УДК 519.21

Р. Е. Майборода

Оценки производящей функции моментов для стационарных случайных процессов

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $T = \mathbb{Z}$ — множество целых чисел (случай I) или $T = (-\infty, +\infty)$ (случай II), $\xi(t)$, $t \in T$, — строго стационарный процесс (с.с.п.) со значениями в $\mathbb{R}^N$. Данная работа посвящена оцениванию производящей функции моментов случайного вектора $\xi(0) = \xi$, т. е. функции $f(z) = \mathbf{M} \exp \langle z, \xi \rangle$, $z \in \mathbb{C}^N$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение). В качестве оценки выбрана функция $f_{\mu,T} = T^{-1} \int\limits_0^T \exp \langle z, \xi(t) \rangle d\mu(t)$, где в случае I $\mu = \delta$ — считающая мера ($\delta(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = 0$, $\delta(\{n\}) = 1$, $n \in \mathbb{Z}$), а в случае II $\mu = m$ — мера Лебега. Другие меры не рассматриваются. Получены условия строгой состоятельности (теорема 1) и асимптотической нормальности (теоремы 2 и 3) оценок $f_{\mu,T}$, рассматриваемых как случайные элементы (с. э.) следующих топологических пространств: а) $H(D)$ — пространство голоморфных (аналитических) функций в открытой области $D \subseteq \mathbb{C}^N$ (см. [1, с. 29]) с топологией локально-равномерной сходимости, т. е. сходимости равномерно на любом компакте $K \subset D$; $H(D)$ является сепарабельным пространством Фреше; б) $C_p(S)$ — пространство функций $x(u)$, непрерывных в открытой выпуклой области $S \subseteq \mathbb{R}^N$ таких, что для любого $a \in \partial S$ и фиксированной непрерывной функции $p(u) > 0$ существуют и конечны пределы $\lim\limits_{u \to a} x(u) p(u)$; $C_p(S)$ с нормой $\|x\|_p = \sup\limits_{u \in S} |x(u) p(u)|$ является банаховым пространством (б. п.), изоморфным пространству $C(B)$, функций, непрерывных на единичном шаре B в $\mathbb{R}^N$.

Очевидно, что $f_{\delta,T}$ всегда является с. э. $H(D)$ и будет с. э. $C_p(S)$, если $p(u)$ убывает на бесконечности достаточно быстро. Для $f_{m,T}$, используя теорему Фубини, можно доказать, что если D — открытая область, $\operatorname{Re} D \subset \Pi_\xi = \{u \in \mathbb{R}^N : f(u) < \infty\}$*, то $f_{m,T} \in H(D)$ почти наверное (п. н.), а если $p(u) = \exp(-V(u))$, $\mathbf{M} \exp(V^*(\xi)) < \infty$, то $f_{m,T} \in C_p(S)$ п. н. ($V^*(l) = \sup\limits_{u \in S'} (\langle u, l\rangle - V(u))$ — преобразование Юнга — Фенхеля [2, с. 120], причем считаем $V(u) = \infty$ при $u \overline{\in} S$).

Будем говорить, что последовательность $\{\eta(t), t \in T\}$ — с. э. некоторого измеримого пространства — эргодическая, если для любого множества $A \in \bigcap\limits_{t_0 \geqslant 0} \sigma(\eta_t, t \geqslant t_0)$ $\mathbf{P}(A)$ равна либо 0, либо 1 ($\sigma(\eta(t), t \in Q)$ — σ-алгебра, порожденная с. э. $\eta(t)$ при $t \in Q$). Следующую лемму можно доказать методом, примененным при доказательстве теоремы 6.4.2 в [3, с. 177].

Лемма 1. *Пусть $\eta(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, — эргодическая, строго стационарная последовательность с. э. сепарабельного б. п. в нормой $\|\cdot\|$. Если $\mathbf{M}\|\eta(0)\| < \infty$, то $\left\| n^{-1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \eta(k) - \mathbf{M}\eta(0) \right\| \to 0$, $n \to \infty$ п. н.*

Теорема 1. *Пусть $\xi(t)$ — эргодический с. с. п.*

1. *Если $D \subseteq \mathbb{C}^N$ — открытая область, $\operatorname{Re} D \subseteq \Pi_\xi$, то $f_{\mu,T} \to f$ п. н. в $H(D)$.*

2. *Если $\mathbf{M} \exp(V^*(\xi)) < \infty$, то $f_{\mu,T} \to f$ п. н. в $C_p(S)$.*

Доказательство 1. Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что сходимость имеет место в $C(K)$, где $K \subset D$ — компакт вида $K = \{z \in \mathbb{C}^N : z_0 \leqslant z \leqslant z_1\}$, $z_0, z_1 \in D$, $z_0 < z_1$. Обозначим вершины K через z_j, $j = \overline{1, 2^{2N}}$. Так как $K \subset \Pi_\xi$, то в случае I

$$f_{\delta,T}(z) = T^{-1} \sum_{t=0}^{T} x_t(z), \tag{1}$$

где $x_t(z) = \exp\langle \xi(t), z\rangle$, справедливо

$$\|x_1\|_{C(K)} = \mathbf{M} \sup_{z \in K} |\exp\langle z, \xi\rangle| \leqslant \sum_{j=1}^{2^{2N}} M \exp\langle \operatorname{Re} z_j, \xi\rangle < \infty.$$

так как $K \subset \Pi_\xi$. Остается применить лемму 1. В случае II, применив лемму 1 к с. э. вида

$$x_k(z) = \int_k^{k+1} \exp\langle z, \xi(t)\rangle \, dt, \tag{2}$$

получим, в условиях теоремы сходимость $f_{m,[T]} \to f$ п. н. в $C(K)$ при $T \to \infty$. (Здесь $[T]$ — целая часть T.) Остается доказать, что $\|f_{m,T} - f_{m,[T]}\|_{C(K)} \to 0$, $T \to \infty$ п. н. Но при $[T] = n$

$$\left\| [T]^{-1} \int_{[T]}^{T} \exp\langle z, \xi(t)\rangle \, dt \right\|_{C(K)} \leqslant n^{-1} \left\| \int_n^{n+1} \exp\langle \operatorname{Re} z, \xi(t)\rangle \, dt \right\|_{C(K)} = \eta_n / n.$$

Поскольку $\mathbf{M}\eta_1 < \infty$, то для любого $C > 0$ $\sum P\{\eta_1 > Cj\} < \infty$ и с учетом стационарности $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ получаем $\sum\limits_j P\{\eta_j > Cj\} < \infty$, так что по лемме Бореля — Кантелли $\eta_n / n \to 0$, $n \to \infty$ п. н.

---

* Операции и отношения применяются к векторам и множествам покоординатно и поточечно, например $\operatorname{Re} D = \{(\operatorname{Re} z^1, \operatorname{Re} z^2, \ldots, \operatorname{Re} z^N) : (z^1, z^2, \ldots, z^N) \in D\}$.

2. Для доказательства второго утверждения теоремы в случае I опять зададим $x_k(z)$ равенством (1). Тогда $\mathbf{M}\| x_0(u)\|_p = \mathbf{M}\exp V^*(\xi) < \infty$ и применение леммы 1 доказывает теорему. В случае II, рассматривая интегралы вида (2), доказываем сходимость $f_{m,[T]}$ к f, а затем, учитывая

$$\mathbf{M}\left\| \int_n^{n+1} \exp\langle u, \xi(t)\rangle\, dt \right\|_p \leqslant \mathbf{M}\exp V^*(\xi) < \infty,$$

так же, как при доказательстве первого утверждения, получаем $f_{m,T} \to f$ п. н. в $C_p(S)$. Теорема доказана.

Для доказательства асимптотической нормальности оценки $f_{\mu,T}$ нам потребуется условие равномерного сильного перемешивания (р. с. п., φ — перемешивание). Говорят, что процесс $\xi(t)$ удовлетворяет р. с. п. если $\varphi(\tau) = \sup\{\mathbf{P}(A)^{-1} | \mathbf{P}(A\cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| : \mathbf{P}(A) \neq 0,\ A \in \sigma\{\xi(t), t \leqslant 0\},$ $B \in \sigma\{\xi(t),\ t \geqslant \tau\}\} \to 0,\ \tau \to \infty$.

Лемма 2 (теорема 17.2.3 [4, с. 392]). *Пусть процесс X_t удовлетворяет р. с. п., случайная величина ξ измерима относительно $\sigma\{X_s,\ s \leqslant t\}$, а η — относительно $\sigma\{X_s,\ s \geqslant t+\tau\}$. Если $\mathbf{M}|\xi|^p < \infty$, $\mathbf{M}|\eta|^q < \infty$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $p, q > 0$, то*

$$|M\xi\eta - M\xi M\eta| \leqslant 2(\varphi(\tau))^{1/p}(M|\xi|^p)^{1/p}(M|\eta|^q)^{1/q}.$$

Лемма 3. *Пусть B — сепарабельное предгильбертово пространство, $\{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ — строго стационарная последовательность с. в. B, удовлетворяющая р. с. п. и $\sum_{k=0}^{\infty}(\varphi(k))^{1/2} = \varphi < \infty$, $\mathbf{M}x_0 = 0$, $\mathbf{M}\|x_0\|^2 < \infty$. Тогда последовательность $S_n = n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} x_k$ плотна в B (т. е. порождает плотное семейство мер).*

Докажем лемму 3 для случая пространства l_2, $l_2 \ni x = \{x^1, \ldots, x^j, \ldots\}$, $(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x^j y^j$. Если $\{y_n\}$ — последовательность с. э. l_2, обозначим $R_m = \sup_n \mathbf{M}\left(\sum_{j=m}^{\infty}(y_n^j)^2\right)$. Тогда по теореме **6.2.3 из [3, с. 161]** достаточно проверить, что $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$. Для S_n имеем

$$\mathbf{M}\sum_{j=m}^{\infty}\left(n^{-1/2}\sum_{k=1}^{\infty} x_k^j\right)^2 = \mathbf{M}\sum_{j=m}^{\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} x_k^j x_l^j = \sum_{j=m}^{\infty} n^{-1}\Big(n\mathbf{M}(x_0^j)^2 +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n}(n-k)\mathbf{M}x_0^j x_k^j\Big) = \sum_{j=m}^{\infty}\mathbf{M}(x_0^j)^2 + 2\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}(n-k)/n\cdot\mathbf{M}x_0^j x_k^j.$$

По лемме 2 получаем

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k)/n\mathbf{M}x_0^j x_k^j \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\varphi^{1/2}(k)(\mathbf{M}(x_0^j)^2)^{1/2}(\mathbf{M}(x_k^j)^2)^{1/2} \leqslant 2\varphi\mathbf{M}(x_0^j)^2.$$

Следовательно, $R_m \leqslant (1 + 4\varphi)\sum_{j=m}^{\infty}\mathbf{M}(x_0^j)^2 \to 0$, $m \to \infty$, так как $\mathbf{M}\|x_0\|^2 < \infty$. Лемма доказана. (Лемма 3 ранее доказана В. В. Мальцевым и Е. И. Островским.)

Положим $f_t(z_1, z_2) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{M}\exp(\langle z_1, \xi(0)\rangle + \langle z_2, \xi(t)\rangle)$ и в случае I $\sigma_0^2(z_1, z_2) \overset{\text{def}}{=}$ $= f(z_1 + z_2) - f(z_1)f(z_2) + 2\sum_{j=1}^{\infty}(f_j(z_1, z_2) - f(z_1)f(z_2))$, в случае II $\sigma_m^2(z_1, z_2) \overset{\text{def}}{=} 2\int_0^{\infty}(f_t(z_1, z_2) - f(z_1)f(z_2))\,dt$.

Теорема 2. *Пусть $\xi(t)$ — с. с. п., удовлетворяющий р. с. п.,*

$$\int_0^\infty \varphi^{1/2}(t)\,d\mu(t) < \infty, \tag{3}$$

D — открытая область, $2\operatorname{Re} D \subseteq \Pi_\xi$. Тогда $\sigma_\mu^2(z_1, \bar{z}_2) < \infty$ для всех $z_1, z_1 \in \in D$ и процесс $Y_{\mu,T} = T^{1/2}(f_{\mu,T} - f)$ слабо сходится в $H(D)$ к гауссовскому процессу Y с $\mathbf{M}Y(z) = 0$ и $\mathbf{M}Y(z_1)\overline{Y(z_2)} = \sigma_\mu^2(z_1, \bar{z}_2)$.

Доказательство. Согласно теореме 2.2.3 [5, с. 36—37] достаточно проверить компактность семейства $\{Y_{\mu,T}\}$ и слабую сходимость случайных величин $l(Y_{\mu,T})$ к $l(Y)$, $l \in L$, где L — произвольное линейное семейство линейных непрерывных функционалов, разделяющих точки $H(D)$.

Докажем компактность. Будем рассматривать $\mathbb{C}^N$ как векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, изоморфное $\mathbb{R}^{2N}$. Тогда $Y_{\mu,T}(z)$ — функция $2N$ действительных аргументов, дифференцируемая на D бесконечно много раз, так как $D \subset \Pi_\xi$. Достаточно доказать, что $Y_{\mu,T}(z)$ плотно в $C(K)$, где K — множество того же вида, что и в теореме 1. Обозначим $\mathbb{R}^{2N} \supset K \ni t_i = (t_i^1, \ldots, t_i^{2N})$. Тогда для любой $2N$ раз дифференцируемой на K функции $g(t)$ имеем

$$g(t_1) = \sum_{i=1}^{2N} \int_{t_0^1}^{t_1^1} \cdots \int_{t_0^j}^{t_1^j} \frac{\partial^j}{\partial t^1 \ldots \partial t^j} g(t^1, \ldots, t^j, t_0^{j+1}, \ldots, t_0^{2N})\,dt^1 \ldots dt^j + g(t_0).$$

Отсюда, применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\sup_{t\in K} |g(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{2N} \int_{K\cap Q_j} \left|\frac{\partial^j}{\partial t^1 \ldots \partial t^j} g(t)\right| dm_j + |g(t_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{2N} m_j(K\cap Q_j) + 1\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{2N} \int_{K\cap Q_j} \left|\frac{\partial^j}{\partial t^1 \ldots \partial t^j} g(t)^2\right| dm_j + |g(t_0)|^2\right)^{1/2} \tag{4}$$

Тут Q_j — линейное многообразие, $Q_j = \{t \in \mathbb{R}^{2N} : t^k = t_0^k,\ j \leqslant k \leqslant 2N\}$, m_j — мера Лебега на Q_j.

Рассмотрим предгильбертово пространство B, состоящее из $2N$ раз дифференцируемых функций в K со скалярным произведением

$$(g, h) = \sum_{i=1}^{2N} \int_{K\cap U} \left(\frac{\partial^j}{\partial t^1 \ldots \partial t^j} g(t)\right)\left(\frac{\partial^{\cdot}}{\partial t^1 \ldots \partial t}\ \overline{h(t)}\right) dm_j + g(t_0)\overline{h(t_0)}.$$

В силу (4)

$$\|g\|_{C(K)} \leqslant C\|g\|_{\iota} = \sqrt{(g, g)}. \tag{5}$$

Очевидно, $Y_{\mu,T}$ является с. э. в B. В случае I $Y_{\delta,n} = n^{-1/2}\sum_{k=0}^{n} x_k$, $x_k = \exp\langle z, \xi(k)\rangle - f(z)$. Легко видеть, что $\{x_k\}$ удовлетворяет р. с. п. с $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{1/2}(k) < \infty$. Применим лемму 3. Достаточно проверить, что $\mathbf{M}\|x_0\|^2 < \infty$.

$$\mathbf{M}\|x_0\|^2 \quad \sum_{i=1}^{2N} \int_{K\cap Q_j} \mathbf{M}\left|\frac{\partial^j}{\partial t^1 \ldots \partial t^j}(\exp\langle z, \xi\rangle - f(z))\right|^2 dm_j +$$

$$+ \mathbf{M}\left|\exp\langle z_0, \xi\rangle - f(z_0)\right|^2$$

(здесь мы возвращаемся к комплексной трактовке $\mathbb{C}^{2N}$) $\mathbf{M}\left|\frac{\partial}{\partial t^1 \ldots \partial t^j}(\exp\langle z, \xi\rangle -\right.$ $\left. - f(z)\right|^2 = \mathbf{M}(\xi^1)^2 \ldots (\xi^j)^2 \exp\langle 2\operatorname{Re} z, \xi\rangle - \left|\frac{\partial^j}{\partial t^1 \ldots \partial t^j} f(z)\right|^2 < C < \infty$ при $z \in K$, так как $k \subset D$, $2\operatorname{Re} D \subset \Pi_\xi$. Таким образом, $\mathbf{M}\|x_0\|^2 < \infty$ и семейство $Y_{\delta,T}$ плотно в B и в силу (5) — в $C(K)$ и $H(D)$. Аналогично рассматривается случай II.

Перейдем теперь к сходимости линейных функционалов. В качестве L выберем линейную оболочку функционалов вида $l(x) = \operatorname{Re} x(z_0)$ или $l(x) = \operatorname{Im} x(z_0)$, $z_0 \in D$. Тогда $L \ni l = \sum_{k=1}^{m}(C_k^1 x(z_k) + C_k^2 \overline{x(z_k)})$. Для случайной величины $X_t = l(\exp\langle z, \xi(t)\rangle - f(z))$ выполняются условия: X_t — р. с. п. с $\int_0^\infty \varphi^{1/2}(t)\, d\mu(t) < \infty$, $\mathbf{M}X_t^2 < \infty$, $\mathbf{M}X_t = 0$ и, кроме того, $l(Y_{\mu,T}) = T^{-1/2}\int_0^T X_t d\mu(t)$.

Применяя к последовательности X_t центральную предельную теорему для слабо зависимых величин (теорему 18.5.2 [4, с. 437] (случай I) или теорему 18.7.1 [4, с. 459] (случай II)), получаем сходимость $l(Y_{\mu,T})$ к $l(Y)$. Теорема доказана.

В случае, когда $\xi(t)$ — с. с. п. со значениями в $\mathbb{R}^1$, $S \subseteq \mathbb{R}^1$, можно получить условия асимптотической нормальности $f_{\mu,T}$ в $C_p(S)$.

Теорема 3. *Пусть $\xi(t)$ — с.с.п. со значениями в $\mathbb{R}^1$, удовлетворяющий р. с. п., выполнено (3), функция $p(u)$ абсолютно непрерывна и существует такая функция $m(u) > 0$, $u \in \mathbb{R}$, что конечны следующие интегралы:*

$$Q_1 = \int_S m(u)\, du, \quad Q_2 = \int_S f''(2u)\, p^2(u)/m(u)\, du, \quad Q_3 = \int_S f(2u)\,(p'(u))^2/m(u)\, du.$$

Тогда $Y_{\mu,T}$ слабо сходится к Y в $C_p(S)$, где $Y_{\mu,T}$ и Y определены в теореме 2.

Доказательство. Учитывая теорему 2, достаточно доказать плотность семейства $\{Y_{\mu,T}\}$. Для любой дифференцируемой функции $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(u)\,p(u) = \int_{u_0}^{u} g'(v)\,p(v)\,dv + \int_{u_0}^{u} g(v)\,p'(v)\,dv + p(u_0)\,g(u_0), \quad \sup_{u\in S}|g(u)p(u)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_S |g'(u)|\,p(u)\,m^{-1}(u)\,dQ(u) + \int_S |g(u)|\,p'(u)\,m^{-1}(u)\,dQ(u) +$$
$$+ |p(u_0)\,g(u_0)| \leqslant (2Q_1+1)^{1/2}\Big(\int_S |g'(u)|^2 p^2(u)\,m^{-1}(u)\,du +$$
$$+ \int_S |g(u)|^2 (p'(u))^2 m^{-1}(u)\,du + p^2(u_0)\,g^2(u_0)\Big)^{1/2}, \tag{6}$$

где $Q(A) = \int_A m(u)\, d(u)$.

Введем предгильбертово пространство B дифференцируемых функций $g(x)$ таких, что интегралы в (6) конечны, со скалярным произведением

$$(g, h) = \int_S g'(u)\,h'(u)\,p^2(u)\,m^{-1}(u)\,du + \int_S g(u)\,h(u)\,|p'(u)|^2\,m^{-1}(u)\,du +$$
$$+ p^2(u_0)\,h(u_0)\,g(u_0).$$

Из плотности $\{Y_{\mu,T}\}$ в B следует плотность этого семейства в $C_p(S)$, а в силу леммы 3 для плотности $\{Y_{\mu,T}\}$ в B достаточно, чтобы

$$\mathbf{M}\int_S \xi^2 \exp(2u\xi)\, p^2(u)\, m^{-1}(u)\, du = Q_2 < \infty, \quad \mathbf{M}\int_S \exp(2u\xi)\,(p^{(1)}(u))^2 \times$$
$$\times m^{-1}(u)\, du = Q_3 < \infty.$$

Теорема доказана.

Замечания. 1. Если в случае l $\varphi(1) = 0$, т. е. $\xi(0)$, $\xi(1)$, ... независимые, одинаково распределенные случайные векторы, то условие п. 1 теоремы 1 является необходимым и достаточным для сильной состоятельности оценки $f_{\delta,T}$ в $H(D)$, а условие теоремы 2 — необходимым и достаточным для выполнения центральной предельной теоремы.

2. Теорема 2 в [6] является следствием теорем 1 и 3.

1. *Фукс Б. А.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных.— М.: Физматгиз, 1962.— 419 с.
2. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.— 472 с.
3. *Гренандер У.* Вероятности на алгебраических структурах.— М.: Мир, 1965.— 276 с.
4. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины.— М.: Физматгиз, 1965.— 524 с.
5. *Булдыгин В. В.* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах.— Киев : Наук. думка, 1980.— 240 с.
6. *Майборода Р. Е.* Оценка производящей функции моментов случайной величины по результатам наблюдений // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1985.— Вып. 32.— С. 121—131.

Киев. ун-т

Получено 01.11.84