УДК 517.91

Г. Р. Белицкий

Функциональные модули диффеоморфизмов окружности

1. Статья посвящена построению гладких инвариантов диффеоморфизмов окружности с конечным числом гиперболических неподвижных точек. Их количество является, очевидно, единственным топологическим инвариантом таких диффеоморфизмов. Дифференциалы в неподвижных точках — инварианты гладкой сопряженности. Однако, оказывается, что их недостаточно: имеются еще функциональные инварианты («модули») гладкой сопряженности, которые реализуются в виде коциклов, «склеивающих» данный диффеоморфизм из стандартных. Ситуация очень напоминает ту, которая имеет место при аналитической классификации ростков отображений в $\mathbb{C}$ с тождественной линейной частью (см. [1]).

Из наличия модулей вытекает, в частности, существование при любом $k \geqslant 2$ грубых C^k-диффеоморфизмов, которые гладко не сопряжены никакому C^∞-диффеоморфизму (и даже C^{k+2}-диффеоморфизму). Отметим, что при размерности основного многообразия $n \geqslant 3$ такие эффекты имеют место даже локально (см. [2, с. 153]).

2. Для простоты ограничимся случаем двух неподвижных точек. Зафиксируем точки $P_1, P_2 \in S^1$. Для фиксированных λ, μ, $0 < \lambda < 1 < \mu$ обозначим через $D^k(\lambda, \mu)$, $k \geqslant 2$, множество всех сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов F: $S^1 \to S^1$ с неподвижными точками P_1, P_2 и производными $F'(P_1) = \lambda$, $F'(P_2) = \mu$.

При $m \geqslant 1$ обозначим через $P^m(\lambda, \mu)$ множество пар 2π-периодических функций $\gamma = (\gamma_+, \gamma_-)$ на оси класса C^m, обладающих свойством

$$\gamma_+ < 0, \quad \gamma_- > 0, \quad \gamma'_\pm(u) + \frac{\ln\mu}{2\pi}\gamma_\pm(u) \neq 0, \quad u \in \mathbb{R}^1. \tag{1}$$

Введем в множестве $P^m(\lambda, \mu)$ отношение эквивалентности: $\gamma \sim \beta$ тогда и только тогда, когда $\gamma_\pm(u) = a\beta_\pm(u + b)$, $u \in \mathbb{R}$, для некоторых $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Теорема. *При* $2 \leqslant k \leqslant \infty$ *существует такое отображение* I: $D^k(\lambda, \mu) \to P^{k-1}(\lambda, \mu)$, *что* а) *диффеоморфизмы* F, $G \in D^k(\lambda, \mu)$ *сопряжены в классе* C^1 *тогда и только тогда, когда* $I(F) \sim I(G)$; б) *образ* $I(D^k(\lambda, \mu))$ *содержит множество* $P^k(\lambda, \mu)$ (*при* $k = \infty$ *отображение* I *сюръективно*).

3. Для построения отображения I положим $U_1 = S^1 \setminus \{P_2\}$, $U_2 = S^1 \setminus \{P_1\}$. Пусть A_λ, $A_\mu : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — операторы умножения на λ, μ соответственно. Существуют такие C^{k-1}-диффеоморфизмы $\Phi_i : (\mathbb{R}^1, 0) \to (U_i, P_i)$, $i = 1, 2$, что $\Phi_1 \circ A_\lambda = F \circ \Phi_1$, $\Phi_2 \circ A_\mu = F \circ \Phi_2$. Тогда $(\Phi_1 \circ A_\lambda \circ \Phi_1^{-1})(z) = (\Phi_2 \circ A_\mu \circ \Phi_2^{-1})(z)$, $z \in U_1 \cap U_2$. Отображение $\Phi_F \equiv \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : \mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ является C^{k-1}-диффеоморфизмом, причем $\Phi_F(\lambda t) = \mu\Phi_F(t)$, $t \neq 0$. Положим $\Phi_F(t) = |t|^\nu \psi_F(t)$, $\nu = \ln\mu \setminus \ln\lambda$. Тогда $\psi_F(\lambda t) = \psi_F(t)$, $t \neq 0$. Функции $v_\pm(u) = \psi_F(\pm e^u)$, $u \in \mathbb{R}^1$, являются периодическими с периодом $\alpha = \ln\lambda$ и принадлежат классу C^{k-1}. Положим $I(F) = (\gamma_+, \gamma_-)$, $\gamma_\pm(u) = v_\pm\left(\dfrac{\alpha}{2\pi}u\right)$. Отображение $I : D^k(\lambda, \mu) \to P^{k-1}(\lambda, \mu)$ искомое.

4. Докажем утверждения а) и б). Пусть F, $G \in D^k(\lambda, \mu)$ и $H \circ F = G \circ H$, где $H : S^1 \to S^1$ — диффеоморфизм класса C^1. Обозначим через $\tilde\Phi_1$, $\tilde\Phi_2$ диффеоморфизмы, сопрягающие G с A_λ, A_μ в U_1, U_2 соответственно. Тогда C^1-диффеоморфизмы $\tilde\Phi_i^{-1} \circ H \circ \Phi_i$: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $i = 1, 2$, коммутируют с A_λ, A_μ со-

ответственно. Следовательно, они линейны: $\tilde{\Phi}_i^{-1} \circ H \circ \Phi_i = c_i t$, $c_i > 0$, $i = 1, 2$. Отсюда

$$\tilde{\Phi}_1 (c_1 \Phi_1^{-1} (z)) = \tilde{\Phi}_2 (c_2 \Phi_2^{-1} (z)), \quad z \in U_1 \cap U_2, \tag{2}$$

т. е. $\Phi_G (c_1 t) = c_2 \Phi_F (t)$, $t \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$. Полагая $I(G) = (\beta_+, \beta_-)$, $a = c_1^{\nu} \cdot c_2^{-1}$, $b = 2\pi \setminus \alpha \ln c_1$, получаем $\gamma_\pm (u) = a \beta_\pm (u + b)$, $u \in \mathbb{R}$, т. е. $I(F) \sim I(G)$.

Обратно, пусть $I(F) \sim I(G)$. Это означает, что $\Phi_G (c_2 t) = c_2 \Phi_F (t)$, $t \neq 0$, с некоторыми $c_i > 0$. Следовательно, имеет место равенство (2). Положим

$$H(z) = \begin{cases} \tilde{\Phi}_1 (c_1 \Phi_1^{-1} (z)), & z \in U_1; \\ \tilde{\Phi}_2 (c_2 \Phi_2^{-1} (z)), & z \in U_2. \end{cases}$$

Тогда H — корректно определенный C^{k-1}-диффеоморфизм окружности. Так как $\tilde{\Phi}_1^{-1} \circ H \circ \Phi_1 \circ A_\lambda = A_\lambda \tilde{\Phi}_1^{-1} \circ H \circ \Phi_1$, $\tilde{\Phi}_2^{-1} \circ H \circ \Phi_2 \circ A_\mu = A_\mu \circ \tilde{\Phi}_2^{-1} \circ H \circ \Phi_2$, то $H \circ F = G \circ H$. Тем самым утверждение а) теоремы доказано.

Докажем утверждение б). Пусть $\gamma = (\gamma_+, \gamma_-) \in P^k (\lambda, \mu)$. Положим $\Phi(t) = |t|^\nu \gamma_\pm (2\pi \setminus \alpha \ln |t|)$, $t \in \mathbb{R}_\pm$, $t \neq 0$. В силу (1) отображение $\Phi : \mathbb{R}_1 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ является C^k-диффеоморфизмом. «Факторизуем» Φ, полагая $\Phi = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$, где $\Phi_i : (\mathbb{R}^1, 0) \to (U_i, P_i)$, $i = 1, 2$, — C^k-диффеоморфизмы. Так как $\Phi \circ A_\lambda = A_\mu \circ \Phi$, то отображение

$$F(z) = \begin{cases} (\Phi_1 \circ A_\lambda \circ \Phi_1^{-1})(z), & z \in U_1; \\ (\Phi_2 \circ A_\mu \circ \Phi_2^{-1})(z), & z \in U_2, \end{cases}$$

является корректно определенным C^k-диффеоморфизмом окружности. Очевидно, $I(F) = \gamma$. Теорема полностью доказана.

5. Укажем несколько следствий. Так как в образе $I(D^k(\lambda, \mu)) \supset P^k(\lambda, \mu)$ имеются неэквивалентные элементы, то справедливо следствие.

Следствие 1. *При $2 \leqslant k \leqslant \infty$ существуют диффеоморфизмы F, $G \in D^k(\lambda, \mu)$, которые не сопряжены в классе C^1.*

Из построения преобразования H, сопрягающего диффеоморфизмы F, $G \in D^k(\lambda, \mu)$ с эквивалентными $I(F)$, $I(G)$ следует, что $H \in C^{k-1}$. Отсюда вытекает такое следствие.

Следствие 2. *Если диффеоморфизмы F, $G \in D^k(\lambda, \mu)$ сопряжены в классе C^1, то они сопряжены в классе C^{k-1} (в классе C^∞ при $k = \infty$).*

Так как эквивалентность в $P^m(\lambda, \mu)$ сохраняет класс гладкости, то справедливо утверждение.

Следствие 3. *Для того чтобы диффеоморфизм $F \in D^k(\lambda, \mu)$ был сопряжен в классе C^1 с каким-нибудь C^m-диффеоморфизмом, необходимо, чтобы $I(F) \in P^{m-1}(\lambda, \mu)$ и достаточно, чтобы $I(F) \in P^m(\lambda, \mu)$.*

Пусть $k < \infty$, $\gamma \in P^k(\lambda, \mu)$, но $\overline{\gamma \in} P^{k+1}(\lambda, \mu)$. Построим, как при доказательстве утверждения б), диффеоморфизм $F \in D^k(\lambda, \mu)$, для которого $I(F) = \gamma$. Тогда F не сопряжен гладко ни с каким диффеоморфизмом класса C^{k+2}.

Следствие 4. *При $2 \leqslant k < \infty$ существуют диффеоморфизмы $F \in D^k(\lambda, \mu)$, которые не сопряжены в классе C^1 ни с каким диффеоморфизмом класса C^{k+2}.*

В частности, при любом $k \geqslant 2$ существуют диффеоморфизмы $F \in D^k(\lambda, \mu)$, которые гладко не сопряжены ни с каким C^∞-диффеоморфизмом.

1. *Воронин С. М.* Аналитическая классификация ростков конформных отображений $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с тождественной линейной частью //— Функцион. анализ и его приложения.— 1981.— 15, № 1.— С. 1—17.
2. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы, инварианты и локальные отображения.— Киев : Наук. думка, 1979.— 170 с.

Физ.-техн. ин-т низ. температур, Харьков

Получено 29.05.84