УДК 517.54

Г. К. Антонюк, А. Ю. Солынин

Множество Кебе класса $U(p)$

В настоящей работе найдено множество Кебе класса $U(p)$ [1, 3] мероморфных и однолистных в круге $K=\{|z|<1\}$ функций $w=f(z)$, удовлетворяющих условиям: $f(0)=f'(0)-1=0$, $f(p)=\infty$, $0<p<1$. (Множеством Кебе класса $U(p)$ называют наибольшее множество точек, принадлежащих всем образам $f(K)$ для $f(z)\in U(p)$.) При доказательстве используется общая теорема о коэффициентах [2].

Лемма 1. *Существует семейство функций $w=f_t(z)\in U(p)$, непрерывно зависящее от параметра $t\in[0,1]$; при этом функции $f_t(z)$ отображают K на области, допустимые относительно квадратичных дифференциалов*

$$Q_t(w)\,dw^2=-\frac{e^{i(\alpha(t)-\gamma(t))}}{w^2\,(w+e^{i\alpha(t)}b(t))}\,dw^2. \tag{1}$$

Здесь $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ и $b(t)$ — определенные в доказательстве непрерывные функции:

$$f_0(z)=f_1(z)=\frac{pz}{(1-pz)(p-z)}. \tag{2}$$

Доказательство. Используем метод теоремы 6.18 [2]. Функция

$$\xi(w_1)=\int\limits_b\frac{dw_1}{w_1(w_1-b)^{1/2}},\quad w_1=-w,\quad \alpha_1=\frac{p}{(1+p)^2}\leqslant b\leqslant\frac{p}{(1-p)^2}=\alpha_2$$

отображает w — плоскость с разрезами вдоль лучей $w\geqslant 0$ и $w\leqslant -b$ — на вертикальную полуполосу. Вблизи $w=0$ справедливо разложение $\xi(-w)=\frac{1}{ib^{1/2}}\log(-w)+\frac{1}{ib^{1/2}}\log\frac{1}{4b}+$ (степени w). Здесь рассматривается главная ветвь логарифма и $b^{1/2}>0$.

Многозначное продолжение функции $\xi_\gamma(-w)=e^{i\gamma/2}\Big(\cos\gamma/2\times$ $\times\,\xi\Big(-\frac{b}{\alpha_1}w\Big)-i\sin\gamma/2\,\xi\Big(-\frac{b}{\alpha_2}w\Big)\Big)=\frac{1}{ib^{1/2}}\log(-w)+\frac{1}{ib^{1/2}}\log\frac{1}{4b}+$ $+\frac{e^{i\gamma/2}}{ib^{1/2}}\Big(\cos\gamma/2\log\frac{b}{\alpha_1}-i\sin\gamma/2\log\frac{b}{\alpha_2}\Big)+$ (степени w) отображает область $D=f_0(K)$ на плоскость с прямолинейными разрезами, образующими угол $\gamma/2$ с положительным направлением действительной оси, причем один из разрезов проходит через точку $\xi_\gamma=0$. Приведенное разложение функции справедливо вблизи точки $w=0$.

Суперпозиция $u_\alpha(w,\gamma,b)=-e^{i\alpha}\xi^{-1}(\xi_\gamma(-w))$, где ξ^{-1}—функция, обратная к $\xi(w_1)$, отображает D на область, допустимую относительно квадратичного дифференциала

$$Q_\alpha(u,\gamma,b)\,du^2=-\frac{e^{i(\alpha-\gamma)}}{u^2\,(u+e^{i\alpha}b)}\,du^2.$$

Считая α фиксированным, найдем γ и b, при которых $w_\alpha = u_\alpha(f_0(z)), \gamma, b) \in$ $\in U(p)$. Для этого необходимо и достаточно выполнение равенства $u'_\alpha(0, \gamma, b) = 1$. Отсюда, используя разложение функций $\xi(-w)$ и $\xi_\gamma(-w)$, получаем

$$b = \frac{p}{1-p^2}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^{\cos\gamma}, \quad \sin\gamma = \frac{2\pi k - \alpha}{\log\frac{1+p}{1-p}}, \tag{3}$$

где $k = 0; \pm 1, \ldots$.

Очевидно, что решения полученной системы непрерывно изменяются при непрерывном изменении величины $2\pi k - \alpha$ в пределах от $-\log\frac{1+p}{1-p}$ до $\log\frac{1+p}{1-p}$. Каждой паре k и α соответствует пара решений $\gamma_j(k, \alpha)$, $b_j(k, \alpha)$, $j = 1, 2$. При этом считаем, что $\cos\gamma_1 \geqslant 0$. Обозначим через $w_j(z, \alpha, k)$ функцию из $U(p)$, отображающую K на область, допустимую относительно квадратичного дифференциала

$$Q_j(w, \alpha, k)\, dw^2 = -\frac{e^{i(\alpha-\gamma_j(k,\alpha))}}{w^2(w + e^{i\alpha}b_j(k, \alpha))}\, dw^2.$$

Семейство функций $w_i(z, \alpha, k)$ легко параметризовать, как это требуется в лемме. Лемма доказана.

Отметим, что решения системы (3) существуют лишь при выполнении условий:

1) $-k_0 \leqslant k \leqslant k_0$, где $k_0 = \left[\frac{1}{2\pi}\left(\pi + \log\frac{1+p}{1-p}\right)\right]$ — целая часть числа;

2) $-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$ при $-k_0 < k < k_0$; $-\pi \leqslant \alpha \leqslant 2\pi\left\{\frac{1}{2\pi}\left(\pi + \log\frac{1+p}{1-p}\right)\right\} - \pi$ при $k = -k_0 \neq 0$: $-2\pi\left\{\frac{1}{2\pi}\left(\pi + \log\frac{1+p}{1-p}\right)\right\} + \pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$ при $k = k_0 \neq 0$; $-\log\frac{1+p}{1-p} \leqslant \alpha \leqslant \log\frac{1+p}{1-p}$ при $k_0 = 0$.

Здесь через $\{a\}$ обозначена дробная часть числа a. Очевидно, что $k_0 = 0$ только при $p < p_0$, $p_0 = \operatorname{th}\pi/2$. Обозначим через $U_\alpha^k(p)$, $-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$, $k = 0; \pm 1, \ldots$, подкласс функций из $U(p)$, удовлетворяющих условиям:

1) существует $\rho = \rho(f)$, $0 < \rho < \infty$, такое, что $-\rho e^{i\alpha} \notin f(K)$;

2) функция $\omega(w) = \frac{\alpha_1}{\rho e^{i\alpha}} f(f_0^{-1}(w))$ является допустимой, ассоциированной с областью D и обладает допустимой гомотопией $F(w, t)$ в тождественное отображение. Степень деформации $d(F, 0)$ в точке $w = 0$ равна $2\pi k - \alpha$.

Согласно лемме 6.1 [2] для любой функции $f(z) \in U(p)$ соответствующая допустимая гомотопия существует, поэтому если $-\rho(f)\, e^{i\alpha} \notin f(K)$, то существует k такое, что $f(z) \in U_\alpha^k(p)$. Покажем, что функция $w_j(z, \alpha, k) \in U_\alpha^k(p)$, $j = 1, 2$. Прежде всего заметим, что если $f(z) \in U(p)$, то при $r \to 0$, $0 < r < p$, $f(r) = r + o(r)$ и, значит, можно считать, что $\arg f(r) = o(r)$. Пусть при параметризации в лемме 1 и фиксированных значениях a, k, j имеем $w_j(z, \alpha, k) = f_{t_0}(z)$. Рассмотрим допустимую относительно области D гомотопию в тождественное отображение $\omega_\tau(w) = \frac{\alpha_1}{b(t)\, e^{i\alpha(t)}} \times f_t(f_0^{-1}(w))$, $\tau = 1 - tt_0^{-1}$, $t \in [0, 1]$. Чтобы определить степень деформации этой гомотопии в точке $w = 0$, найдем приращение $\arg\omega_\tau(f_0(r))$, где $0 < r < p$ — достаточно малое число, при изменении t от t_0 до 0. Учитывая непрерывность $\alpha(t)$, получаем, что указанное приращение аргумента равно $-\alpha(t) + o(r)$ или $2\pi k - \alpha + o(r)$. Переходя к пределу при $r \to 0$, находим $w_j(z, \alpha, k) \in U_\alpha^k(p)$.

Лемма 2. *Пусть* $f(z) \in U_\alpha^k(p)$, *причем* $|2\pi k - \alpha| < \log \frac{1+p}{1-p}$ *и* $f(z)$ *не принимает значения* $-\rho e^{i\alpha}$, *тогда*

$$b_1(k, \alpha) \leqslant \rho \leqslant b_2(k, \alpha). \tag{4}$$

Равенство слева возможно только для функции $w_1(z, \alpha, k)$, *справа—только для функции* $w_2(z, \alpha, k)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\omega_j(w) = \rho^{-1} b_j(k, \alpha) \times \times f(w_j^{-1}(w, \alpha, k))$, $j = 1, 2$, которая допустима относительно квадратичного дифференциала $Q_j(w, \alpha, k)\, dw^2$. Существование функции $w_j(z, \alpha, k)$ следует из того, что $|2\pi k - \alpha| \leqslant \log \frac{1+p}{1-p}$. Для $\omega_j(w)$ существует допустимая гомотопия в тождественное отображение, степень деформации которой в точке $w = 0$ равна 0. Это следует из того, что функции $f(z)$ и $w_j(z, \alpha, k)$ принадлежат подклассу $U_\alpha^k(p)$.

Применим общую теорему о коэффициентах к функции $\omega_j(w)$ и дифференциалу $Q_j(w, \alpha, k)\, dw^2$. Соответствующие коэффициенты разложения равны: $a^{(0)} = \rho b_j^{-1}(k, \alpha)$, $\alpha^{(0)} = -e^{-i\alpha_j(k,\alpha)} b_j^{-1}(k, \alpha)$, $j = 1, 2$. Получаем неравенство $\mathrm{Re}\,(-b_j^{-1}(k, \alpha)\, e^{-i\gamma_j(k,\alpha)} \ln \rho b_j^{-1}(k, \alpha)) \leqslant 0$, $j = 1, 2$, из которого с учетом условий достижения равенства в общей теореме о коэффициентах получаем утверждение леммы.

Лемма 3. *Если* k *и* α *такие, что* $|2\pi k - \alpha| > \log \frac{1+p}{1-p}$, *то* $U_\alpha^k(p) = \varnothing$.

Доказательство. Пусть существует функция $f(z) \in U_\alpha^k(p)$. Это означает, что $f(z)$ не принимает некоторого значения $-\rho e^{i\alpha}$ и для функции $\omega(w) = \alpha_1 \rho^{-1} e^{-i\alpha} f(f_0^{-1}(w))$ существует допустимая гомотопия в тождественное отображение $F(w, t)$, степень деформации которой в точке $w = 0$ равна $2\pi k - \alpha$. Пусть $p_1 > p$ такое, что $\log \frac{1+p_1}{1-p_1} = |2\pi k - \alpha|$. Рассмотрим функции $f_1(z) = p_1 p^{-1} f(p p_1^{-1} z)$ и $\tilde{f}_0(z) = p_1 p^{-1} f_0(p p_1^{-1} z)$, принадлежащие $U(p_1)$.

Функция $F_1(w, t) = p^{-1} p_1 F(p p_1^{-1} w, t)$ осуществляет допустимую гомотопию в тождественное отображение функции $\omega(w) = \alpha_1 \rho^{-1} e^{-i\alpha} f_1(\tilde{f}_0^{-1}(w))$, заданной в области $\tilde{f}_0(K)$. Приращение аргумента в точке $w = 0$, получаемое при гомотопии $F_1(w, t)$, такое же, как и при гомотопии $F(w, t)$.

Семейство функций $f_t(z) = t^{-1} p_1 f_{0,t}(t p_1^{-1} z) \in U(p)$, где $f_{0,t}(\xi) = \frac{t\xi}{(1 - t\xi)(t - \xi)}$, определит гомотопию $F_2(w, \tau) = \tilde{f}_{0,t}(f_{0,t}^{-1}(w))$, $\tilde{f}_{0,t}(\xi) = t p^{-1} f_0(t^{-1} p \xi)$ в тождественное отображение функции $\omega(w) = \tilde{f}_0(f_{0,p}^{-1}(w))$. Так как $\arg f_t(r) = 0$ при $r \in (0, p)$ и $t \in [p, p_1]$, то приращение аргумента в точке $w = 0$, получаемое при гомотопии $F_2(w, \tau)$, равно 0.

Рассматривая суперпозицию гомотопий F_1 и F_2, получаем, что $f_1(z) \in \in U_\alpha^k(p_1)$. Из построения функции $f_1(z)$ следует, что $f_1(K)$ имеет аналитическую границу, но согласно лемме 2 класс $U_\alpha^k(p_1)$ состоит из единственной функции, отображающей K на плоскость с разрезом по траектории квадратичного дифференциала. Из полученного противоречия и следует утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть* $b_1(k, \alpha) < \rho < b_2(k, \alpha)$, *тогда существует функция* $f(z, \rho) \in U_\alpha^k(p)$ *такая, что* $f(z, \rho) \neq -\rho e^{i\alpha}$ *для всех* $z \in K$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

Используя доказанные леммы, получаем следующую теорему.

Теорема. *Множеством Кебе класса* $U(p)$ *является:*

1) *область* $B(p)$ *при* $p < \operatorname{th} \pi/2$, *содержащая точки* 0 *и* ∞, *граница которой задается двумя уравнениями*

$$b_j(\varphi) = \frac{p}{1-p^2} \exp\left\{(-1)^{j+1} \sqrt{\log^2 \frac{1+p}{1-p} - (\pi - \varphi)^2}\right\},$$

$$\pi - \log \frac{1+p}{1-p} \leqslant \varphi \leqslant \pi + \log \frac{1+p}{1-p}, \quad j = 1, 2; \tag{5}$$

2) *открытое множество* $B(p)$ *при* $p \geqslant \operatorname{th} \pi/2$, *состоящее из двух компонент связности, одна из которых содержит точку* $w = 0$, *вторая — точку* $w = \infty$, *граница первой определяется уравнением* (5) *при* $j = 2$, *второй — тем же уравнением при* $j = 1$, *где* $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ *в обоих случаях. Экстремальными являются только функции* $f(z) = w_j(z, \varphi - \pi, 0)$, $j = 1, 2$.

Следствие 1 [4]. *Если* $f(z) \in U(p)$ *и* $w \in \partial f(K)$, *то* $p/(1+p)^2 \leqslant |w| \leqslant p/(1-p)^2$.

Следствие 2. *При* $p \geqslant \operatorname{th} \pi/2$ *все функции* $f(z) \in U(p)$ *покрывают отрезок* $0 \leqslant r < \frac{p}{1-p^2} \exp\left\{\sqrt{\log^2 \frac{1+p}{1-p} - \pi^2}\right\}$ *и не покрывают никакого другого отрезка, выходящего из точки* $w = 0$ *и имеющего не меньшую длину.*

При $p < \operatorname{th} \pi/2$ *все функции класса* $U(p)$ *покрывают луч* $[0, +\infty]$.

1. *Lewandowski Z., Zlotkiewicz E.* On the donvain variabilitu of the second coeffitient for a class of meromorphic, univalent functions // Bull. Acad. pol. Sci. Ser. sci. math., astron, et phys.— 1965.— **13**, N 1.— P. 21—25.
2. *Дженкинс Дж.* Однолистные функции и конформные отображения.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 265 с.
3. *Антонюк Г. К.* Об одном результате Левандовского и Злоткевича // Тр. Томск. ун-та. Вопросы геометрической теории функций.— 1969.— 210, вып. 6.— С. 3—5.
4. *Шлык В. А.* Некоторые оценки для мероморфных функций слабо однолистных в круге / Научн. тр. Кубан. ун-та. Математический анализ.— 1976.— Вып. 217.— С. 81—82.

Кубан. ун-т

Получено 27.11.84,
после доработки — 17.06.85