УДК 517.4

Г. Н. Кононенко, А. М. Кириченко, Т. Г. Фомичева

Об одном методе построения оригиналов некоторых изображений с помощью обобщенной теоремы Эфроса

При построении оригиналов ряда изображений по Лапласу функций $\tilde{\theta}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ оказывается полезной следующая теорема А. М. Эфроса [1 — 3]: если $f(t) \mathrel{\dot{\Rightarrow}} F(s)$ и $\varphi(t, \tau_1) \mathrel{\dot{\Rightarrow}} \Phi(s)\, e^{-\tau_1 q(s)}$, где $\Phi(s)$ и $q(s)$ — аналитические функции, то

$$\int\limits_0^\infty f(\tau_1)\,\varphi(t, \tau_1)\,d\tau_1 \mathrel{\dot{\Rightarrow}} \Phi(s)\,F[q(s)].$$

Используем приведенную теорему к нахождению оригиналов изображений, являющихся решением вспомогательной системы уравнений, описывающих математические модели тепло- и массопереноса при фильтрации грунтовых вод с учетом массообмена и линейного теплообмена между фазами и наличии перетоков тепла или концентрации веществ от грунтов подошвы и кровли [4, 5]

$$\tilde{\theta}_1(\xi, s) = \frac{1}{s} \exp[-(1 + as)\,\xi] \exp[\xi/q(s)], \tag{1}$$

$$\tilde{\theta}_2(\xi, s) = \frac{1}{q(s)}\,\tilde{\theta}_1(\xi, s), \qquad q(s) = s + b\sqrt{s} + 1. \tag{2}$$

В силу теоремы смещения [3] можно записать

$$f(t - a\xi) \mathrel{\dot{\Rightarrow}} \exp(-a\xi s)\,F(s). \tag{3}$$

Теперь применим к изображению (2) теорему Эфроса. Для этого примем

$$f(t) = I_0(2\sqrt{\xi t}) \mathrel{\dot{\Rightarrow}} F(s) = 1/s e^{\xi/s}, \quad \Phi(s) = 1/s, \quad \varphi(t, \tau_1) \mathrel{\dot{\Rightarrow}} \Phi(s)\, e^{-\tau_1 q(s)} =$$

$$= e^{-\tau_1} e^{-\tau_1 s}\,\frac{1}{s}\,e^{-b\tau_1\sqrt{s}} \mathrel{\dot{\Leftarrow}} e^{-\tau_1} \operatorname{erfc} \frac{b\tau_1}{2\sqrt{t - \tau_1}}, \quad \Phi(s)\,F[q(s)] \mathrel{\dot{\Leftarrow}}$$

$$\mathrel{\dot{\Leftarrow}} \int\limits_0^\infty f(\tau_1)\,\varphi(t, \tau_1)\,d\tau_1 = \int\limits_0^t e^{-u} I_0(2\sqrt{\xi u}) \operatorname{erfc} \frac{bu}{2\sqrt{t - u}}\,du.$$

С учетом теоремы смещения (3) окончательно можно записать выражение для оригинала

$$\theta_2(\xi, \tau) = e^{-\xi} \int\limits_0^\tau e^{-u} I_0(2\sqrt{\xi u}) \operatorname{erfc} \frac{bu}{2\sqrt{\tau - u}}\,du, \tag{4}$$

где $\tau = t - a\xi$.

Прежде чем найти оригинал изображения (1) перепишем его в виде

$$\tilde{\theta}_1(\xi, s) = e^{-(1+as)\xi} \left\{\frac{1}{s} + \left[\frac{1}{s}\,(e^{\xi/q(s)} - 1)\right]\right\}. \tag{5}$$

Принимая $f(t) = \sqrt{\xi/t}\, I_1(2\sqrt{\xi t}) \mathrel{\dot{\Rightarrow}} F(s) = e^{\xi/s} - 1$, $\Phi(s) = 1/s$, имеем $\varphi(t, \tau_1) \mathrel{\dot{\Rightarrow}} \Phi(s)\, e^{-\tau_1 q(s)} = e^{-\tau_1} e^{-\tau_1 s}\,\frac{1}{s}\,e^{-b\tau_1\sqrt{s}} \mathrel{\dot{\Leftarrow}} e^{-\tau_1} \operatorname{erfc} \frac{b\tau_1}{2\sqrt{t - \tau_1}}$ и $\Phi(s) \times$

$$\times F[q(s)] \mathrel{\dot{\Leftarrow}} \int\limits_0^\infty f(\tau_1)\,\varphi(t, \tau_1)\,d\tau_1 = 1 + \sqrt{\xi} \int\limits_0^t e^{-u} I_1(2\sqrt{\xi u})\, u^{-1/2} \operatorname{erfc} \frac{bu}{2\sqrt{t - u}}\,du.$$

В силу теоремы смещения окончательно находим

$$\theta_1(\xi, \tau) = e^{-\xi}\Big[1 + \sqrt{\xi}\int_0^\tau e^{-u} I_1(2\sqrt{\xi u})\, u^{-1/2} \operatorname{erfc} \frac{bu}{2\sqrt{\tau - u}}\, du\Big]. \qquad (6)$$

Изображение (1) можно представить в виде произведения следующих изображений:

$$\tilde{\theta}_1(\xi, s) = e^{-(1+as)\xi}\left[\frac{1}{sq(s)} e^{\xi/q(s)}\right] q(s) = e^{-(1+as)\xi} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{q(s)} + \frac{b}{\sqrt{s}q(s)} + \frac{1}{sq(s)}\right] e^{\xi/q(s)}.$$

Применяя последовательно к каждому слагаемому теорему Эфроса и учитывая, что [6]

$$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-b\tau_1\sqrt{s}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-2^{-2}b^2\tau_1^2 t^{-1}}, \quad e^{-b\tau_1\sqrt{s}} \risingdotseq \frac{1}{2}\frac{b\tau_1}{\sqrt{\pi t^3}}\, e^{-2^{-2}b^2\tau_1^2 t^{-1}},$$

получаем другое представление оригинала указанного изображения (1):

$$\theta_1(\xi, \tau) = \theta_2(\xi, \tau) + e^{-\xi}\int_0^\tau e^{-u} I_0(2\sqrt{\xi u})\, \frac{b(2\tau - u)}{2\sqrt{\pi(\tau - u)^3}}\, e^{-\frac{b^2u^2}{4(\tau-u)}} du. \qquad (7)$$

Можно показать, что выражения (6) и (7) тождественны. Оригинал (6) можно получить из выражения (7) путем интегрирования его по частям. Кроме того, легко убедиться в том, что при $b \to 0$ из решений (4) и (6) можно получить выражения, являющиеся решениями важных прикладных задач тепло- и массопереноса [4, 5, 7] для более упрощенных математических моделей процесса.

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.— 736 с.
2. *Лурье А. И.* Операционное исчисление в приложениях к задачам механики.— Л., М.: Глав. ред. общетехн. лит., 1938.— 224 с.
3. *Мартыненко В. С.* Операционное исчисление.— Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1968—198 с.
4. *Кононенко Г. Н.* Аналитические и численные решения одно- и двумерных краевых задач конвективного теплопереноса.— Киев, 1981.— 64 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 81.4).
5. *Кононенко Г. Н.* Исследование конвективного тепло- и массопереноса при фильтрации жидкости.— Киев, 1983.— 64 с.— (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 83.2).
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. В 2-х т. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина.— М.: Наука, 1969.— 343 с.
7. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел.— М.: Наука, 1964.— 487 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Киев. ун-т

Получено 30.05.85,
после доработки — 12.11.85