УДК 517.958

М. Л. ГОРБАЧУК, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев),
Б. И. КНЮХ, инж. (Ин-т техн. теплофизики АН Украины, Киев)

Обратная задача для эллиптического уравнения Штурма — Лиувилля в гильбертовом пространстве

Для дифференциально-операторного уравнения второго порядка эллиптического типа ставится и решается задача о нахождении n векторных параметров в правой части уравнения, при которых решение задачи Дирихле принимает заданные значения в n внутренних точках.

Для диференціально-операторного рівняння другого порядку еліптичного типу ставиться і розв'язується задача про знаходження n векторних параметрів у правій частині рівняння, при яких розв'язок задачі Діріхле приймає певні значення в n внутрішніх точках.

В настоящей статье изучается разрешимость краевой задачи для дифференциального уравнения с неограниченным операторным коэффициентом, содержащего векторные параметры, в которой наличие параметров приводит к дополнительным условиям. Рассматриваемая задача относится к обратным, некорректно поставленным задачам, одним из важнейших аспектов исследования которых является выделение класса данных, на котором задача становится корректной.

1. Постановка задачи. Прежде чем поставить задачу, приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $D[0, T]$, $0 < T < \infty$,— пространство бесконечно дифференцируемых обращающихся вместе со своими производными в нуль на концах 0 и T отрезка $[0, T]$ скалярных функций, H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Обозначим через $D'(H, [0, T])$ пространство линейных непрерывных отображений из $D[0, T]$ в H (векторнозначных распределений) [1]. Рассмотрим на $[0, T]$ уравнение

$$-u'' + A^2u = \omega, \tag{1}$$

где A — самосопряженный неотрицательный оператор в H, ω — заданное распределение класса $D'(H, [0, T])$. Обобщенным решением уравнения (1) назовем распределение $u \in D'(H, [0, T])$ такое, что $\forall \varphi \in D[0, T]$ и $\forall g \in \mathcal{D}(A^2)$ выполняется равенство

$$-(u[\varphi''], g) + (u[\varphi], A^2g) = (\omega[\varphi], g).$$

Здесь и далее $\mathcal{D}(\cdot)$ — область определения оператора, а через $\cdot\,[\varphi]$ обозначено действие распределения на основную функцию $\varphi(t)$.

Пусть теперь ω в (1) имеет вид

$$\omega = \omega(t) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(t)\, p_k + f(t), \tag{2}$$

где $\Phi_k(t)$, $f(t)$ — заданные на $[0, T]$ соответственно скалярные функции и вектор-функция со значениями в H, $H \ni p_k$ — векторные параметры,

$n \in \mathbb{N}$. Пусть на $(0, T)$ задано n различных точек $t_1, \ldots, t_n$. Рассмотрим следующую задачу: найти векторы $p_1, \ldots, p_n \in H$ и обобщенное решение u уравнения (1) с правой частью (2), совпадающее с сильно непрерывной в H на $[0, T]$ вектор-функцией $u(t)$, удовлетворяющей условиям Дирихле

$$u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T \tag{3}$$

и дополнительным условиям

$$u(t_k) = u_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где u_0, u_T, u_k — заданные векторы из H. Такую совокупность $\{p_1, \ldots, p_n; u\}$ будем называть решением задачи (1) — (4).

Подобные задачи для различных классов уравнений в гильбертовом и банаховом пространствах изучались многими авторами (см. [2—6] и цитированную там литературу).

2. Существование и единственность решений. Относительно функций $\Phi_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, сделаем следующие предположения:

1°. $\Phi_k(t) \in C[0, T]$;

2°. Функция $\Phi_k(t)$ в некоторой окрестности точки t_i, $i = 1, \ldots, n$, допускает представление $\Phi_k(t) = |t - t_i|^{m_{ik}} \varphi_{ik}(t)$, где числа $m_{ik} \geqslant 0$, а функции $\varphi_{ik}(t)$ в соответствующих окрестностях являются непрерывными, $\varphi_{ik}(t_i) \neq 0$ и при $t \to t_i$ $\varphi_{ik}(t) = \varphi_{ik}(t_i) + O(t - t_i)$.

Положим

$$G(t, s, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} \lambda (T - t) \operatorname{sh} \lambda s}{\lambda sh \lambda T}, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \\ \dfrac{\operatorname{sh} \lambda t \operatorname{sh} \lambda (T - s)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda T}, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T, \end{cases}$$

при $\forall \lambda > 0$, и $G(t, s, 0) = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} G(t, s, \lambda)$. Спектр оператора A обозначим через $\sigma(A)$, норму графика оператора A^m $(m > 0)$ — через $\|\cdot\|_{\Gamma(A^m)}$: $\|h\|_{\Gamma(A^m)} = (\|h\|^2 + \|A^m h\|^2)^{1/2}$, $h \in \mathcal{D}(A^m)$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $n = 1$ и функция $\Phi_1(t)$ кроме 1°, 2° удовлетворяет условию*

$$а) \int_0^T G(t_1, s, \lambda) \Phi_1(s) \, ds \neq 0, \quad \forall \lambda \in \sigma(A);$$

а вектор-функция $f(t)$ для почти всех $t \in [0, T]$ принимает значения в $\mathcal{D}(A^{m_{11}+1/2})$ и удовлетворяет условию

$$б) \int_0^T \|f(t)\|^2_{\Gamma(A^{m_{11}+1/2})} dt < \infty.$$

Тогда для произвольных $u_0, u_T \in H$, $u_1 \in \mathcal{D}(A^{m_{11}+1/2})$ существует единственное решение задачи (1) — (4).

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 2$, функции $\Phi_k(t)$ удовлетворяют условиям 1°, 2° и образуют систему Чебышева на интервале $(0, T)$, а вектор-функция $f(t)$ для почти всех $t \in [0, T]$ принимает значения в $\mathcal{D}(A^{1/2})$ и удовлетворяет условию*

$$в) \int_0^T \|f(t)\|^2_{\Gamma(A^{1/2})} dt < \infty.$$

Тогда для произвольных $u_0, u_T \in H$, $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{D}(A^2)$ существует единственное решение задачи (1) — (4).

Доказательство. Известно [7], что при условиях 1°, в) $\forall u_0$,

$u_T \in H$ и $\forall p_1, \ldots, p_n \in H$ существует единственное обобщенное решение $u \in D'(H, [0, T])$ задачи (1)—(3), совпадающее с сильно непрерывной в H на $[0, T]$ вектор-функцией

$$u(t) = \frac{\operatorname{sh} A(T-t)}{\operatorname{sh} AT} u_0 + \frac{\operatorname{sh} At}{\operatorname{sh} AT} u_T + \int_0^T G(t, s, A) \left[\sum_{k=1}^n \Phi_k(s) p_k + f(s)\right] ds. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получаем систему линейных векторных уравнений с операторными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^n w_{ik}(A) p_k = q_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где обозначено

$$w_{ik}(A) = \int_0^T G(t_i, s, A) \Phi_k(s) ds,$$

$$q_i = u_i - \frac{\operatorname{sh} A(T-t_i)}{\operatorname{sh} AT} u_0 - \frac{\operatorname{sh} At_i}{\operatorname{sh} AT} u_T - \int_0^T G(t_i, s, A) f(s) ds.$$

Покажем, что (6) имеет единственное решение $p_1, \ldots, p_n \in H$.

Рассмотрим матрицу-функцию $\| w_{ik}(\lambda) \|_1^n$, элементами которой являются скалярные функции, посредством которых образованы операторные коэффициенты в (6). В силу того, что $\forall \lambda \geqslant 0$ функция $G(t, s, \lambda)$ является осцилляционным ядром [8], а функции $\Phi_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, образуют систему Чебышева на $(0, T)$, легко показать, что $\forall \lambda \geqslant 0$ определитель $\Delta(\lambda) = | w_{ik} |_1^n \neq 0$. Отсюда в случае выполнения включений

$$q_i \in \mathscr{D}(\Delta_{ik}(A) [\Delta(A)]^{-1}, \quad k, i = 1, \ldots, n \tag{7}$$

($\Delta_{ik}(\lambda)$ — алгебраические дополнения элементов $w_{ik}(\lambda)$ матрицы), будет вытекать однозначная разрешимость системы (6).

Докажем включения (7). Для этого оценим асимптотику при $\lambda \to \infty$ функций $w_{ik}(\lambda)$. Имеем

$$w_{ik}(\lambda) = \int_0^T G(t_i, s, \lambda) \Phi_k(s) ds = \int_0^{t_i} \frac{\operatorname{sh} \lambda(T-t_i) \operatorname{sh} \lambda s}{\lambda \operatorname{sh} \lambda T} \Phi_k(s) ds +$$

$$+ \int_{t_i}^T \frac{\operatorname{sh} \lambda t_i \operatorname{sh} \lambda(T-s)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda T} \Phi_k(s) ds. \tag{8}$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части (8). Зафиксируем $\delta \in (0, t_i)$. Если $s \in [\delta, t_i]$, то при $\lambda \to \infty$

$$\frac{\operatorname{sh} \lambda(T-t_i) \operatorname{sh} \lambda s}{\lambda \operatorname{sh} \lambda T} = \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda(t_i - s)} [1 + o(\lambda^{-m})], \quad \forall m > 0.$$

Если же $s \in [0, \delta]$, то при $\lambda \to \infty$

$$\frac{\operatorname{sh} \lambda(T-t_i) \operatorname{sh} \lambda s}{\lambda \operatorname{sh} \lambda T} = s \cdot o(\lambda^{-m}), \quad \forall m > 0.$$

Причем, обе оценки равномерны по параметру s. Принимая во внимание эти оценки, а также условие 2°, воспользовавшись леммой Ватсона (см., например, [8, 9]), можно заключить, что

$$\int_0^{t_i} \frac{\operatorname{sh} \lambda(T-t_i) \operatorname{sh} \lambda s}{\lambda \operatorname{sh} \lambda T} \Phi_k(s) ds = \left(\int_0^{\delta} + \int_0^{t_i}\right) \frac{\operatorname{sh} \lambda(T-t_i) \operatorname{sh} \lambda s}{\lambda \operatorname{sh} \lambda T} \Phi_k(s) ds =$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma(m_{ik}+1)\varphi_{ik}(t_i)\lambda^{-(m_{ik}+2)} + O(\lambda^{-(m_{ik}+3)}), \quad \lambda \to \infty.$$

Аналогично для второго интеграла в (8):

$$\int_{t_i}^{T} \frac{\operatorname{sh}\lambda t_i \operatorname{sh}\lambda(T-s)}{\lambda \operatorname{sh}\lambda T}\Phi_k(s)\,ds = \frac{1}{2}\Gamma(m_{ik}+1)\varphi_{ik}(t_i)\lambda^{-(m_{ik}+2)} + O(\lambda^{-(m_{ik}+3)}), \quad \lambda \to \infty.$$

Отсюда

$$w_{ik}(\lambda) = \Gamma(m_{ik}+1)\varphi_{ik}(t_i)\lambda^{-(m_{ik}+2)} + O(\lambda^{-(m_{ik}+3)}), \quad \lambda \to \infty. \tag{9}$$

Из (9) легко получить, что при $\lambda \to \infty$

$$\Delta(\lambda) \sim |\Phi_k(t_i)|_1^n \lambda^{-2n}, \quad \Delta_{ik}(\lambda) = O(\lambda^{-2n+2}).$$

Поэтому $\Delta_{ik}(\lambda)[\Delta(\lambda)]^{-1} = O(\lambda^2)$ при $\lambda \to \infty$. Справедливы включения

$$\mathcal{D}(A^2) \subseteq \mathcal{D}(\Delta_{ik}(A)[\Delta(A)]^{-1}).$$

Но из условий теоремы и вида q_i следует, что $q_i \in \mathcal{D}(A^2)$, $i = 1, \ldots, n$. Этим включения (7) доказаны, что и завершает доказательство теоремы. Единственным решением задачи (1)—(4) является совокупность $\{p_1, \ldots, p_n; u(t)\}$, где

$$p_k = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ik}(A)[\Delta(A)]^{-1} q_i, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

а $u(t)$ представляется в виде (5).

Теорема 1 доказывается точно так же.

В заключение отметим, что из формул (5), (10) для решения задачи (1)—(4) в случае $n \geqslant 2$ легко получить оценки

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\| \leqslant c_0(T)\rho(u_0, u_T, u_1, \ldots, u_n, f),$$

$$\|p_k\| \leqslant c_k(T)\rho(u_0, u_T, u_1, \ldots, u_n, f), \quad k = 1, \ldots n,$$

где

$$\rho(u_0, u_T, u_1, \ldots, u_n, f) = \|u_0\| + \|u_T\| + \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|_{\Gamma(A^2)} + \int_0^T \|f(t)\|^2_{\Gamma(A^{1/2})} dt,$$

а $c_0(T)$, $c_k(T)$ — зависящие только от T постоянные.

Аналогичные оценки, с очевидными изменениями, справедливы и в случае $n = 1$.

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 284 с.
2. *Абдулкеримов Л. Ш.* Об определении правых частей равномерно-корректных эволюционных уравнений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук.— 1987.— 8, № 1.— С. 33—36.
3. *Прилепко А. И., Орловский Д. Г.* Обратные задачи для эволюционных полулинейных уравнений // Докл. АН СССР.— 1984.— 277, № 4.— С. 799—803.
4. *Прилепко А. И., Орловский Д. Г.* О полугрупповом подходе к задаче определения неоднородного члена в эволюционных уравнениях // Там же.— 1989.— 305, № 5.— С. 1045—1049.
5. *Эйдельман Ю. С.* Двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения с параметром // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1983.— № 4.— С. 15—18.
6. *Rundell W.* Determination of an unknown nonhomogeneous term in a linear partial differential equations from the over specified boundary data // Appl. Anal.— 1980.— 10, N 3.— P. 231—242.
7. *Федорова Л. Б.* Граничные значения решений неоднородных дифференциально-операторных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1983.— № 7.— С. 22—25.
8. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осциляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.— М. Л. : Гостехтеоретиздат, 1950.— 359 с.
9. *Федорюк М. В.* Асимптотика : Интегралы и ряды.— М. : Наука, 1987.— 544 с.

Получено 18.06.91