемы на ∂G.

R^* — Образ функционала, соответствующего единичной мере, сосредоточенной в точке a_n, обозначим f_{a_n}. Действие функционала f_{a_n} на функции из $A(G)$таково:

$$(f_{a_n}, x) = \varkappa(a_n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{x(t)\,dt}{t-a_n},$$

т. е. f_{a_n} — прообраз функции $\frac{1}{2\pi i}(z-a_n)^{-1}\in\tilde{H}_A^1$ и, следовательно, $R^*(I^*(C^*(\Gamma')))\subset L^1/H_0^1$. Плотность подпространства $R^*(I^*(C^*(\Gamma')))$ в компоненте L^1/H_0^1 есть следствие представления (1) для $(L^1/H_0^1)^*$ и того, что Γ' — определяющее множество.

1. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Регуляризуемость по Тихонову некоторых классов некорректных задач // Мат. сборник.— Киев : Наук. думка, 1976.— С. 221—224.
2. *Вахер Ф. С., Пличко А. Н.* Свойство ограниченной аппроксимации и линейная конечномерная регуляризуемость // Укр. мат. журн.— 1981.— 33, № 2.— С. 167—171.
3. *Винокуров В. А., Пличко А. Н.* О регуляризуемости обратных задач линейными методами // Докл. АН СССР.— 1978.— **241**, № 2.— С. 280—286.
4. *Вахер Ф. С.* Общий вид линейного функционала на банаховом пространстве аналитических функций и A-интеграл // Там же.— 1966.— **166**, № 3.— С. 518—521.
5. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций.— М. : Изд-во иностр. лит., 1963.— 311 с.

Ростов, ун-т

Получено 22.12.84,
после доработки — 14.10.85