УДК 517.9

Нгуен Донг Ань

О влиянии экспоненциально-коррелированного центрированного стационарного процесса на колебания механических систем с одной степенью свободы

Случайные колебания в механических системах, подверженных воздействию «белого шума», изучаются многими авторами [1—5]. В значительно меньшей степени исследуется аналогичная задача с экспоненциально-коррелированным центрированным стационарным процессом. В настоящей работе влияние такого процесса на нелинейные колебания рассматривается в обобщенных фазовых координатах, применение которых существенно упрощает исследование.

1. Линейный фильтр порядка n. Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, движение которой описывается уравнением

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon f(t, x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon} h q(t), \tag{1}$$

где $q(t)$ — случайный стационарный процесс, являющийся результатом прохождения «белого шума» через линейный фильтр:

$$Lq(t) \equiv \frac{d^n}{dt^n} q(t) + \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s \frac{d^s}{dt^s} q(t) = b\xi(t), \tag{2}$$

$h, \beta_s, b = \mathrm{const}$, $\xi(t)$ — «белый шум» с единичной интенсивностью. В дальнейшем будем предполагать, что линейный фильтр (2) имеет только отрицательные характеристические числа, т. е. все корни λ_i характеристического уравнения

$$l(\lambda) \equiv \lambda^n + \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s \lambda^s = 0 \tag{3}$$

являются различными действительными отрицательными числами. Исключая $q(t)$ из системы (1), (2), получаем

$$L(\ddot{x} + \nu^2 x) = \varepsilon L f(t, x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon} h b \xi(t). \tag{4}$$

Составим характеристическое уравнение порождающего линейного уравнения ($\varepsilon = 0$)

$$(\lambda^2 + \nu^2)\, l(\lambda) = 0 \tag{5}$$

и получим общее решение

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}+a\cos\psi,\quad \psi=\nu t+\theta. \tag{6}$$

Сделаем в уравнении (4) замену

$$\frac{d^k x}{dt^k}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k C_i(t)\,e^{\lambda_i t}+a(t)\frac{\partial^k}{\partial t^k}\cos(\nu t+\theta(t)),\quad k=\overline{0,n+1}, \tag{7}$$

где $C_i(t)$, $a(t)$, $\theta(t)$ — марковские диффузионные процессы, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} dC_i(t)/dt &= \varepsilon A_i(t,C,a,\theta)+\sqrt{\varepsilon}B_i(t,C,a,\theta)\,\dot{\xi}(t),\\ da/dt &= \varepsilon u_1(t,C,a,\theta)+\sqrt{\varepsilon}v_1(t,C,a,\theta)\,\dot{\xi}(t),\\ d\theta/dt &= \varepsilon u_2(t,C,a,\theta)+\sqrt{\varepsilon}v_2(t,C,a,\theta)\,\dot{\xi}(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Дифференцируя соотношения (7) с использованием формулы Ито, для неизвестных A_i, B_i, u_1, u_2, v_1, v_2 получаем следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k e^{\lambda_i t}B_i+\frac{\partial^k}{\partial t^k}(\cos\psi)\,v_1+a\frac{\partial^k}{\partial t^k}(-\sin\psi)\,v_2=\delta_{n+1}^k hb, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e^{\lambda_i t}A_i+\frac{\partial^k}{\partial t^k}(\cos\psi)\,u_1+a\frac{\partial^k}{\partial t^k}(-\sin\psi)\,u_2=-\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}\cos\psi\right)v_1v_2-$$

$$-\frac{1}{2}a\frac{\partial^k}{\partial t^k}(-\cos\psi)\,v_2^2+\delta_{n+1}^k[Lf(t,x,\dot{x})]_1, \tag{10}$$

где

$$\delta_{n+1}^k=\begin{cases}0, & k\neq n+1\\ 1, & k=n+1\end{cases},\quad \psi=\nu t+\theta,$$

$$[Lf(t,x,\dot{x})]_1=Lf(t,x,\dot{x})\,|\,\frac{d^k x}{dt^k}=\sum_{i=1}^{n}C_i\lambda_i^k e^{\lambda_i t}+a\frac{\partial^k}{\partial t^k}\cos\psi.$$

Решая системы (9), (10) с учетом свойств матрицы Вандермонда, получаем

$$A_i=\frac{(-1)^{i+n+2}[Lf(t,x,\dot{x})]_1e^{-\lambda_i t}}{(\lambda_i^2+\nu^2)\prod\limits_{h=i+1}^{n}\prod\limits_{s=1}^{i-1}(\lambda_h-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_s)},$$

$$B_i=\frac{(-1)^{i+n+2}hbe^{-\lambda_i t}}{(\lambda_i^2+\nu^2)\prod\limits_{h=i+1}^{n}\prod\limits_{s=1}^{i-1}(\lambda_h-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_s)},$$

$$u_1=-\frac{[Lf(t,x,\dot{x})]_1\sin\left(\psi+\sum\limits_{s=1}^{n}\psi_s\right)}{\nu\prod\limits_{s=1}^{n}\sqrt{\lambda_s^2+\nu^2}}+\frac{h^2b^2\cos^2\left(\psi+\sum\limits_{s=1}^{n}\psi_s\right)}{2a\nu^2\prod\limits_{s=1}^{n}(\lambda_s^2+\nu^2)}, \tag{11}$$

$$u_2 = -\frac{[Lf(t, x, x)]_1 \cos\left(\psi + \sum_{s=1}^{n} \psi_s\right)}{av \sum_{s=1}^{n} \sqrt{\lambda_s^2 + \nu^2}} -$$

$$-\frac{h^2 b \cos\left(\psi + \sum_{s=1}^{n} \psi_s\right) \sin\left(\psi + \sum_{s=1}^{n} \psi_s\right)}{a^2 \nu^2 \sum_{s=1}^{n} (\lambda_s^2 + \nu^2)},$$

$$v_1 = -\frac{hb \sin\left(\psi + \sum_{s=1}^{n} \psi_s\right)}{\nu \prod_{s=1}^{n} \sqrt{\lambda_s^2 + \nu^2}}, \quad v_2 = -\frac{hb \cos\left(\psi + \sum_{s=1}^{n} \psi_s\right)}{a\nu \prod_{s=1}^{n} \sqrt{\lambda_s^2 + \nu^2}},$$

где

$$\sin \varphi_s = \nu / \sqrt{\lambda_s^2 + \nu^2}, \quad \cos \varphi_s = -\lambda_s / \sqrt{\lambda_s^2 + \nu^2}. \tag{12}$$

После определения неизвестных подставим их выражения в систему (8), сделаем замену

$$D_i = C_i e^{\lambda_i t}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{13}$$

и приведем уравнения (8) к стандартному виду

$$dD_i/dt = \lambda_i D_i + \varepsilon A_i (t, De^{-\lambda t}, a, \theta) e^{\lambda_i t} + \sqrt{\varepsilon} B (t, De^{-\lambda t}, a, \theta) e^{\lambda_i t} \dot{\xi}(t),$$

$$da/dt = \varepsilon u_1 (t, De^{-\lambda t}, a, \theta) + \sqrt{\varepsilon} v_1 (t, De^{-\lambda t}, a, \theta) \dot{\xi}(t), \tag{14}$$

$$d\theta/dt = \varepsilon u_2 (t, De^{-\lambda t}, a, \theta) + \sqrt{\varepsilon} v_2 (t, De^{-\lambda t}, a, \theta) \dot{\xi}(t).$$

Здесь переменные D_i быстрые, а переменные a, θ — медленные. Из свойства непрерывной зависимости решений стохастических уравнений от параметра при достаточно большом времени t и при первом приближении можно предполагать $D_i \approx 0$ [6]. Исходя из этого вместо системы (14) будем рассматривать систему

$$da/dt = -\frac{\varepsilon [Lf(t, x, x)]_0 \sin\left(\psi + \sum_{s=1}^{n} \psi_s\right)}{\nu \prod_{s=1}^{n} \sqrt{\lambda_s^2 + \nu^2}} + \frac{\varepsilon h^2 b^2 \cos^2\left(\psi + \sum_{s=1}^{n} \psi_s\right)}{2a\nu^2 \sum_{s=1}^{n} (\lambda_s^2 + \nu^2)} -$$

$$-\frac{\sqrt{\varepsilon} hb \sin\left(\psi + \sum_{s=1}^{n} \psi_s\right)}{\nu \prod_{s=1}^{n} \sqrt{\lambda_s^2 + \nu^2}} \dot{\xi}(t), \tag{15}$$

$$d\theta/dt = -\frac{\varepsilon [Lf(t, x, x)]_0 \cos\left(\psi + \sum_{s=1}^{n} \psi_s\right)}{a\nu \prod_{s=1}^{n} \sqrt{\lambda_s^2 + \nu^2}} -$$

$$-\frac{\varepsilon h^2 b^2 \cos\left(\psi+\sum\limits_{s=1}^{n}\psi_s\right)\sin\left(\psi+\sum\limits_{s=1}^{n}\psi_s\right)}{a^2\nu^2\prod\limits_{s=1}^{n}(\lambda_s^2+\nu^2)}-\frac{\sqrt{\varepsilon}hb\cos\left(\psi+\sum\limits_{s=1}\psi_s\right)}{a\nu\prod\limits_{s=1}^{n}\sqrt{\lambda_s^2+\nu^2}}\dot{\xi}(t),$$

$$[Lf(t,x,\dot{x})]_0 = Lf(t,x,\dot{x})\,|_{d^k x/dt^k} = a\partial^k\cos\psi/\partial t^k.$$

Системе (15) соответствует усредненное уравнение Колмогорова—Фоккера—Планка (КФП) для стационарной плотности вероятностей $W(a, \theta)$ амплитуды и фазы

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_1 W)+\frac{\partial}{\partial\theta}(K_2 W)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}W)+2\,\frac{\partial^2(K_{12}W)}{\partial a\partial\theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(K_{22}W)\right\}, \qquad (16)$$

где

$$K_1(a,\theta)=-\frac{\left\langle [Lf(t,x,\dot{x})]_0\sin\left(\psi+\sum\limits_{s=1}^{n}\psi_s\right)\right\rangle}{\nu\prod\limits_{s=1}^{n}\sqrt{\lambda_s^2+\nu^2}}+\frac{h^2b^2}{4a\nu^2\sum\limits_{s=1}^{n}(\lambda_s^2+\nu^2)},$$

$$K_2(a,\theta)=-\frac{\left\langle [Lf(t,x,x)]_0\cos\left(\psi+\sum\limits_{s=1}\psi_s\right)\right\rangle}{a\nu\prod\limits_{s=1}^{n}\sqrt{\lambda_s^2+\nu^2}},\quad K_{11}(a,\theta)=\frac{h^2b^2}{2\nu^2\prod\limits_{s=1}^{n}(\lambda_s^2+\nu^2)},$$

$$K_{12}(a,\theta)=0,\quad K_{22}(a,\theta)=\frac{\gamma^2b^2}{2a^2\nu^2\prod\limits_{s=1}^{n}(\lambda_s^2+\nu^2)}. \qquad (17)$$

Для интегрирования уравнения КФП (16) можно применить результаты [8, 9].

2. Влияние экспоненциально-коррелированного центрированного стационарного случайного процесса. Рассмотрим уравнение движения механической системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x}+\nu^2 x=\varepsilon f(t,x,x)+\sqrt{\varepsilon}q(t), \qquad (18)$$

где $f(t, x, x)$ — дифференцируемая периодическая по t функция, $q(t)$ — экспоненциально-коррелированный центрированный стационарный случайный процесс, который имеет спектральную плотность и корреляционную функцию

$$S_q(\omega)=\frac{\sigma_0^2}{\Pi}\,\frac{\eta}{\eta^2+\omega^2}, \qquad (19)$$

$$K_q(\tau)=\sigma_0^2 e^{-\eta|\tau|},\quad \eta>0. \qquad (20)$$

Если время корреляции процесса $q(t)$, $\tau_{\text{кор}}=\eta^{-1}$ достаточно мало, т. е. $\eta\gg\nu$, то при исследовании колебаний в механической системе, подверженной внешнему действию $q(t)$, обычно рассматривают $q(t)$ как «белый шум» с интенсивностью, равной $\sqrt{2\pi S_q(\nu)}$ (ν — собственная частота исследуемой системы). В данной работе время корреляции предполагается произвольным, но $\eta\gg\varepsilon$. Как известно [1, 2], процесс $q(t)$ можно рассматривать как результат прохождения «белого шума» $\dot{\xi}(t)$ с единичной интенсивностью через линейный фильтр первого порядка

$$L_1 q(t) \equiv \dot{q}(t) + \eta q(t) = \sqrt{2\eta\sigma_0}\dot{\xi}(t). \tag{21}$$

Исключая $q(t)$ из системы (18), (21), получаем для $x(t)$ стохастическое дифференциальное уравнение третьего порядка с «белым шумом»

$$\dddot{x} + \eta\ddot{x} + \nu^2\dot{x} + \eta\nu^2 x = \varepsilon\,[df/dt + \eta f] + \sqrt{\varepsilon}\sigma_0\sqrt{2\eta}\dot{\xi}(t). \tag{22}$$

Случайные колебания в уравнении (22) изучены в [7]. Характеристическое уравнение линейного порождающего уравнения (22) ($\varepsilon = 0$) имеет один отрицательный корень и пару чисто мнимых корней $\lambda_1 = -\eta$, $\lambda_{2,3} = \pm i\nu$. Следовательно, в уравнении (22) возможны одночастотные колебания $x = a\cos\psi$, $\dot{x} = -a\nu\sin\psi$, $\ddot{x} = -a\nu^2\cos\psi$, $\psi = \nu t + \theta$, усредненное уравнение КФП для стационарной плотности вероятностей $W(a, \theta)$ амплитуды и фазы имеет вид (16), где

$$K_1(a, \theta) = -\frac{\langle (df/dt + \eta f)_0 (\nu\cos\psi + \eta\sin\psi)\rangle}{\nu(\nu^2 + \eta^2)} + \frac{\sigma_0^2\eta}{2a\nu^2(\nu^2 + \eta^2)},$$

$$K_2(a, \theta) = \frac{\left\langle \left(\frac{df}{dt} + \eta f\right)_0 (\nu\sin\psi - \eta\cos\psi)\right\rangle}{a\nu(\nu^2 + \eta^2)}, \quad K_{11}(a, \theta) = \frac{\sigma_0^2\eta}{\nu^2(\eta^2 + \nu^2)},$$

$$K_{12} = 0, \quad K_{22}(a, \theta) = \frac{\sigma_0^2\eta}{a^2\nu^2(\eta^2 + \nu^2)}. \tag{23}$$

Замечая, что

$$\frac{d}{dt}\langle f_0\sin\psi\rangle = \left\langle\frac{df_0}{dt}\sin\psi + \nu f_0\cos\psi\right\rangle = 0, \quad \frac{d}{dt}\langle f_0\cos\psi\rangle =$$

$$= \left\langle\frac{df_0}{dt}\cos\psi - \nu f_0\sin\psi\right\rangle = 0,$$

можно показать

$$K_1(a, \theta) = \left\langle -\frac{f_0\sin\psi}{\nu} + \frac{\sigma_0^2\eta\cos^2\psi}{a\nu^2(\nu^2 + \eta^2)}\right\rangle,$$

$$K_2(a, \theta) = \left\langle -\frac{f_0\cos\psi}{\nu a} - \frac{2\sigma_0^2\eta\sin\psi\cos\psi}{\nu^2 a^2(\nu^2 + \eta^2)}\right\rangle. \tag{24}$$

Из (24) следует, что усредненное уравнение КФП (16) с коэффициентами (23), (24) соответствует уравнению второго порядка [4]

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon f(t, x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon}\sigma_0\sqrt{\frac{2\eta}{\eta^2 + \nu^2}}\,\dot{\xi}(t), \tag{25}$$

в котором

$$x = a\cos\psi, \quad \dot{x} = -a\nu\sin\psi, \quad \psi = \nu t + \theta. \tag{26}$$

В правой части уравнения (25) «белый шум» имеет вид

$$\sigma = \sigma_0\sqrt{2\eta/(\eta^2 + \nu^2)} = \sqrt{2\pi S_a(\nu)}. \tag{27}$$

Итак, показан в более общем виде (без предположения о малости времени корреляции процесса $q(t)$) известный факт: на внешнее действие экспоненциально-коррелированного центрированного стационарного процесса $q(t)$ неавтономная квазилинейная механическая система с одной степенью свободы будет реагировать как на «белый шум» с интенсивностью, равной

$\sqrt{2\pi S_q(\nu)}$, где $S_q(\nu)$ — значение спектральной плотности процесса $q(t)$ при собственной частоте исследуемой системы.

Пример. Рассмотрим влияние случайного процесса на колебания в системе Ван-дер-Поля с периодическим внешним возбуждением при периодически изменяющейся собственной частоте

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\alpha\dot{x} + (\nu^2 + \varepsilon\lambda\cos 2\nu t)\,x = \varepsilon(1-\gamma x^2)\,\dot{x} + \varepsilon P\cos\nu t + \sqrt{\varepsilon}q(t) \quad (28)$$

$\alpha, \lambda, \gamma, P = \text{const}$, $\alpha, \gamma > 0$. Заменяем в уравнении (28) $q(t)$ эквивалентным «белым шумом»:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\alpha\dot{x} + (\nu^2 + \varepsilon\lambda\cos 2\nu t)\,x = \varepsilon(1-\gamma x^2)\,\dot{x} + \varepsilon P\cos\nu t + {} $$
$$+ \sqrt{\varepsilon}\sigma_0\sqrt{\frac{2\eta}{\nu^2+\eta^2}}\,\dot{\xi}(t). \quad (29)$$

При отсутствии периодического внешнего возбуждения ($P = 0$) уравнение (29) рассмотрено в [2], а при отсутствии периодического параметрического возбуждения ($\lambda = 0$) — в [8]. Решение уравнения (29) имеет вид (24). Применяя к уравнению (29) метод усреднения [4, 6], можно показать, что в данном случае выполняется достаточное условие интегрируемости [9] соответствующего уравнения КФП для стационарной плотности вероятностей амплитуды и фазы $W(a, \theta)$. Следовательно,

$$W(a,\theta) = Ca\exp\left\{-\frac{P\nu(\eta^2+\nu^2)\,a}{\sigma_0^2\eta}\sin\theta + \frac{\nu^2(\nu^2+\eta^2)}{\sigma_0^2\eta}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{2}-\alpha+\frac{\lambda}{4\nu}\sin\theta\right)a^2 - \frac{\gamma\nu^2(\eta^2+\nu^2)}{16\sigma_0^2\eta}\,a^4\right\}. \quad (30)$$

Последняя формула определяет плотность вероятностей при произвольных значениях линейного трения α и глубины модуляции λ. Наиболее вероятное значение амплитуды при отсутствии внешней периодической силы ($P = 0$) таково:

$$a = \left[-\frac{\lambda}{\nu\gamma} + \frac{4}{\gamma}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\nu\gamma} - \frac{4}{\gamma}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\right)^2 + \frac{4\sigma_0^2\eta}{\gamma\nu^2(\nu^2+\eta^2)}}\right]^{1/2}. \quad (31)$$

а при отсутствии периодического параметрического возбуждения определяется уравнением

$$\pm\frac{2P}{\nu}\,a = \frac{2\sigma_0^2\eta}{(\eta^2+\nu^2)\,\nu^2} + 4\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)a^2 - \frac{\gamma}{2}\,a^4. \quad (32)$$

В частности, при $\alpha = 0$, $\lambda = 0$, $P = 0$ из (31) получаем наиболее вероятное значение амплитуды автоколебания в системе Ван-дер-Поля при внешнем действии $q(t)$:

$$a = \left[\frac{2}{\gamma} + \sqrt{\frac{4}{\gamma^2} + \frac{4\sigma_0^2\eta}{\gamma\nu^2(\nu^2+\eta^2)}}\right]^{1/2}. \quad (33)$$

При $\delta_0 \to 0$ из (33) следует известное значение амплитуды автоколебания $a/\sqrt{\gamma}$. Из (30)—(33) видно, что при уменьшении собственной частоты ν значения плотности вероятностей $W(a, \theta)$ и амплитуды a увеличиваются и введение линейного трения не способно погасить случайные колебания.

1. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем.— М. : Наука, 1979.— 336 с.
2. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний.— М. : Наука, 1980.— 368 с.
3. *Случайные* колебания / Под ред. С. Кренделла.— М. : Мир, 1967.— 356 с.
4. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах // Приближенные методы исследования нелинейных систем.— Киев : Ин-т математики АН УССР.— 1976.— С. 102—147.

5. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— М. : Сов. радио, 1961.— 558 с.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 612 с.
7. *Нгуен Донг Ань, Кьеу Тхе Дык.* Случайные колебания в системах третьего порядка // Укр. мат. журн.— 1980.— 32, № 5.— С. 674—678.
8. *Нгуен Донг Ань, Кьеу Тхе Дык.* О решении уравнения ФПК для системы Ван-дер-Поля, подверженной периодическим и случайным воздействиям // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 6.— С. 779—783.
9. *Нгуен Донг Ань.* К вопросу решения уравнений ФПК для неавтономной механической системы с одной степенью свободы // Прикл. механика.— 1984.—**20**, № 3.— С. 87—93.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 28.06.85