УДК 517.5

Ж. Е. Мырзанов

О приближенном интегрировании функций двух переменных

1. Обозначим через $W_0^{rs}L_2$, $r = 1, 2, \ldots$, $s = 1, 2, \ldots$, класс заданных на квадрате $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ функций $f(x, y)$, удовлетворяющих условиям

$$\| f^{(r,s)} \|^2 = \int_0^1 \int_0^1 (f^{(r,s)}(x, y))^2\, dxdy < \infty, \quad f^{(k,0)}(0, y) = f^{(0,l)}(x, 0) = 0,$$
$$k = \overline{0, r-1}; \quad l = \overline{0, s-1},$$

в предположении, что выписанные частные производные существуют и кусочно-непрерывны.

Пусть $Z = \{z_{ij}\}$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$, — приближенные значения функции $f(x, y)$ в точках (x_i, y_j), где

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < 1, \quad 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < 1. \tag{1}$$

На классе $W_0^{rs}L_2$ рассмотрим формулу, которую, следуя [2], будем называть формулой сглаживания

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dxdy = \sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij} z_{ij} + R(f). \tag{2}$$

Используя формулу Тейлора, получаем оценку сверху остатка $R(f)$ для функции $f(x, y) \in W_0^{rs}L_2$:

$$|R(f)|^2 \leqslant p(f, Z) \left(\int_0^1 \int_0^1 \psi^2(x, y)\, dxdy + \frac{1}{\rho} \sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij}^2 \right),$$

где $\rho > 0$ — заданный параметр сглаживания и

$$p(f, Z) = \int_0^1\int_0^1 (f^{(r,s)}(x, y))^2\, dxdy + \rho \sum_{i,j=1}^{m,n} (f(x_i, y_j) - z_{ij})^2,$$

$$\psi(x, y) = \frac{(1-x)^r (1-y)^s}{r!\ s!} - \sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij} \frac{(x_i - x)_+^{r-1} (y_j - y)_+^{s-1}}{(r-1)!\ (s-1)!}.$$

Величина $\int_0^1\int_0^1 \psi^2(x, y)\, dxdy + \frac{1}{\rho}\sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij}^2$ зависит от коэффициентов λ_{ij}, но не зависит от функции $f(x, y)$ и ее приближенных значений z_{ij} в точках (x_i, y_j), поэтому естественно выбирать коэффициенты λ_{ij} так, чтобы минимизировать эту величину.

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть $g_1, \ldots, g_p$ — элементы евклидова пространства. Тогда для любого $\delta > 0$ определитель*

$$\begin{vmatrix} \delta + (g_1, g_1) & (g_2, g_1) & \ldots & (g_p, g_1) \\ (g_1, g_2) & \delta + (g_2, g_2) & \ldots & (g_p, g_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (g_1, g_p) & (g_2, g_p) & \ldots & \delta + (g_p, g_p) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Доказательство. Допустим, что однородная линейная система

$$\alpha_1(\delta + (g_1, g_1)) + \alpha_2(g_2, g_1) + \ldots + \alpha_p(g_p, g_1) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_1(g_1, g_p) + \alpha_2(g_2, g_p) + \ldots + \alpha_p(\delta + (g_p, g_p)) = 0$$

имеет ненулевое решение $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Запишем систему в виде

$$\alpha_1\delta + \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i, g_1\right) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_p\delta + \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i, g_p\right) = 0.$$

Умножая k-е уравнение на α_k, $k = \overline{1, p}$, и складывая все p уравнений, получаем $\delta\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i\right) = 0$, или $\delta\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 + \left\|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i\right\|^2 = 0$, что противоречит допущению. Следовательно, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь систему уравнений относительно неизвестных λ_{ij}, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$:

$$\sum_{j=1}^{m,n} \lambda_{ij} \int_0^1\int_0^1 \varphi_{ij}(x, y)\, \varphi_{kl}(x, y)\, dxdy + \frac{1}{\rho}\lambda_{kl} = a_{kl}, \quad k = \overline{1, m}; \quad l = \overline{1, n}, \qquad (3)$$

где

$$\varphi_{\nu\mu}(x, y) = \frac{(x_\nu - x)_+^{r-1} (y_\mu - y)_+^{s-1}}{(r-1)!\ (s-1)!},$$

$$a_{\nu\mu} = \frac{1}{r!\ s!}\int_0^1\int_0^1 (1-x)^r (1-y)^s\, \varphi_{\nu\mu}(x, y)\, dxdy, \quad \nu = \overline{1, m}; \quad \mu = \overline{1, n}.$$

Если в лемме положить $p = mn$, $\delta = 1/\rho$ и в качестве скалярного произведения взять

$$(\varphi_{ij}, \varphi_{kl}) = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_{ij}(x, y)\, \varphi_{kl}(x, y)\, dxdy,$$

то рассматриваемая система уравнений будет иметь единственное решение $\overline{\lambda}_{ij}$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

Пусть $\overline{\psi}(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — ядра, соответствующие коэффициентам $\overline{\lambda}_{ij}$ и λ_{ij}. Тогда

$$\int_0^1 \int_0^1 \psi^2(x, y)\, dxdy + \frac{1}{\rho} \sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \overline{\psi}^2(x, y)\, dxdy + \frac{1}{\rho} \sum_{i,j=1}^{m,n} \overline{\lambda}_{ij}^2 +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 (\psi(x, y) - \overline{\psi}(x, y))^2\, dxdy + \frac{1}{\rho} \sum_{i,j=1}^{m,n} (\lambda_{ij} - \overline{\lambda}_{ij})^2 +$$

$$+ 2\left[\int_0^1 \int_0^1 \overline{\psi}(x, y)(\psi(x, y) - \overline{\psi}(x, y))\, dxdy + \frac{1}{\rho} \sum_{i,j=1}^{m,n} \overline{\lambda}_{ij}(\lambda_{ij} - \overline{\lambda}_{ij})\right].$$

Так как $\overline{\lambda}_{ij}$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$, удовлетворяют системе уравнений (3), то член в квадратных скобках равен нулю, и поэтому

$$\int_0^1 \int_0^1 \overline{\psi}^2(x, y)\, dxdy + \frac{1}{\rho} \sum_{i,j=1}^{m,n} \overline{\lambda}_{ij}^2 \leqslant \int_0^1 \int_0^1 \psi^2(x, y)\, dxdy + \frac{1}{\rho} \sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij}^2.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\lambda_{ij} = \overline{\lambda}_{ij}$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Среди всех формул сглаживания* (2) *с фиксированными узлами* (1) *оптимальной для класса* $W_0^{rs} L_2$ *является единственная формула, коэффициенты которой находятся из системы линейных уравнений* (3).

Замечание. Если $f(x_i, y_j) = z_{ij}$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$, то определитель системы (3) есть определитель Грама относительно скалярного произведения

$$(\varphi_{ij}, \varphi_{kl}) = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_{ij}(x, y)\, \varphi_{kl}(x, y)\, dxdy.$$

Так как функции $\varphi_{kl}(x, y)$, $k = \overline{1,m}$; $l = \overline{1,n}$, линейно независимы, то определитель Грама отличен от нуля. Следовательно, и в этом случае система уравнений (3) имеет единственное решение.

2. Пусть $W^{rs}L_2$ — класс функций $f(x, y)$, у которых частные производные $f^{(r-1,s)}(x, y)$, $f^{(r,s-1)}(x, y)$ абсолютно непрерывны; при этом

$$\partial f^{(r-1,s)}(x, y)/\partial x = \partial f^{(r,s-1)}(x, y)/\partial y, \quad \| f^{(r,s)} \| \leqslant 1.$$

Рассмотрим кубатурную формулу, содержащую интеграл по одной из переменных

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dxdy = \sum_{i=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\rho_1} p_i^{(\nu)} \int f^{(\nu,0)}(x_i, y)\, dy + \sum_{j=0} \sum_{\mu=0}^{\rho_2} q_j^{(\mu)} \int_0^1 f^{(0,\mu)}(x, y_j)\, dx -$$

$$- \sum_{i,j=0}^{m,n} \sum_{\nu,\mu=0}^{\rho_1,\rho_2} p_i^{(\nu)} q_j^{(\mu)} f^{(\nu,\mu)}(x_i, y_j) + R(f; P, Q), \tag{4}$$

где $0 \leqslant \rho_1 \leqslant r - 1$, $0 \leqslant \rho_2 \leqslant s - 1$ и (P, Q) — вектор коэффициентов $p_i^{(\nu)}$, $q_j^{(\mu)}$.

Узлы этой формулы

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = 1, \quad 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = 1 \tag{5}$$

будем считать фиксированными и рассмотрим задачу минимизации величины $\sup\limits_{f \in W^{rs}L_2} |R(f; P, Q)|$ по коэффициентам $p_i^{(\nu)}$ и $q_j^{(\mu)}$.

Как и в [1], без потери общности будем полагать, что формула точна для всех многочленов степени $r-1$ по x и $s-1$ по y. Тогда остаток $R(f; P, Q)$ этой формулы для функции $f(x, y) \in W^{rs} L_2$ можно представить в виде [3]

$$R(f; P, Q) = \frac{1}{(r-1)!\,(s-1)!} \int_0^1 \int_0^1 g_r(x)\, g_s(y)\, f^{(r,s)}(x, y)\, dx dy,$$

где

$$g_r(x) = \frac{(1-x)}{r} - \sum_{i=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\rho_1} \frac{(r-1)!}{(r-\nu-1)!}\, p_i^{(\nu)} (x_i - x)_+^{r-\nu-1},$$

$$g_s(y) = \frac{(1-y)}{s} - \sum_{j=0}^{l} \sum_{\mu=0}^{\rho_2} \frac{(s-1)!}{(s-\mu-1)!}\, q_j^{(\mu)} (y_j - y)_+^{s-\mu-1}.$$

Отсюда, используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$|R(f; P, Q)| \leqslant \frac{1}{(r-1)!\,(s-1)!} \| g_r g_s \|,$$

и так как это неравенство верно для любой функции $f(x, y) \in W^{rs} L_2$, то

$$\sup_{f \in W^{rs}L_2} |R(f; P, Q)| \leqslant \frac{1}{(r-1)!\,(s-1)!} \| g_r g_s \|. \tag{6}$$

Заметим, что для принадлежащей классу $W^{rs}L_2$ функции

$$\psi_0(x, y) = \frac{\| g_r g_s \|^{-}}{(r-1)!\,(s-1)!} \int_0^x \int_0^y (x-t)^{r-1} (y-\tau)^{s-1} g_r(t)\, g_s(\tau)\, dt d\tau$$

в (6) достигается знак равенства. Следовательно,

$$\sup_{f \in W^{rs}L_2} |R(f; P, Q)| = \frac{1}{(r-1)!\,(s-1)!} \| g_r g_s \|.$$

Таким образом, использовав результаты одномерного случая [1, теорема Д. 12] получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Среди всех кубатурных формул (4) с фиксированными узлами (5) наилучшей для класса $W^{rs}L_2$ является единственная формула, определяемая коэффициентами*

$$p_i^{(\nu)} = \int_0^1 c_{i\nu}(x)\, dx, \quad i = \overline{0, m}; \quad \nu = \overline{0, \rho_1}, \quad q_j^{(\mu)} = \int_0^1 c_{j\mu}(y)\, dy,$$
$$j = \overline{0, n}; \quad \mu = \overline{0, \rho_2}, \tag{7}$$

где $c_{i\nu}(x)$ и $c_{j\mu}(y)$ — одномерные фундаментальные сплайны, которые определяются соотношениями $c_{i\nu}^{(\alpha)}(x_k) = \delta_{ki}\delta_{\alpha\nu}$, $i, k = \overline{0, m}$; $\nu, \alpha = \overline{0, \rho_1}$, $c_{j\mu}^{(\beta)}(y_l) = \delta_{lj}\delta_{\beta\mu}$, $j, l = \overline{0, n}$; $\mu, \beta = \overline{0, \rho_2}$, δ_{pq} — символ Кронекера, равный 1 при $p = q$ и 0 при $p \neq q$.

Укажем теперь одно применение теоремы 2. Пусть $r = s$, $\rho_1 = \rho_2 = r-1$, $x_i = i/N$, $y_j = j/N$, $i, j = \overline{0, N}$. Тогда из теоремы 2 и [1, с. 234] имеем

$$\inf_{(P, Q)} \sup_{f \in W^{rr}L_2} |R(f; P, Q)| = \frac{1}{[(r-1)!]^2} \| g_r \|^2 \asymp N^{-2r}.$$

Обозначим через $\widehat{W}^r L_2 \subset W^{rr} L_2$ класс функций $f(x, y)$, удовлетворяющих условиям $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} \| f^{(\nu,r)}(x, \cdot)\| \leqslant 1$, $\sup\limits_{0 \leqslant y \leqslant 1} \| f^{(r,\nu)}(\cdot, y)\| \leqslant 1$, $\nu = \overline{0, r-1}$, $\| f^{(r,r)} \| \leqslant 1$. Для $f(x, y) \in \widehat{W}^r L_2$ рассмотрим квадратурные формулы

$$\int\limits_0^1 f^{(0,\mu)}(x, y_j)\, dx = \sum_{i=0}^{N^2} \sum_{k=0}^{r-1} p_{iN^2}^{(k)} f^{(k,\mu)}(i/N^2, y_j) + R_1(f^{(0,\mu)}), \tag{8}$$

$$\int\limits_0^1 f^{(\nu,0)}(x_i, y)\, dy = \sum_{j=0}^{N^2} \sum_{l=0}^{r-1} q_{jN^2}^{(l)} f^{(\nu,l)}(x_i, j/N^2) + R_2(f^{(\nu,0)}), \quad \nu, \mu = \overline{0, r-1}, \tag{9}$$

где $p_{iN^2}^{(k)}$, $q_{jN^2}^{(l)}$ — коэффициенты оптимальной формулы вида

$$\int\limits_0^1 f(t)\, dt \approx \sum_{i=0}^{N^2} \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_i^{(k)} f(i/N^2)$$

для класса W_2^r (см. [1, с. 233]). Здесь через W_2^r обозначен класс функций $f(t)$, у которых $f^{(r-1)}(t)$ абсолютно непрерывна, $f^{(r)}(t) \in L_2[0, 1]$ и $\| f^{(r)} \| \leqslant 1$. Ясно, что если $f \in \widehat{W}^r L_2$, то $f^{(\nu,0)}(x_i, t)$, $f^{(0,\mu)}(t, y_j) \in W_2^r$. Но тогда из [1, с. 234] следует

$$R_1(f^{(0,\mu)}) = O(N^{-2r}), \quad R_2(f^{(\nu,0)}) = O(N^{-2r}). \tag{10}$$

Рассмотрим кубатурную формулу

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x, y)\, dx dy = \sum_{i,j=0}^{N,N^2} \sum_{\nu,l=0}^{r-1,r-1} p_i^{(\nu)} q_{jN^2}^{(l)} f^{(\nu,l)}(x_i, j/N^2) +$$

$$+ \sum_{i,j=0}^{N^2,N} \sum_{\mu,k=0}^{r-1,r-1} q^{(\mu)} p_{iN^2}^{(k)} f^{(k,\mu)}(i/N^2, y_j) - \sum_{i,j=0}^{N,N} \sum_{\nu,\mu=0}^{r-1,r-1} p_i^{(\nu)} q_j^{(\mu)} f^{(\nu,\mu)}(x_i, y_j) + R^*(f), \tag{11}$$

где коэффициенты $p_i^{(\nu)}$, $q_j^{(\mu)}$ определены соотношениями (7). Тогда для $f(x, y) \in \widehat{W}^r L_2$ из (10) и теоремы 2 получим

$$|R^*(f)| \leqslant |R(f; P, Q)| + \sum_{i=0}^{N} \sum_{\nu=0}^{r-1} |p_i^{(\nu)}|\, |R_2(f^{(\nu,0)})| + \sum_{j=0}^{N} \sum_{\mu=0}^{r-1} |q_j^{(\mu)}|\, |R_1(f^{(0,\mu)})| =$$

$$= O(N^{-2r}) + \sum_{i=0}^{N} \sum_{\nu=0}^{r-1} |p_i^{(\nu)}| (|R_2(f^{(\nu,0)})| + |R_1(f^{(0,\nu)})|).$$

Из [1, с. 233] (см. соотношение (20)) следует, что найдется постоянная $\alpha(r)$, зависящая лишь от r, такая, что $\sum\limits_{i=0}^{N} \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} |p_i^{(\nu)}| \leqslant \alpha(r)$, поэтому

$$\sup_{f \in \widehat{W}^r L} |R^*(f)| = O(N^{-2r}).$$

Заметим, что формула (11) является кубатурной формулой с $O(N^3)$ узлами и обеспечивает на классе $\widehat{W}^r L_2$ точность порядка $O(N^{-2r})$. Из результатов работы [1, с. 193] следует, что для достижения точности порядка $O(N^{-2r})$ с помощью формулы вида

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x, y)\, dx dy \approx \sum_{i,j=0}^{N,N} \sum_{\nu,\mu=0}^{r-1,r-1} a_{ij}^{(\nu,\mu)} f^{(\nu,\mu)}(x_i, y_j) \tag{12}$$

с решетчатым расположением узлов, необходимо знать значение функции и ее производных в $O(N^4)$ узлах. Таким образом, формула (11) на классе $\widehat{W}^r L_2$ более экономична в смысле числа узлов, чем формула вида (12).

1. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы— М. : Наука, 1979.— 254 с.
2. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация.— М. : Мир, 1975.— 496 с.
3. *Лушпай Н. Е.* Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Изв. вузов. Математика.— 1969.— № 12.— С. 53—59.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 28.10.85,
после доработки — 29.01.86