УДК 517.928.2

В. П. Скрипник

О вырожденных уравнениях и вырождающем параметре

Как и в [1, 4], в данной работе изучается сходимость семейства решений невырожденных систем к решению предельной вырожденной системы в L^2. В [1] матрицы при производных постоянные. Здесь они зависят от времени. Правда, теоремы имеют локальный характер. В [4] изучались нелинейные системы. Но так как структура вырожденной системы простая, то ее решение понимается в обычном смысле. Уравнения в [1] и данной работе линейные, но структура вырожденной системы сложная. Поэтому ее решение понимается в обобщенном смысле, а сходимость к нему имеет иной характер. В [2, 3] изучалась поточечная сходимость. Содержание исследования примыкает к работам [5—8].

Обозначим через E множество значений параметра ε, которое принадлежит топологическому пространству, удовлетворяющему первой аксиоме отделимости. Предполагается, что $\varepsilon \in E$, $\varepsilon_0 \in \overline{E}$, $\varepsilon_0 \notin E$. Кроме того, $\max \lambda [S(A)] = \max \{\lambda_i\}$, $\min \lambda [S(A)] = \min \{\lambda_i\}$, где λ_i — характеристические корни матрицы $S(A) = (A + A^*)/2$; $K_{A(t)}[a, b]$, где $A(t)$ — измеримая матрица на $[a, b]$, — множество измеримых и ограниченных на $[a, b]$ вектор-функций $\varphi(t)$ таких, что вектор-функция $A(t)\varphi(t)$ абсолютно непрерывна; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве, а $\|\cdot\|$ — евклидова норма; I_l — единичная матрица $l \times l$.

Пусть $p + q = m$ и $v \in R^q$ — фиксированный вектор, а $u \in R^p$ любой. Рассмотрим множество $H_v = \{\mathrm{col}(u, v)\}$. Для невырожденной матрицы $\overline{Q}$

обозначим $\Xi_v^{\bar{Q}} = \bar{Q}^{-1} H_v$ и $M_q^{\bar{Q}} = \{\Xi_v^{\bar{Q}}\}$. Множество $M_q^{\bar{Q}}$ называется разбиением пространства R^m по пространству R^q, соответствующим матрице $\bar{Q}$. Очевидно $\bigcup\limits_{v \in R^q} \Xi_v^{\bar{Q}} = R^m$.

Рассмотрим на $[a, b]$ систему

$$(A(t)x)' = B(t)x + f(t), \tag{1}$$

где A и B — матрицы $m \times m$, а $x, f \in R^m$. Обозначим через ω совокупность следующих условий для системы (1): $A(t)$ — симметрическая, абсолютно непрерывна, а ее производная ограничена; p ее первых характеристических корней равны нулю, а остальные $q = m - p$ отличны от нуля; кратности корней одни и те же при всех $t \in [a, b]$; $B(t)$ непрерывна; либо $\max \lambda[S(B(t))] \leqslant -\mu$, либо $\min \lambda[S(B(t))] \geqslant \nu$, $\mu, \nu > 0$; $f(t)$ измерима и ограничена.

Решением системы (1) на $[a, b]$ называется любое множество X всех вектор-функций, удовлетворяющих следующим условиям: 1) если $x \in X$, то $x \in K_{A(t)}[a, b]$; 2) каждая вектор-функция из X удовлетворяет системе (1) почти всюду на $[a, b]$; 3) любые две вектор-функции из X различаются между собой на множестве меры нуль. Очевидно различные решения системы (1) между собой не пересекаются.

Пусть X^0 — множество всех значений, которые принимают вектор-функции, входящие в решение X, при $t = a$. Будем называть X^0 начальным условием решения X при $t=a$ и записывать $X_{t=a} = X^0$.

Лемма. *Если для матрицы $A(t)$ выполняются условия ω за исключением быть может вырожденности, то существуют такие $c \in (a, b]$ и ортогональная, абсолютно непрерывная с ограниченной производной матрица $T_c(t)$, что при $t \in [a, c]$ $A(t) = T_c^*(t)\Lambda(t)T_c(t)$, где $\Lambda(t)$ — диагональная матрица, диагональными элементами которой являются характеристические корни матрицы $A(t)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_k(t)$ — характеристические корни матрицы $A(t)$, имеющие кратности соответственно $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_k \left(\sum\limits_{i=1}^{k} m_i = m\right)$. Рассмотрим любую из k систем

$$(A(t) - \lambda_i(t) I_m)\xi = 0. \tag{2}$$

Ранг матрицы $A(t) - \lambda_i(t) I_m$ равен $m - m_i$. Рассмотрим какой-нибудь минор $(m - m_i)$-го порядка матрицы $A(t) - \lambda_i(t) I_m$, отличный от нуля при $t = a$. Обозначим его через $d_i(t)$. Существуют такие $c_i = (a, b]$ и $\gamma_i > 0$, что при $t \in [a, c_i]$ $|d_i(t)| \geqslant \gamma_i$. Обозначим $c = \min\{c_i\}$.

Решая системы (2) (см. [1]), получаем ортогональную, абсолютно непрерывную с ограниченной производной матрицу $T_c(t)$ такую, что на $[a, c]$ $A(t) = T_c^*(t)\Lambda(t)T_c(t)$. Лемма доказана.

Обозначим через $O[A(t)]$ множество абсолютно непрерывных с ограниченной производной ортогональных матриц $T_c(t)$ таких, что $A(t) = T_c^*(t)\Lambda(t)T_c(t)$, где c для каждой матрицы $T_c(t)$ свое.

Теорема 1. *Предположим, что для системы* (1) *выполняются условия ω. Тогда если $T_c(t) \in O[A(t)]$, то при любом начальном условии $X_{t=a} = \Xi_{v^0}^{T_c(a)} \in M_q^{T_c(a)}$ существует единственное решение системы* (1), *определенное на отрезке* $[a, c]$.

Доказательство. Обозначим $y = T_c(t)x$, $C(t) = T_c(t)B(t)T_c^*(t)$, $Q(t) = -T_c(t)T_c^{*\prime}(t)\Lambda(t)$, $g(t) = T_c(t)f(t)$. Тогда из системы (1) получим систему

$$(\Lambda(t)y)' = C(t)y + Q(t)y + g(t), \tag{3}$$

определенную на $[a, c]$. Пусть $y = \operatorname{col}(u, v)$, $u \in R^p$, $v \in R^q$. Тогда из системы (3) (см. [1]) следует линейная система

$$(\Lambda_1(t)v)' = \chi(t, v), \tag{4}$$

где $\Lambda_1(t)$ — диагональная матрица, $\det \Lambda_1(t) \geqslant \delta_1 > 0$. Пусть $x^0 \in \Xi_{v^0}^{T_c(a)}$, $y^0 = T_c(a)x^0$. Тогда $y^0 = \operatorname{col}(u^0, v^0)$, где $u^0 \in R^p$. При условии $v(a) = v^0$ система (4) имеет единственное решение $v(t)$ на $[a, c]$ в смысле Каратеодори. Обозначим $u(t) = \varphi(t, v(t))$. Тогда $y(t) = \operatorname{col}(u(t), v(t))$ удовлетворяет системе (3) почти всюду на $[a, c]$, а вектор-функция $\Lambda(t) y(t)$ абсолютно непрерывна.

Обозначим через Y множество вектор-функций, определенных на $[a, c]$, отличающихся от $y(t)$ на множестве меры нуль и таких, что если $\tilde{y} \in Y$, то произведение $\Lambda(t)\tilde{y}(t)$ абсолютно непрерывно. Тогда множество $X = T_c^*(t) Y$ есть решение системы (1) на $[a, c]$, удовлетворяющее условию $X_{t=a} = \Xi_{v^0}^{T_c(a)}$. Рассуждая от противного, убеждаемся, что решение X единственно. Теорема 1 доказана.

Можно показать, что все матрицы из $O[A(t)]$ осуществляют одно и то же разбиение пространства R^m.

Рассмотрим на $[a, b]$ семейство систем

$$A(t, \varepsilon) x' = B(t, \varepsilon) x + f(t, \varepsilon), \tag{5}$$

где $A(t, \varepsilon)$ и $B(t, \varepsilon)$ — матрицы $m \times m$, а $x, f \in R^m$. Обозначим через ω_1 совокупность следующих условий для систем (5): $A(t, \varepsilon)$ невырожденные, симметрические, абсолютно непрерывные, а их производные ограничены; семейство $\{A(t, \varepsilon)\}$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ сходится равномерно; $\hat{A}(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} A(t, \varepsilon)$ имеет непрерывную производную; семейство $\{A'(t, \varepsilon)\}$ сходится в $L^2[a, b]$ к $\hat{A}'(t)$; первый характеристический корень $\hat{A}(t)$ кратности p равен нулю, а остальные отличны от нуля; матрицы $A(t, \varepsilon)$ и $\hat{A}(t)$ имеют по k характеристических корней; пусть $\lambda_1(t, \varepsilon), \lambda_2(t, \varepsilon), \ldots, \lambda_k(t, \varepsilon)$ — характеристические корни матриц $A(t, \varepsilon)$, а $\hat{\lambda}_1(t), \hat{\lambda}_2(t), \ldots, \hat{\lambda}_k(t)$ — характеристические корни матрицы $\hat{A}(t)$; тогда при любом ε кратности $\lambda_i(t, \varepsilon)$ равны кратностям $\hat{\lambda}_i(t)$, $i = \overline{1, k}$; кратности корней не зависят от t; семейства $\{\lambda_i(t, \varepsilon)\}$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ равномерно сходятся к $\lambda_i(t)$; семейство $\{\lambda_1(t, \varepsilon)\}$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ $L^1[a, b]$ сходится к нулю; $B(t, \varepsilon)$ и $f(t, \varepsilon)$ измеримы и ограничены; семейство $\{B(t, \varepsilon)\}$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ в $L^2[a, b]$ сходится к $\hat{B}(t)$, а $\{f(t, \varepsilon)\}$ к $\hat{f}(t)$, где $\hat{B}(t)$ — непрерывна, а $\hat{f}(t)$ измерима и ограничена.

Рассмотрим вырожденную систему

$$(\hat{A}(t) x)' = (\hat{A}'(t) + \hat{B}(t)) x + \hat{f}(t). \tag{6}$$

Определение. Пусть X — решение системы (6) на $[a, b]$ и $x^0 \in X^0 = X_{t=a}$. Будем говорить, что семейство решений $\{x(t, \varepsilon)\}$ систем (5) такое, что $x(a, \varepsilon) = x^0$, при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ сходится в $L^2[a, b]$ к X, если оно сходится в $L^2[a, b]$ к любой вектор-функции из X.

Теорема 2. *Предположим, что для семейства систем* (5) *выполняются условия* ω_1. *Тогда существуют такое* $c \in (a, b]$ *и такое семейство* $\{T_c(t, \varepsilon)\}$, $T_c(t, \varepsilon) \in O[A(t, \varepsilon)]$, *которое сходится равномерно на* $[a, c]$. *При этом* $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} T_c(t, \varepsilon) = \hat{T}_c(t) \in O[\hat{A}(t)]$. *Если, кроме того,* $\max \lambda [S(B(t))] \leqslant -\mu$, $\max \lambda [S(\hat{A}'(t) + \hat{B}(t))] \leqslant -\mu_1$ $(\mu, \mu_1 > 0)$, *то любое равномерно ограниченное семейство решений* $\{x(t, \varepsilon)\}$ *систем* (5) *такое, что* $x(a, \varepsilon) = x^0 \in \Xi_{v^0}^{\hat{T}_c(a)} \in M_q^{\hat{T}_c(a)}$, *при* $\varepsilon \to \varepsilon_0$ *в* $L^2[a, c]$ *сходится к решению системы* (6), *удовлетворяющему условию*

$$X_{t=a} = \Xi_{v^0}^{\hat{T}_c(a)}.$$

Доказательство. Для любого $i=\overline{1, k}$ рассмотрим семейство систем

$$(A(t, \varepsilon)-\lambda_i(t, \varepsilon) I_m)\xi=0. \tag{7}$$

Так как при $\varepsilon\to\varepsilon_0$ семейство $\{A(t, \varepsilon)-\lambda_i(t, \varepsilon) I_m\}$ сходится к $\hat{A}(t)-\hat{\lambda}_i(t) I_m$ равномерно, то, решая системы (7), можно показать, что существует на $[a, c]$, $c\in(a, b]$, матрица $T_c(t, \varepsilon)\in O[A(t, \varepsilon)]$. Семейство $\{T(t, \varepsilon)\}$ при $\varepsilon\to\varepsilon_0$ сходится равномерно к матрице $\hat{T}_c(t)\in O[\hat{A}(t)]$.

Пусть $\{x(t, \varepsilon)\}$—равномерно ограниченное семейство решений систем (5) такое, что $x(a, \varepsilon)=x^0\in \Xi_{v^0}^{\hat{T}_c(a)}\in M_q^{\hat{T}_c(a)}$ и пусть $\bar{x}\in X$, где X—решение системы (6) на $[a, c]$, удовлетворяющее условию $X_{t=a}=\Xi_{v^0}^{\hat{T}_c(a)}$. От противного существует такая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, сходящаяся к ε_0, и такое $\delta>0$, что

$$\int_a^c \|x(\tau, \varepsilon_n)-\bar{x}(\tau)\|^2 d\tau\geqslant\delta.$$

Почти всюду на $[a, c]$ выполняются равенства

$$A(t, \varepsilon_n) x'(t, \varepsilon_n)=B(t, \varepsilon_n) x(t, \varepsilon_n)+f(t, \varepsilon_n). \tag{8}$$

Обозначим $y(t, \varepsilon_n)=T_c(t, \varepsilon_n) x(t, \varepsilon_n)$, $C(t, \varepsilon_n)=T_c(t, \varepsilon_n) B(t, \varepsilon_n)\times T_c^*(t, \varepsilon_n)$, $F(t, \varepsilon_n)=T_c(t, \varepsilon_n) f(t, \varepsilon_n)$, $Q(t, \varepsilon_n)=-\Lambda(t, \varepsilon_n) T_c(t, \varepsilon_n)\times T_c^{*'}(t, \varepsilon_n)$. Тогда из (8) получим равенства

$$\Lambda(t, \varepsilon_n) y'(t, \varepsilon_n)=C(t, \varepsilon_n) y(t, \varepsilon_n)+Q(t, \varepsilon_n) y(t, \varepsilon_n)+F(t, \varepsilon_n). \tag{9}$$

Пусть $y(t, \varepsilon_n)=\mathrm{col}(u(t, \varepsilon_n), v(t, \varepsilon_n))$, где $u(t, \varepsilon_n)\in R^p$, $v(t, \varepsilon_n)\in R^q$. Тогда в силу (9) будем иметь

$$\Lambda_0(t, \varepsilon_n) u'(t, \varepsilon_n)=D(t, \varepsilon_n) u(t, \varepsilon_n)+E(t, \varepsilon_n) v(t, \varepsilon_n)+ \\ +P(t, \varepsilon_n) x(t, \varepsilon_n)+\varphi(t, \varepsilon_n), \tag{10}$$

где $\Lambda_0(t, \varepsilon_n)=\lambda_1(t, \varepsilon_n) I_p$, $D(t, \varepsilon_n)$ — матрицы $p\times p$, $E(t, \varepsilon_n)-p\times q$, $P(t, \varepsilon_n)-p\times m$, $\varphi(t, \varepsilon_n)\in R^p$; $\lim\limits_{\varepsilon_n\to\varepsilon_0} P(t, \varepsilon_n)=0$ равномерно на $[a, c]$.

В силу (9) из последовательности $\{v(t, \varepsilon_n)\}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся равномерно на $[a, c]$. Для простоты запишем ее в виде $\{v(t, \varepsilon_n)\}$. Обозначим $\hat{v}(t)=\lim\limits_{\varepsilon_n\to\varepsilon_0} v(t, \varepsilon_n)$. Обозначим в $L^2[a, c]$ пределы $\hat{D}(t)=\lim\limits_{\varepsilon_n\to\varepsilon_0} D(t, \varepsilon_n)$, $\hat{E}(t)=\lim\limits_{\varepsilon_n\to\varepsilon_0} E(t, \varepsilon_n)$, $\hat{\varphi}(t)=\lim\limits_{\varepsilon_n\to\varepsilon_0}\varphi(t, \varepsilon_n)$. Для некоторых $\bar{\delta}$, $\bar{\mu}>0$ $\det\hat{D}(t)\geqslant\bar{\delta}$, $\max\lambda[S(\hat{D}(t))]\leqslant-\bar{\mu}$.

Рассмотрим измеримую и ограниченную на $[a, c]$ вектор-функцию $\hat{u}(t)=-\hat{D}^{-1}(t)\hat{\Phi}(t)$, где $\hat{\Phi}(t)=\hat{E}(t)\hat{v}(t)+\hat{\varphi}(t)$. В силу теоремы Фреше существует последовательность вектор-полиномов $\{\chi_n(t)\}$, сходящаяся почти всюду на $[a, c]$ к $\hat{u}(t)$, причем $\|\chi_n(t)\|\leqslant\sup\|\hat{u}(t)\|$. Из $\{\varepsilon_n\}$ извлечем подпоследовательность, которую запишем в виде $\{\varepsilon_n\}$, такую, что $\lambda_1(t, \varepsilon_n)\chi_n'(t)$ сходится в $L^2[a, c]$ к нулю.

Полагая $w_n(t)=u(t, \varepsilon_n)-\chi_n(t)$, из (10) получим равенства

$$\lambda_1(t, \varepsilon_n) w_n'(t)=\hat{D}(t) w_n(t)+h_n(t), \tag{11}$$

где $\{h_n(t)\}$ в $L^2[a, c]$ сходится к нулю. Умножая (11) скалярно на $w_n(t)$ и интегрируя на $[a, c]$, убеждаемся, что $\{w_n(t)\}$ в $L^2[a, c]$ сходится к нулю. Так как $\|u(t, \varepsilon_n)-\hat{u}(t)\|\leqslant\|u(t, \varepsilon_n)-\chi_n(t)\|+\|\chi_n(t)-\hat{u}(t)\|$, то $\{x(t, \varepsilon_n)\}$

в $L^2[a, c]$ сходится к $\hat{x}(t) = \hat{T}_c^*(t)\hat{y}(t)$, где $\hat{y}(t) = \mathrm{col}(\hat{u},(t), \hat{v}(t))$. Переходя к пределу на $[a, c]$ при $\varepsilon_n \to \varepsilon_0$ в

$$A(t, \varepsilon_n)x(t, \varepsilon_n) = A(a, \varepsilon_n)x^0 + \int_a^t (A'(\tau, \varepsilon_n) + $$

$$+ B(\tau, \varepsilon_n))x(\tau, \varepsilon_n)d\tau + \int_a^t f(\tau, \varepsilon_n)d\tau,$$

убеждаемся, что $\hat{x} \in X$ и, следовательно, $\{x(t, \varepsilon)\}$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ в $L^2[a, c]$ сходится к X. Теорема 2 доказана.

Утверждение теоремы 2 справедливо и в случае, когда $\min \lambda [S(\hat{B}(t))] \geqslant \geqslant \nu > 0$, $\min \lambda [S(\hat{A}'(t) + \hat{B}(t))] \geqslant \nu_1 > 0$.

Теорема 2 будет справедливой, если требование $x(a, \varepsilon) = x^0 \in \Xi_{v^0}^{\hat{T}_c(a)}$ заменить более общим $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} x(a, \varepsilon) = x^0 \in \Xi_{v^0}^{\hat{T}_c(a)}$.

Пример. На $[0, \pi]$ рассмотрим семейство систем второго порядка

$$A(t, \varepsilon)x' = B(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon), \tag{12}$$

где $\varepsilon \in E = (0, 1]$, $\varepsilon_0 = 0$,

$$A(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon\cos^2 t + a\sin^2 t & \dfrac{\varepsilon - a}{2}\sin 2t \\ \dfrac{\varepsilon - a}{2}\sin 2t & \varepsilon\sin^2 t + a\cos^2 t \end{pmatrix},$$

$$B(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -a - \left(1 + \dfrac{a - \varepsilon}{2}\right)\sin 2t & \cos 2t - \varepsilon\cos^2 t - a\sin^2 t \\ \cos 2t + \varepsilon\sin^2 t + a\cos^2 t & -a + \left(1 - \dfrac{\varepsilon - a}{2}\right)\sin 2t \end{pmatrix},$$

$$f(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t, \varepsilon)\cos t - \varphi_2(t, \varepsilon)\sin t \\ \varphi_1(t, \varepsilon)\sin t + \varphi_2(t, \varepsilon)\cos t \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(t, \varepsilon) = -t - 1 - \varepsilon + \exp\left(-\frac{\prod\limits_{k=1}^n |t - 1/k|}{\varepsilon}\right)\left(a - \left(\prod_{k=1}^n |t - 1/k|\right)'\right).$$

$$\varphi_2(t, \varepsilon) = -\exp\left(-\frac{\prod\limits_{k=1}^n |t - 1/k|}{\varepsilon}\right) + at + a\varepsilon + 2a.$$

$a > 0$, $A(t, \varepsilon)$ невырожденные, симметрические, абсолютно непрерывные, а их производные ограниченные; $B(t, \varepsilon)$ непрерывные, $f(t, \varepsilon)$ измеримые и ограниченные, $A(t, \varepsilon) = T^*(t)\Lambda(\varepsilon)T(t)$, где $T(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$, $\Lambda(\varepsilon) = $ $= \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $T(t) \in O[A(t, \varepsilon)]$.

Существуют в $L^2[0, \pi]$ пределы $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} A(t, \varepsilon) = \hat{A}(t)$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} B(t, \varepsilon) = \hat{B}(t)$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(t, \varepsilon) = \hat{f}(t)$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} A'(t, \varepsilon) = \hat{A}'(t)$, где

$$\hat{A}(t) = \begin{pmatrix} a\sin^2 t & -\frac{a}{2}\sin 2t \\ -\frac{a}{2}\sin 2t & a\cos^2 t \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}(t) = \begin{pmatrix} -a-(1+a/2)\sin 2t & \cos 2t - a\sin^2 t \\ \cos 2t + a\cos^2 t & -a+(1+a/2)\sin 2t \end{pmatrix},$$

$$\hat{f}(t) = \begin{pmatrix} -(t+1)\cos t - \sin t\,(at+2a) \\ -(t+1)\sin t + \cos t\,(at+2a) \end{pmatrix}.$$

$\hat{A}(t)$, $\hat{B}(t)$ и $\hat{f}(t)$ непрерывны. Рассмотрим вырожденную систему

$$(\hat{A}(t)x)' = (\hat{A}'(t) + \hat{B}(t))x + \hat{f}(t). \tag{13}$$

Здесь $\hat{A}(t) = \hat{T}^*(t)\hat{\Lambda}\hat{T}(t)$, $\hat{T}(t) = T(t)$, $\hat{\Lambda} = \operatorname{diag}(0, a)$, $\hat{T}(0) = \operatorname{diag}(1, 1)$, $\Xi_{v^0}^{\hat{T}(0)} = \{u, v^0\}$, где $u \in R^1$ любое, а $v^0 \in R^1$ фиксировано. Разбиением пространства R^2, соответствующим матрице $\hat{T}(0)$, является множество, образованное множествами $\{(u, v^0)\}$ при $v^0 \in R^1$. Так как $\det S(\hat{B}(t)) = a^2 - (1 + a/2)^2$, $\det S(\hat{A}'(t) + \hat{B}(t)) = a^2 - (1 - a/2)^2$, то при $a > 2$ существуют числа μ, $\mu_1 > 0$ такие, что $\max\lambda[S(\hat{B}(t))] \leqslant -\mu$, $\max\lambda]S(\hat{A}'(t) + \hat{B}(t))] \leqslant -\mu_1$. Поэтому при любом начальном условии $X_{t=0} = \Xi_{v^0}^{\hat{T}(0)}$ существует единственное решение на $[0, \pi]$ системы (13). При начальном условии $X_{t=0} = \Xi_1^{\hat{T}(0)}$ решением системы (13) является множество вектор-функций: $X = \{(\cos t\gamma(t) - \sin t\,(t+1),\ \sin t\gamma(t) + \cos t\,(t+1))\}$, где $\gamma(t)$ — любая ограниченная, почти всюду равная нулю функция.

Любое равномерно ограниченное на $[0, \pi]$ семейство решений $\{x(t, \varepsilon)\}$ систем (12) такое, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x(0, \varepsilon) = x^0 \in \Xi_{v^0}^{\hat{T}(0)}$, при $\varepsilon \to 0$ сходится в $L^2[0, \pi]$ к решению системы (13), удовлетворяющему условию $X_{t=0} = \Xi_{v^0}^{\hat{T}(0)}$. Семейство

$$\left\{\left(\cos t\exp\left(-\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}|t-1/k|}{\varepsilon}\right) - \sin t\,(t+1+\varepsilon),\right.\right.$$
$$\left.\left.\sin t\exp\left(-\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}|t-1/k|}{\varepsilon}\right) + \cos t\,(t+1+\varepsilon)\right)\right\} \tag{14}$$

является равномерно ограниченным на $[0, \pi]$ семейством решений систем (12), удовлетворяющих начальным условиям $x(0, \varepsilon) = \left(\exp\left(-\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}1/k}{\varepsilon}\right), 1+\varepsilon\right)$. Так как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x(0, \varepsilon) = (0, 1) \in \Xi_1^{\hat{T}(0)}$, то семейство (14) при $\varepsilon \to 0$ сходится в $L^2[0, \pi]$ к решению X системы (13).

Если вектор-функция удовлетворяет системе (13) всюду на $[0, \pi]$, а произведение матрицы $\hat{A}(t)$ на нее абсолютно непрерывно, то эта вектор-функция будет классическим решением системы (13). В частности, таким классическим решением, удовлетворяющим начальному условию $x(0) = (0, 1)$, будет вектор-функция $\hat{x}(t) = (-\sin t\,(t+1),\ \cos t\,(t+1))$. Но семейство решений (14) невырожденных систем (12) при $\varepsilon \to 0$ сходится к $\hat{x}(t)$ не во всех точках $[0, \pi]$, а в $L^2[0, \pi]$.

В силу того что матрица $\hat{A}(t)$ вырождена, не существует классических решений системы (13) ни при одном начальном условии $\hat{x}(0) = (u, 1)$, если $u \neq 0$. Но ведь $\{(u, 1)\} = \Xi_1^{\hat{T}(0)}$. Как показано выше, при начальном условии $X_{t=0} = \Xi_1^{\hat{T}(0)}$ существует и притом единственное обобщенное решение системы (13) на $[0, \pi]$.

Если рассмотреть системы (12) и (13), например, на $[\pi/4, \pi]$, то в этом случае $\hat{T}(\pi/4) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Тогда $\Xi_{v^0}^{\hat{T}(\pi/4)} = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} u - \frac{\sqrt{2}}{2} v^0, \frac{\sqrt{2}}{2} u + \frac{\sqrt{2}}{2} v^0\right)\right\}$, где $u \in R^1$ любое, а $v^0 \in R^1$ фиксировано. При любом начальном условии $X_{t=\pi/4} = \Xi_{v^0}^{\hat{T}(\pi/4)}$ существует единственное решение системы (13) на $[\pi/4, \pi]$.

1. *Скрипник В. П.* О вырожденных системах и вырождающем параметре // Дифференц. уравнения.— 1983.— **19**, № 9.— С. 1527—1534.
2. *Скрипник В. П.* Вырождающий параметр и вырожденные линейные уравнения // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 6.— С. 791—796.
3. *Скрипник В. П.* Линейные уравнения с вырождающим параметром // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1983.— № 6.— С. 16—19.
4. *Скрипник В. П.* Нелинейные системы с малой матрицей при производной // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 1.— С. 73—78.
5. *Тихонов А. Н.* Системы, содержащие малые параметры при старших производных // Мат. сб.— 1952.— **31**, № 3.— С. 575—586.
6. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.— 272 с.
7. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.— 106 с.
8. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.— М.: Наука, 1975.— 247 с.

Моск. лесотехн. ин-т

Получено 07.05.84,
после доработки — 16.01.86