УДК 517.9

Хоанг Ван Да

Построение асимптотических решений уравнений в частных производных высокого порядка с двумя пространственными переменными и нелинейными краевыми условиями

Уравнения в частных производных высокого порядка с двумя пространственными переменными и нелинейными краевыми условиями в общем случае мало исследованы. В настоящей статье решение уравнений третьего порядка строится асимптотическим методом [1].

1. Постановка задачи. Как известно, колебания упругих тел с двумя пространственными переменными с учетом ползучести материала описываются уравнениями в частных производных третьего порядка вида [2]

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + \xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^4 w) + \xi\omega^2\nabla^4 w = \varepsilon F(\theta, x, y, w, \ldots) \tag{1}$$

с нелинейными краевыми условиями

$$\begin{gathered} L_{1j}[w] = L_{1j}(\partial w/\partial x, \partial w/\partial y, \partial^2 w/\partial x^2, \partial^2 w/\partial y^2) = \varepsilon\varphi_j(\theta, y, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y), \\ L_{2j}[w] = L_{2j}(w, \partial^3 w/\partial x^3, \partial^3 w/\partial y^3) = \varepsilon\psi_j(\theta, y, w), \quad L_{1k}[w] = L_{1k}(\partial w/\partial x, \\ \partial w/\partial y, \partial^2 w/\partial x^2, \partial^2 w/\partial y^2) = \varepsilon\varphi_k(\theta, x, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y), \quad L_{2k}[w] = \\ = L_{2k}(w, \partial^3 w/\partial x^3, \partial^3 w/\partial y^3) = \varepsilon\psi_k(\theta, x, w), \quad x = j; \quad j = 0, b; \quad y = k; \quad k = 0, c \end{gathered} \tag{2}$$

где $W = W(x, y, t)$ — искомая функция; ξ, ω — положительные определенные константы; t — время; x, y — пространственные переменные; $\varepsilon > 0$ — малый параметр; функции F, φ_j, ψ_j, φ_k, ψ_k периодические по θ с периодом 2π и могут быть представлены в виде конечных сумм Фурье, коэффициенты которых являются целыми рациональными функциями относительно x, y, w; Δ, L_{1j}, L_{2j} L_{1k}, L_{2k} — линейные однородные дифференциальные операторы с частными производными относительно w.

2. Построение решения. При $\varepsilon = 0$ имеем следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + \xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^4 w) + \xi\omega^2\nabla^4 w = 0, \tag{3}$$

$$L_{1j}[w]=0,\quad L_{2j}[w]=0,\quad L_{1k}[w]=0,\quad L_{2k}[w]=0. \tag{4}$$

Частное решение этой задачи принимает вид

$$w_0(x, y, t)=\sum_{r,s=1}^{\infty} A_{rs} Z_{rs}(x, y)\cos\Phi_{rs}, \tag{5}$$

где $\Phi_{rs}=(\Omega_{rs}t+\psi_{rs})$, $\Omega_{rs}=\omega\beta_{rs}$, β_{rs} — собственные значения, соответствующие фундаментальным функциям $\{Z_{rs}(x, y)\}$. Они попарно ортогональны в прямоугольнике $\Pi\{0\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant c\}$, произвольные постоянные A_{rs}, ψ_{rs} определяются из начальных условий.

Предположим, что в невозмущенной системе возможны незатухающие гармонические колебания с частотой Ω_{11}, зависящие только от двух произвольных постоянных, и между Ω_{11} и Ω_{rs} не выполняется соотношение

$$(\Omega_{rs}-n\Omega_{11})=0,\quad r, s=1, 2, \ldots;\quad n=1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Рассмотрим случай, когда выполняется резонансное соотношение

$$\Omega_{11}=(p/q)\,\gamma, \tag{7}$$

где p, q — целые положительные взаимно простые числа $d\theta/dt=\gamma$.

При этих допущениях решение краевой задачи (1), (2) будем искать в виде асимптотического ряда

$$w(x, y, t)=az_{11}\cos\varphi+\varepsilon u_1(x, y, a, \varphi, \theta)+\varepsilon^2 u_2(x, y, a, \varphi, \theta)+\ldots, \tag{8}$$

где $U_1, U_2, \ldots$ — 2π-периодические функции по θ и $\Phi, \Phi=\left(\frac{p}{q}\theta+\psi\right)$, величины a, ψ определяются из системы уравнений

$$\begin{gathered} da/dt=\varepsilon A_1(a, \psi)+\varepsilon^2 A_2(a, \psi)+\ldots, \\ d\psi/dt=\left(\Omega_{11}-\frac{p}{q}\gamma\right)+\varepsilon B_1(a, \psi)+\varepsilon^2 B_2(a, \psi)+\ldots . \end{gathered} \tag{9}$$

Подставляя решение (8) с учетом соотношений (9) в исходное уравнение (1) и краевые условия (2), затем приравнивая коэффициенты при ε в первом улучшенном приближении, получаем уравнение для неизвестных функций

$$\begin{gathered} L_3[u_1]+\xi L_2[u_1]+\omega^2 L_1[\nabla^4 u_1]+\nu\omega^2\nabla^4 u_1+\left\{\left[\left(\Omega_{11}-\frac{p}{q}\gamma\right)^2\frac{\partial^2 A_1}{\partial\psi^2}+\right.\right. \\ +\xi\left(\Omega_{11}-\frac{p}{q}\gamma\right)\frac{\partial A_1}{\partial\psi}-3a\Omega_{11}\left(\Omega_{11}-\frac{p}{q}\gamma\right)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}-2\Omega_{11}^2 A_1- \\ \left.-2\xi a\Omega_{11}B_1\right]\cos\varphi+\left[-a\left(\Omega_{11}-\frac{p}{q}\gamma\right)^2\frac{\partial^2 B_1}{\partial\psi^2}-a\xi\left(\Omega_{11}-\frac{p}{q}\gamma\right)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}-\right. \\ \left.\left.-3\Omega_{11}\left(\Omega_{11}-\frac{p}{q}\gamma\right)\frac{\partial A_1}{\partial\psi}+2\Omega_{11}^2 aB_1-2\xi\Omega_{11}A_1\right]\sin\Phi\right\}Z_{11}=F_1 \end{gathered} \tag{10}$$

с нелинейными краевыми условиями

$$\begin{gathered} L_{1j}[u_1]=\varphi_j^{(1)},\quad L_{2j}[u_1]=\psi_j^{(1)},\quad L_{1k}[u_1]=\varphi_k^{(1)},\quad L_{2k}[u_1]=\psi_k^{(1)}, \\ x=j;\quad j=0, b;\quad y=k;\quad k=0, c. \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь

$$\varphi_j^{(1)}=\varphi_j\left(\theta, y, a\frac{\partial Z_{11}}{\partial x}\cos\Phi, a\frac{\partial z_{11}}{\partial y}\cos\Phi\right),\qquad \psi_j^{(1)}=\psi_j(\theta, y, az_{11}\cos\Phi), \tag{12}$$

$$\varphi_k^{(1)} = \varphi_k\left(\theta, x, a\,\frac{\partial z_{11}}{\partial x}\cos\Phi, a\,\frac{\partial z_{11}}{\partial y}\cos\Phi\right), \qquad \psi_k^{(1)} = \psi_k(\theta, x, az_{11}\cos\Phi),$$

$$F_1 = F(\theta, x, y, az_{11}\cos\Phi, \ldots),$$

$$L_1[U_1] = (\Omega_{11}\partial/\partial\Phi + \gamma\partial/\partial\theta)\,u_1, \quad L_2[u_1] = (\Omega_{11}\partial/\partial\Phi + \gamma\partial/\partial\theta)^2 u_1,$$

$$L_3[u_1] = (\Omega_{11}\partial/\partial\Phi + \gamma\partial/\partial\theta)^3 u_1.$$

Для полученной краевой задачи решение ищем в виде суммы

$$u_1(x, y, a, \Phi, \theta) = v_1(x, y, a, \Phi, \theta) + w_1(x, y, a, \Phi, \theta) + w_2(x, y, a, \Phi, \theta), \tag{13}$$

где $v_1(x, y, a, \Phi, \theta)$ — новая искомая функция, а $w_1(x, y, a, \Phi, \theta)$, $w_2(x, y, a, \Phi, \theta)$ — вспомогательные функции, которые подлежат определению и должны удовлетворять нелинейным краевым условиям

$$\begin{gathered} L_{1j}[w_1] + L_{1j}[w_2] = \varphi_j^{(1)}, \quad L_{2j}[w_1] + L_{2j}[w_2] = \psi_j^{(1)}, \\ L_{1k}[w_1] + L_{1k}[w_2] = \varphi_k^{(1)}, \quad L_{2k}[w_1] + L_{2k}[w_2] = \psi_k^{(1)}. \end{gathered} \tag{14}$$

Легко видеть, что определив функции w_1, w_2 и подставив выражение (13) в (10) и (11), получим уравнение для определения v_1 с линейными однородными условиями

$$\begin{gathered} L_3[v_1] + \xi L_2[v_1] + \omega^2 L_1[\nabla^4 v_1] + \xi\omega^2\nabla^4 v_1 = F_1 - \left\{\left[\left(\Omega_{11} - \frac{p}{q}\,\gamma\right)^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial\psi^2} + \right.\right. \\ + \xi\left(\Omega_{11} - \frac{p}{q}\,\gamma\right)\frac{\partial A_1}{\partial\psi} - 3a\Omega_{11}\left(\Omega_{11} - \frac{p}{q}\,\gamma\right)\frac{\partial B_1}{\partial\psi} - 2\Omega_{11}^2 A_1 - \\ \left. - 2a\xi\Omega_{11}B_1\right]\cos\Phi + \left[-a\left(\Omega_{11} - \frac{p}{q}\,\gamma\right)^2\frac{\partial^2 B_1}{\partial\psi^2} - a\xi\left(\Omega_{11} - \frac{p}{q}\,\gamma\right)\frac{\partial B_1}{\partial\psi} - \right. \\ \left.\left. - 3\Omega_{11}\left(\Omega_{11} - \frac{p}{q}\,\gamma\right)\frac{\partial A_1}{\partial\psi} + 2a\Omega_{11}^2 B_1 - 2\xi\Omega_{11}A_1\right]\sin\Phi\right\} z_{11}, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} L_{1j}[v_1] = 0, \quad L_{2j}[v_1] = 0, \quad L_{1k}[v_1] = 0, \quad L_{2k}[v_1] = 0, \\ F_1^* = F_1 - \{L_3[w_1 + w_2] + \xi L_2[w_1 + w_2] + \omega^2 L_1[\nabla^4(w_1 + w_2)] + \\ + \xi\omega^2\nabla^4(w_1 + w_2)\}. \end{gathered} \tag{16}$$

В первом улучшенном приближении для простого резонансного и общего резонансного случаев решения краевой задачи (15), (16) были построены асимптотическим методом [2].

Теперь будем находить w_1, w_2 из уравнений и краевых условий

$$\partial^4 w_1/\partial x^4 = 0, \tag{17}$$

$$L_{1j}[w_1] = \varphi_j^{(1)}(y, a, \Phi, \theta), \quad L_{2j}[w_1] = \psi_j^{(1)}(y, a, \Phi, \theta), \tag{18}$$

$$L_{1k}[w_1] = 0, \quad L_{2k}[w_1] = 0; \tag{19}$$

$$\partial^4 w_2/\partial y^4 = 0, \tag{20}$$

$$L_{1k}[w_2] = \varphi_k^{(1)}(x, a, \Phi, \theta), \quad L_{2k}[w_2] = \psi_k^{(1)}(x, a, \Phi, \theta), \tag{21}$$

$$L_{1j}[w_2] = 0, \quad L_{2j}[w_2] = 0. \tag{22}$$

Подбираем решения краевых задач (17) — (19) и (20) — (22) в следующем виде:

$$w_1(x, y, a, \Phi, \theta) = [a_0(a, \Phi, \theta)\,x^3 + a_1(a, \Phi, \theta)\,x^2 + a_2(a, \Phi, \theta)\,x + a_3(a, \Phi, \theta)]\,f(y), \tag{23}$$

$$f(y) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \sin\frac{s\pi}{c}\,y, \tag{24}$$

$$w_2(x, y, a, \Phi, \theta) = [c_0(a, \Phi, \theta) y^3 + c_1(a, \Phi, \theta) y^2 + c_2(a, \Phi, \theta) y + c_0(a, \Phi, \theta)] f(x), \quad (25)$$

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} d_s \sin \frac{s\pi}{b} x. \quad (26)$$

Здесь b_s, d_s — произвольные константы; a_i, c_i, $i = 0, 1, 2, 3$, — 2π-периодические функции по θ, Φ. При указанном выборе в (23), (24) и (25), (26) функции w_1, w_2 удовлетворяют уравнениям (17), (20) и краевым условиям (19), (22). Теперь представим $\varphi_j^{(1)}$, $\psi_j^{(1)}$, $\varphi_k^{(1)}$, $\psi_k^{(1)}$ в виде ряда

$$\varphi_j^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} E_s^{(j)}(a, \Phi, \theta) \sin \frac{s\pi}{c} y, \qquad E_s^{(j)} = \frac{2}{c} \int_0^c \varphi_j^{(1)} \sin \frac{s\pi}{c} y dy. \quad (27)$$

$$\psi_j^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} F_s^{(j)}(a, \Phi, \theta) \sin \frac{s\pi}{c} y, \qquad F_s^{(j)} = \frac{2}{c} \int_0^c \psi_j^{(1)} \sin \frac{s\pi}{c} y dy, \quad (28)$$

$$\varphi_k^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} G_s^{(k)}(a, \Phi, \theta) \sin \frac{s\pi}{b} x, \qquad G_s^{(k)} = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_k^{(1)} \sin \frac{s\pi}{b} x dx, \quad (29)$$

$$\psi_k^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} H_s^{(k)}(a, \Phi, \theta) \sin \frac{s\pi}{b} x, \qquad H_s^{(k)} = \frac{2}{b} \int_0^l \psi_k^{(1)} \sin \frac{s\pi}{b} x dy. \quad (30)$$

Подставляя выражения (23), (25) соответственно в краевые условия (18), (21) и приравнивая коэффициенты при $\sin \frac{s\pi}{c} y$ и $\sin \frac{s\pi}{b} x$ с учетом разложений (27) — (30), используя простые алгебраические операции, находим функции w_1, w_2 в виде

$$w_1 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{3} A_{si}(a, \Phi, \theta) \sin \frac{s\pi}{c} y x^{(3-i)}, \quad A_{si} = a_i b_s, \quad (31)$$

$$w_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{3} C_{si}(a, \Phi, \theta) \sin \frac{s\pi}{b} x y^{(3-i)}, \quad C_{si} = C_i d_s. \quad (32)$$

Следует заметить, что краевые условия (18) и (21) линейно независимы, поэтому величины A_{si}, C_{si} определены единственным образом.

Таким образом, в первом улучшенном приближении решение задачи с двумя пространственными переменными и нелинейными краевыми условиями в общем случае определено.

3. Пример. Рассмотрим более простое уравнение

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + \xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^4 w) + \xi \omega^2 \nabla^4 w = \varepsilon F(\theta, x, y, w, \ldots) \quad (33)$$

с нелинейными краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{x=0,b} = 0, \quad w|_{x=b} = 0, \qquad \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right|_{x=0} = -kw + \varepsilon w^3,$$
$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{y=0,c} = 0, \quad w|_{y=0,c} = 0. \quad (34)$$

Пользуясь ранее выведенными формулами, после ряда выкладок получаем уравнения для определения собственных значений

$$2k + \lambda_{1s}^2 \lambda_{2s} \operatorname{cth} b + \lambda_{1s} \lambda_{2s}^2 \operatorname{cth} \lambda_{2s} b = 0, \tag{35}$$

где $\lambda_{1s}^2 = s^2\pi^2/c^2 + \beta^2$, $\lambda_{2s}^2 = s^2\pi^2/c^2 - \beta^2$, и соответствующие фундаментальные функции принимают вид

$$Z_{rs}(x, y) = X_{rs}(x) \sin \frac{s\pi}{c} y, \tag{36}$$

$$X_{rs} = C_{rs}^{(1)} \left[\operatorname{sh} \lambda_{rs}^{(1)} x + \frac{\lambda_{rs}^{(1)}}{\lambda_{rs}^{(2)}} \operatorname{sh} \lambda_{rs}^{(2)} x \right] + C_{rs}^{(2)} \left[\operatorname{ch} \lambda_{rs}^{(1)} x - \frac{2k}{(\lambda_{rs}^{(2)})^3} \operatorname{sh} \lambda_{rs}^{(1)} x - \right.$$

$$\left. - \frac{(\lambda_{rs}^{(1)})^2}{(\lambda_{rs}^{(2)})^2} \operatorname{ch} \lambda_{rs}^{(2)} x \right]. \tag{37}$$

Величины $C_{rs}^{(1)}$, $C_{rs}^{(2)}$ с точностью до произвольного множителя определяются из уравнения

$$C_{rs}^{(1)} \left[\operatorname{sh} \lambda_{rs}^{(1)} b + \frac{\lambda_{rs}^{(1)}}{\lambda_{rs}^{(2)}} \operatorname{sh} \lambda_{rs}^{(2)} b \right] + C_{rs}^{(2)} \left[\operatorname{ch} \lambda_{rs}^{(1)} b - \frac{2k}{(\lambda_{rs}^{(2)})^3} \operatorname{sh} \lambda_{rs}^{(1)} b - \right.$$

$$\left. - \frac{(\lambda_{rs}^{(1)})^2}{(\lambda_{rs}^{(2)})^2} \operatorname{ch} \lambda_{rs}^{(2)} b \right] = 0, \quad r, s = 1, 2, \ldots. \tag{38}$$

В рассматриваемом случае

$$w_1 = \left\{ \frac{-3\,[r\pi^2 x^3 + 3v\pi^2 b x^2 - 2\,(3c^2 + v\pi^2 b^2)\,x + 6bc^2]}{} \sin \frac{\pi y}{c} - \right.$$

$$\left. - \frac{[-3r\pi^2 x^3 + 9r\pi^2 b x^2 - 2\,(c^2 + 3r\pi^2 b^2)\,x + 2bc}{[c^2\,(9\pi^2 + kbc^2) + 9v\pi^2\,(3\pi^2 b^2 - c^2)]} \sin \frac{3\pi}{c} \right\} \frac{a^3 c^2}{8} x_{11}^3(0) \cos^3 \Phi,$$

$$w_2 \equiv 0.$$

1. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Е. Н.* Асимптотические решения уравнения в частных производных.— Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1976.— 589 с.
2. *Хоанг Ван Да.* Построение асимптотических решений уравнения в частных производных высокого порядка с двумя пространственными переменными// Укр. мат. журн.— 1984.— 36, № 1.— С. 87—93.
3. *Хоанг Ван Да.* Параметрические колебания стержня с учетом ползучести его материала и нелинейных краевых условий // Res. roum. sci. techn. Sev. méc. appl.— 1984.— N 5.— P. 465—475.

Ханой. политехн. ин-т — Получено 20.11.85