УДК 517.5

В. Т. Гаврилюк

О характеристике класса насыщения $C_0^{\psi}L_\infty$

Пусть C — пространство непрерывных 2π-периодических функций, L_p — пространство периодических функций, для которых $\|f\| = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty$, $1 \leqslant p < \infty$, и $\operatorname{ess\,sup} |f(\cdot)| < \infty$, $p = \infty$; $S[f] = a_0/2 + \sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k(f)\cos kx +$

$+b_k(f)\sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x)$ — ряд Фурье функции $f \in L$. Пусть, далее, $\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — произвольная функция натурального аргумента и β — фиксированное действительное число. Если $f \in L$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} (a_k(f)\cos(kx + \beta\pi/2) + b_k(f)\sin(kx + \beta\pi/2)) \tag{1}$$

является рядом Фурье некоторой периодической функции из L, то, следуя А. И. Степанцу [1, 2], обозначим эту функцию через $f_\beta^\psi(x)$ и назовем (ψ, β)-производной функции f, а множество функций, удовлетворяющих таким условиям, — через L_β^ψ. Через C_β^ψ обозначим подмножество L_β^ψ непрерывных функций. В случае $f \in C$ и $f_\beta^\psi \in L_\infty$ такой класс будем обозначать через $C_\beta^\psi L_\infty$, а если еще $\| f_\beta^\psi \|_{L_\infty} \leqslant 1$, — через $C_{\beta,\infty}^\psi$. При $\beta = 0$ класс функций $C_0^\psi L_\infty$ играет существенную роль в теории насыщения линейных методов суммирования рядов Фурье (см., например, [3]). В дальнейшем $\psi(x)$, $x \geqslant 1$, — выпуклая вниз непрерывная функция, принимающая значения $\psi(k)$ в точках $x = k$, $k = 1, 2, \ldots,$ $\psi(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

В работе [4] используется функция $\mu(x) = \dfrac{x}{\eta(x) - x}$, $\eta(x) = \psi^{-1}(1/2\psi(x))$ ($\psi^{-1}(\cdot)$ — обратная функция функции $\psi(\cdot)$) и через $\mathfrak{M}_G$ обозначено множество выпуклых вниз непрерывных функций $\psi(x)$, для которых $\mu(x)$ ограничена сверху и снизу: $K_1 \leqslant \mu(x) \leqslant K_2$, $K_1, K_2 = \mathrm{const}$.

В работе [5] доказано, что наилучшее приближение функций класса $C_\beta^\psi L_\infty$ в случае $\psi(x) \in \mathfrak{M}_C$ (и при других условиях, наложенных на $\psi(x)$) тригонометрическими полиномами порядка $n - 1$ имеет порядок $\psi(n)$, и построен линейный метод приближения, доставляющий такое приближение на классе $C_{\beta,\infty}^\psi$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если выпуклая вниз функция* $\psi(x)$, $x \geqslant 1$, *дважды непрерывно дифференцируема и* $\psi \in \mathfrak{M}_C$, *то для того чтобы* $f \in C_0^\psi L_\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы при каждом* n, $n = 1, 2, \ldots,$ *существовал тригонометрический полином* $T_n^*(f, x)$ *порядка* $n - 1$, *обладающий свойствами*

$$\| f - T_n^*(f) \|_C \leqslant A_1 \psi(n), \quad \| T_{n0}^\psi(f) \|_C \leqslant A_2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Кроме того, для произвольного тригонометрического полинома $T_n(x)$ *справедливо неравенство*

$$\| T_{n0}^\psi \|_C \leqslant \frac{A_3}{\psi(n)} \| T_n \|_C; \tag{3}$$

A_1, A_2, A_3 — *постоянные, не зависящие от* n.

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть

$$\Lambda^* = \{\lambda_k^{(n)}\} = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 1 - \psi(n)/\psi(k), & k = 1, 2, \ldots, \quad n - 1; \\ 0, & k \geqslant n. \end{cases} \tag{4}$$

Треугольная матрица чисел, определяющая линейный метод приближения $U(\Lambda^*)$, для которого

$$U_n(f, \Lambda^*) = U_n(f, x; \Lambda^*) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} A_k(f, x), \tag{5}$$

и

$$\{\lambda_n(x)\} = \begin{cases} \dfrac{1-\psi(n)}{\psi(1)}(3n^2x^2 - 2n^3x^3) + \dfrac{n^3\psi(n)\psi'(1)}{\psi^2(1)}(x(1-1/n)^2 + \\ + x^2(1-1/n)), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/n; \\ 1-\psi(n)/\psi(nx), \quad 1/n \leqslant x \leqslant 1; \\ \quad 0, \qquad\qquad x \geqslant 1 \end{cases} \tag{5}$$

— последовательность функций, заданных на $[0, 1]$, причем $\lambda_n(k/n) = \lambda_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $n = 1, 2, \ldots$, $\lambda_k^{(n)}$ — элемент матрицы (4).

В дальнейшем через A_i будем обозначать различные постоянные, не зависящие от n.

Лемма 1. *Если $\psi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то*

$$\|U_n(\Lambda^*)\|_C = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|1/2 + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\cos kx\right|dx = O(1). \tag{6}$$

Доказательство леммы 1. При каждом фиксированном n функция $\lambda_n(x)$, определяемая согласно (5), непрерывно дифференцируема. Если сходятся интегралы $\int\limits_0^1 x(1-x)\,|d\lambda_n'(x)|$ и $\int\limits_0^1 \dfrac{|\lambda_n(x)|}{1-x}dx$, то на основании теоремы 4 работы [6]

$$\|U_n(\Lambda^*)\|_C = O\left(\lambda_n(0) + \int_0^1 (x(1-x)\,|d\lambda_n(x)| + \int_0^1 \frac{|\lambda_n(x)|}{1-x}dx\right). \tag{7}$$

Оценим каждый из интегралов, входящих в (7). Имеем

$$\int_0^1 x(1-x)\,|d\lambda_n'(x)| = \left(\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^1\right)x(1-x)\,|d\lambda_n'(x)| = I_1 + I_2, \tag{8}$$

$$I_1 = \int_0^{1/n} x(1-x)|\,d\lambda_n'(x)| = \int_0^{1/n} x(1-x)\left|-\frac{\psi(n)}{\psi(1)}(6n^2 - 12n^3x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\psi(n)\psi'(1)}{\psi^2(1)}n^3(12x - 6/n)\right|dx = O(\psi(n)), \tag{9}$$

$$I_2 = \int_{1/n}^1 x(1-x)\,|d\lambda_n(x)| = n^2\psi(n)\int_{1/n}^1 x(1-x)\left|\frac{\psi''(nx)\psi(nx) - 2\psi'^2(nx)}{\psi^3(nx)}\right|dx \leqslant$$

$$\leqslant n^2\varphi(n)\int_{1/n}^1 x(1-x)\psi''(nx)/\psi^2(nx) + 2n^2\psi(n)\times$$

$$\times\int_{1/n}^1 \psi'^2(nx)/\psi^3(nx)\,dx = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}. \tag{10}$$

Поскольку $\psi'(x) < 0$, $\psi''(x) > 0$, то, интегрируя выражения для $I_2^{(1)}$ и $I_2^{(2)}$ по частям после замены переменных $nx = z$, получаем

$$I_2^{(1)} = \psi(n)\int_1^n z(1-z/n)\,d\psi'(z)/\psi^2(z) = -\psi'(1)(1-1/n)\psi(n)/\psi^2(1) -$$

$$-\psi(n)\left(\int_1^n (1-z/n)\psi'(z)/\psi^2(z)\,dz - \int_1^n \frac{z\psi'(z)}{n\psi^2(z)}dz - 2\int_1^n z(1-z/n)\psi'^2/\right.$$

$$/\psi^3(z)\,dz\Big) \leqslant O(\psi(n)) + \sum_{l=1}^{3} |i_l|, \tag{11}$$

где

$$|i_1| = \psi(n) \int_1^n (1 - z/n)\, d(1/\psi(z)) = O(1), \tag{12}$$

$$|i_2| = \frac{\psi(n)}{n} \int_1^n z d(1/\psi(z)) = O(1). \tag{13}$$

Для $\psi(x) \in \mathfrak{M}_C$ выполняются неравенства [4, с. 8]

$$C_1 x |\psi'(x)| \leqslant \psi(x) \leqslant C_2 x |\psi'(x)|, \quad x \geqslant 1, \quad C_1, C_2 = \mathrm{const}. \tag{14}$$

Используя (14), получаем

$$|i_3| = 2\psi(n) \int_1^n z(1 - z/n)\, \psi'^2(z)\, \psi^3(z)\, dz \leqslant -K\psi(n) \int_1^n (1 - z/n)\, \psi'(z)/$$

$$/\psi^2(z)\, dz = K|i_1| = O(1), \quad K = \mathrm{const}. \tag{15}$$

Таким образом, из соотношений (8) — (15) следует

$$\int_0^1 x(1 - x)\, |d\lambda_n(x)| = O(1).$$

Оценим второй интеграл из соотношения (7):

$$\int_0^1 \frac{|\lambda_n(x)|}{1 - x}\, dx = \left(\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^1\right) \frac{|\lambda_n(x)|}{1 - x}\, dx = \int_0^{1/n} \Bigg| \frac{1 - \psi(n)/\psi(1)\,(3n^2x^2 - 2n^3x^3)}{1 - x} +$$

$$+ \frac{n^3\psi(n)\,\psi'(1)\,(x(x - 1/n)^2 + x^2(1 - x))}{\psi^2(1)\,(1 - x)} \Bigg| dx + \int_{1/n}^1 \frac{1 - \psi(n)/\psi(nx)}{1 - x}\, dx =$$

$$= O(1/n) + \int_{1/n}^1 \frac{1 - \psi(n)/\psi(nx)}{1 - x}\, dx. \tag{16}$$

В случае $\psi \in \mathfrak{M}_C$ в работе [7, с. 15] показано, что

$$\int_{1/n}^1 \left(1 - \frac{\psi(n)}{\psi(nx)}\right)/(1 - x)\, dx = O(1). \tag{17}$$

Поскольку $\lambda_n(0) = 1$, из соотношений (7)—(17) следует справедливость утверждения леммы.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие определения.

Определение 1. *Последовательность* $\{\gamma_n(k)\}_1^\infty$ *называется квазивыпуклой равномерно относительно* n, *если* $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_n(k) \to 0$ *и выполняется соотношение*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)\, |\Delta^2\gamma_n(k)| = O(1), \quad \Delta^2\gamma_n(k) = \gamma_n(k) - 2\gamma_n(k + 1) + \gamma_n(k + 2). \tag{18}$$

Пусть $U(\Lambda)$ — линейный метод суммирования рядов Фурье, для которого $U_n(f, x, \Lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} A_k(f, x), \quad \lambda_0^{(n)} = 1, \quad f \in C.$

Определение 2 [3, с. 8—10]. *Если существует положительная монотонно стремящаяся к нулю при* $n \to \infty$ *функция* $\varphi(n)$ *и класс функций*

$\mathfrak{N}$ *такие, что*

$$\|f - U_n(f, \Lambda)\|_C = o(\varphi(n)) \Rightarrow f = \text{const}, \tag{19}$$

$$\|f - U_n(f, \Lambda)\|_C = O(\varphi(n)) \Rightarrow f \in \mathfrak{N}, \tag{20}$$

$$f \in \mathfrak{N} \Rightarrow \|f - U_n(f, \Lambda)\|_C = O(\varphi(n)), \tag{21}$$

то линейный метод суммирования рядов Фурье $U(\Lambda)$ *насыщен с порядком насыщения* $\varphi(n)$ *и классом насыщения* $\mathfrak{N}$.

Лемма 2. *Если* $\psi(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы, то метод* $U(\Lambda^*)$, *построенный с помощью матрицы* (4), *насыщен с порядком насыщения* $\psi(n)$. *Классом насыщения в пространстве* C *является класс* $C_0^{\psi} L_\infty$.

Доказательство леммы 2. Из результатов работ [8—10] (см. также [3], гл. V) следует, что если существует положительная монотонно стремящаяся к нулю при $n \to \infty$ функция $\varphi(n)$ такая, что для элементов $\{\lambda_k^{(n)}\}$ матрицы Λ выполняются соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \lambda_k^{(n)}}{\varphi(n)} = \frac{1}{\varphi(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 1 - \lambda_0^{(n)} = 0, \tag{22}$$

то метод $U(\Lambda)$ насыщен с порядком насыщения $\varphi(n)$.

Если, кроме того, последовательность

$$\{\gamma_n(k)\} = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \dfrac{(1 - \lambda_k^{(n)})\,\psi(k)}{\varphi(n)}, & k \neq 0 \end{cases} \tag{23}$$

является равномерно относительно n квазивыпуклой и $\|U_n(\Lambda)\|_C = O(1)$, то класс насыщения метода $U(\Lambda)$ в пространстве C совпадает с классом функций $C_0^{\psi} L_\infty$.

Таким образом, для доказательства леммы 2 необходимо с учетом леммы 1 для элементов матрицы Λ^* проверить выполнение соотношений (22) и квазивыпуклость последовательности $\{\gamma_n(k)\} = \{\gamma_n(k, \Lambda^*)\}$.

В случае метода $U(\Lambda^*)$ выполнение соотношений (22) очевидно при $\varphi(n) = \psi(n)$. Далее имеем

$$\frac{(1 - \lambda_k^{(n)})\,\psi(k)}{\psi(n)} = \begin{cases} 1, & k = 1, \ldots, n-1; \\ \psi(k)/\psi(n), & k \geqslant n. \end{cases} \tag{24}$$

Тогда

$$\{\gamma_n(k, \Lambda^*)\} = \{\gamma_n(k)\} = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \ldots, n-1; \\ \psi(n)/\psi(k), & k \geqslant n. \end{cases} \tag{25}$$

Проверим выполнение условия равномерной квазивыпуклости (18). Имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\,|\Delta^2 \gamma_n(k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,|\Delta^2 \gamma_n(k)| + \sum_{k=n}^{\infty} (k+1)\,\Delta^2 \gamma_n(k). \tag{26}$$

Учитывая (24) и то, что $\psi \in \mathfrak{M}_C (\Rightarrow x\,|\psi'(x)| < K\psi'(x)$ (см. (14)), получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,|\Delta^2 \gamma_n(k)| = n\,|\Delta^2 \gamma_n(n-1)| = n\,|1 - 2\psi(n)/\psi(n) +$$

$$+ \psi(n+1)/\psi(n)| = n(\psi(n) - \psi(n+1))/\psi(n) \leqslant K, \quad K = \text{const}. \tag{27}$$

Применяя преобразование Абеля к соотношению $\gamma_n(n) - \gamma_n(N) = \sum^{N} \Delta\gamma_n(k)$, $\Delta\gamma_n(k) = \gamma_n(k) - \gamma_n(k+1) = \dfrac{1}{\psi(n)}(\psi(k) - \psi(k+1))$, $N >$

$> n,\ N, n \in \mathbf{N}$, и устремляя N к ∞, находим

$$\sum_{k=n}^{\infty} (k+1)\,\Delta^2\gamma_n(k) = 1 + n\,(\psi(n) - \psi(n+1))/\psi(n) = O(1). \tag{28}$$

Из соотношений (26) — (28) следует, что метод $U(\Lambda^*)$ насыщен с порядком насыщения $\psi(n)$ и классом насыщения $C_0^{\psi}L_\infty$ в пространстве C, т. е. для каждой функции $f \in C_0^{\psi}L_\infty$

$$\| f - U_n(f, \Lambda^*) \|_C \leqslant A_f \psi(n), \tag{29}$$

где постоянная A_f не зависит от n.

Заметим, что метод $U(\Lambda^*)$ является насыщенным с порядком насыщения $\psi(n)$ и в пространстве L_p, $1 \leqslant p < \infty$.

Доказательство теоремы. Пусть $T_n^* = T_n^*(f, x) = \alpha_0^* + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k^* \times \cos kx + \beta_k^* \sin kx)$ — полином наилучшего приближения функции $f \in C_0^{\psi}L_\infty$. Согласно результатам работы [4]

$$\| f - T_n^*(f) \|_C \leqslant A_f \psi(n). \tag{30}$$

В силу вида матрицы Λ^* (см. (4)) получаем

$$T_{n0}^{*\psi}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\psi(k)} (\alpha_k^* \cos kx + \beta_k^* \sin kx) = \frac{1}{\psi(n)} (T_n^*(x) - U_n(T_n^*, x, \Lambda^*)). \tag{31}$$

Учитывая теперь (29) — (31), имеем

$$\| T_{n0}^{*\psi} \|_C = \frac{1}{\psi(n)} \| (T_n^* - f) + (f - U_n(f, \Lambda^*)) + U_n(f, \Lambda^*) - U_n(T_n^*, \Lambda^*) \|_C \leqslant A_2. \tag{32}$$

Заметим, что если $\psi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то тригонометрический полином, доставляющий приближение функции $f \in C_0^{\psi} L_\infty$ порядка $\psi(n)$, имеет ограниченную $(\psi, 0)$-производную.

Пусть теперь $f \in C$ и существует полином $T_n^*(f, x)$, для которого выполняются условия (2). Тогда, учитывая лемму 1, получаем

$$\| U_n(f, \Lambda^*) - f \|_C \leqslant \| U_n(f, \Lambda^*) - U_n(T_n^*, \Lambda^*) \|_C + \| U_n(T_n^*, \Lambda^*) - T_n^* \|_C +$$
$$+ \| T_n^* - f \|_C \leqslant \| U_n(\Lambda^*) \|_C \| f - T_n^* \| + \psi(n) \| T_{n0}^{\psi} \|_C + A_2 \psi(n) \leqslant A_f \psi(n). \tag{33}$$

Следовательно, согласно лемме 2 $f \in C_0^{\psi}L_\infty$.

В случае произвольного тригонометрического полинома $T_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ имеем

$$T_{n0}^{\psi}(x) = \frac{1}{\psi(n)} (T_n(x) - U_n(T_n, x, \Lambda^*)), \quad \| T_{n0}^{\psi} \|_C \leqslant \frac{1}{\psi(n)} (\| T_n \|_C +$$
$$+ \| U_n(\Lambda^*) \|_C \| T_n \|_C) \leqslant \frac{A_3}{\psi(n)} \| T_n \|_C. \tag{34}$$

Теорема доказана.

Идея описания функциональных классов с помощью приближающих полиномов, обладающих такими же дифференциально-разностными свойствами, как и приближающая функция, содержится в работе [11].

В случае $\psi(x) = x^{-r}$, $r > 0$, описание классов функций с помощью приближающих их полиномов (и обзор результатов) см. в [12].

Если $\Delta^2 (1/\psi(k)) \gtrless 0$, $k = 1, 2, \ldots$, то оценка (34) известна [13].

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.— Киев, 1983.— 57 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 83.10).
2. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье // Докл. АН СССР.— 1984.— 277, № 5.— С. 1074—1077.
3. *Butzer P., Nessel R.* Fourier analysis and approximation.— Basel; Stuttgart : Birkhäser Verlag, 1971.— V. 1.— 554 p.
4. *Степанец А. И.* Приближение суммами Фурье функций с медленно убывающими коэффициентами Фурье // Приближение периодических функций суммами Фурье.— Киев, 1984, с. 3—25. (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 84.43).
5. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций.— Киев, 1984.— 44 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 84.15).
6. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближение дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1961.— 62.— С. 61—97.
7. *Бушев Д. Н.* Приближение классов непрерывных периодических функций средними Зигмунда.— Киев, 1984.— 63 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 84.56).
8. *Favard J.* Sur la saturation des procédés de sommation // J. Math. Pur. Appl.— 1957.— 36, N 4.— P. 359—378.
9. *Харшиладзе Ф. И.* Классы насыщения для некоторых процессов суммирования // Докл. АН СССР.— 1958.— 122, № 3.— С. 352—355.
10. *Sunouchi G.* Characterization of certain classes of functions // Tohoku Math. J.— 1962.— 14, N 1.— P. 127—134.
11. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1951.— 15, № 3.— С. 219—242.
12. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 512 с.
13. *Стечкин С. Б.* К проблеме множителей для тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР.— 1950.— 75, № 2.— С. 165—168.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 29.11.85