УДК 517. 51

В. О. Лівінський, асп. (Ін-т математики НАН України, Київ)

НОРМАЛЬНІСТЬ В ІСТОТНОМУ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ОПЕРАТОРІВ У ТЕНЗОРНОМУ ДОБУТКУ ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРІВ*

Some general tests for essentiality of domains of spectral integrals are established. On this basis, some classes of operators in tensor products of Hilbert spaces are proved to be essentially normal.

З'ясовуються деякі загальні ознаки істотності областей визначення спектральних інтегралів. На основі цього встановлюється нормальність в істотному певних класів операторів в тензорних добутках гільбертових просторів.

Тензорним добутком розкладів одиниці — природним узагальненням добутку мір — користувався М. А. Наймарк в роботі [1] ще в 1939 р. Однак далі широкого застосування це поняття не знайшло. Активно вивчався звичайний добуток розкладів одиниці і розвивалась пов'язана з ним техніка дослідження операторів (див., наприклад, [2]). В даній роботі показано, що техніка, пов'язана з тензорними добутками розкладів одиниці, теж заслуговує уваги і може успішно застосовуватись до вивчення умов самоспряженості (нормальності) в істотному деяких класів операторів у тензорних добутках гільбертових просторів.

У даній роботі встановлюються деякі загальні ознаки істотності областей визначення спектральних інтегралів. Далі вони переносяться на випадок тензорних добутків розкладів одиниці і застосовуються до деяких спеціальних класів спектральних інтегралів. Одержано зручні формули операторного числення в тензорних добутках гільбертових просторів.

1. Нехай $(X, \mathfrak{F})$ — вимірний простір, H — сепарабельний гільбертів простір, $E\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{L}(H)$ — розклад одиниці. Виразом $\mathfrak{L}(H)$ тут і далі позначено простір лінійних неперервних операторів, що діють в H.

Лема 1. *Нехай $f\colon X \to \mathbb{C}$ — $\mathfrak{F}$-вимірна функція, $B = \int_X f(x)dE(x)$ і щільний в H многовид $M \subseteq \mathrm{Dom}(B)$ витримує дію проектора $E(\alpha)$ для всіх $\alpha \in \mathfrak{F}$. Тоді M — істотна область визначення оператора B.*

Доведення. Нехай $A = (B \restriction M)^{\sim}$ — замикання звуження оператора B на множину M, $\alpha_n = \{x \in X \,|\, |f(x)| \le n\}$, $L_n = \mathrm{Ran}(E(\alpha_n)) \subseteq \mathrm{Dom}(B)$, $n \in \mathbb{N}$. З щільності M в H випливає щільність $E(\alpha_n)M$ в L_n, а тому — щільність $M \cap L_n$ в L_n. Крім того, для $\xi \in L_n$ маємо $\|B\xi\| \le n\|\xi\|$, тому $L_n \subseteq$ $\subseteq \mathrm{Dom}(A)$. Для $\xi \in \mathrm{Dom}(B)$ існують границі:

$$\lim_{n\to\infty} E(\alpha_n)\xi = \xi, \quad \lim_{n\to\infty} AE(\alpha_n)\xi = \lim_{n\to\infty} BE(\alpha_n)\xi = \lim_{n\to\infty} E(\alpha_n)B\xi = B\xi.$$

Отже, $\xi \in \mathrm{Dom}(A)$ і $A\xi = B\xi$.

Іншими словами, спектральний інтеграл не має власних замкнених звужень, область визначення яких щільна і витримує дію розкладу одиниці для всіх вимірних множин.

Сукупність $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$ називатимемо системою твірних σ-алгебри $\mathfrak{F}$, якщо найменшою σ-алгеброю, що містить $\mathfrak{L}$, є $\mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Нехай $f\colon X \to \mathbb{C}$ — $\mathfrak{F}$-вимірна функція, $B = \int_X f(x)dE(x)$, $\mathfrak{L}$ — система твірних σ-алгебри $\mathfrak{F}$ і щільний в H многовид $M \subseteq \mathrm{Dom}(B)$*

* Робота частково підтримана Фондом фундаментальних досліджень при Державному комітеті України з питань науки та технологій.

витримує дію проектора $E(\alpha)$ *для всіх* $\alpha \in \mathfrak{L}$. *Тоді* M *— істотна область визначення оператора* B.

Доведення. Нехай $A = (B \upharpoonright M)^{\sim}$, $\xi \in \mathrm{Dom}(A)$. Тоді існує послідовність векторів $\mathbb{N} \ni n \mapsto \xi_n \in M$ така, що $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = \xi$ і $\lim\limits_{n \to \infty} B\xi_n = B\xi$. Для будь-якого $\alpha \in \mathfrak{L}$ $E(\alpha)\xi_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, і існують границі:

$$\lim_{n \to \infty} E(\alpha)\xi_n = E(\alpha)\xi,$$

$$\lim_{n \to \infty} AE(\alpha)\xi_n = \lim_{n \to \infty} BE(\alpha)\xi_n = \lim_{n \to \infty} E(\alpha)B\xi_n = E(\alpha)B\xi.$$

Отже, в силу замкнeності A $E(\alpha)\xi \in \mathrm{Dom}(A)$. Іншими словами, $\mathrm{Dom}(A)$ витримує дію $E(\alpha)$ для будь-якого $\alpha \in \mathfrak{L}$.

Якщо $\mathrm{Dom}(A)$ витримує дію $E(\alpha)$ для деякого $\alpha \in \mathfrak{F}$, то вона витримує й дію $E(X \setminus \alpha)$, адже $E(X \setminus \alpha)\,\mathrm{Dom}(A) \subseteq \mathrm{Dom}(A) - E(\alpha)\,\mathrm{Dom}(A) \subseteq \mathrm{Dom}(A)$.

Нехай $\mathrm{Dom}(A)$ витримує дію $E(\alpha)$ і $E(\beta)$ для деяких α і β з $\mathfrak{F}$. Тоді вона витримує дію $E(\alpha \cap \beta)$, адже $E(\alpha \cap \beta) = E(\alpha)E(\beta)$. Крім того, вона витримує й дію $E(\alpha \cup \beta)$, оскільки $\alpha \cup \beta = X \setminus ((X \setminus \alpha) \cap (X \setminus \beta))$.

Нехай $\mathbb{N} \ni n \mapsto \alpha_n \in \mathfrak{F}$ — така послідовність множин, що $\mathrm{Dom}(A)$ витримує $E(\alpha_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді для $\xi \in \mathrm{Dom}(A)$ маємо границі

$$\lim_{n \to \infty} E\left(\bigcup_{k=1}^{n} \alpha_k\right)\xi = E\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha_k\right)\xi,$$

$$\lim_{n \to \infty} AE\left(\bigcup_{k=1}^{n} \alpha_k\right)\xi = \lim_{n \to \infty} E\left(\bigcup_{k=1}^{n} \alpha_k\right)A\xi = E\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha_k\right)A\xi.$$

Отже, в силу замкнeності A $E\left(\bigcup_{k=1}^{n} \alpha_k\right)\xi \in \mathrm{Dom}(A)$. Іншими словами, $\mathrm{Dom}(A)$ витримує дію $E\left(\bigcup_{k=1}^{n} \alpha_k\right)$.

Таким чином, сукупність множин $\alpha \in \mathfrak{F}$, для яких $\mathrm{Dom}(A)$ витримує дію $E(\alpha)$, є σ-алгебра. Вона містить $\mathfrak{L}$, а отже, збігається з $\mathfrak{F}$. Завершує доведення посилання на лему 1.

Лема 2. *Нехай* $\{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$ *— набір скінченних мір на* $\mathfrak{F}$. *Якщо послідовність* $\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n \colon X \to \mathbb{C}$ $\mathfrak{F}$*-вимірних функцій фундаментальна в кожному з просторів* $L_2(X, \mu_1)$, $L_2(X, \mu_2)$, $\ldots$, *то існує* $\mathfrak{F}$*-вимірна функція* $f \colon X \to \mathbb{C}$, *що є границею* $\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n$ *в кожному з цих просторів.*

Доведення. Нехай

$$\mathbb{N} \ni k \mapsto a_k = 2^{-k}\left(1 + \mu_k(X) + \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{L_2(X, \mu_k)}\right)^{-1}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu_k$ коректно визначає скінченну міру на $\mathfrak{F}$. Позначимо її через μ. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in L_2(X, \mu)$. Справді,

$$\int_X |f_n|^2 \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_X |f_n|^2 \, d\mu_k \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $M \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\sum_{k=M}^{\infty} 2^{-k} < \varepsilon/8,$$

а також $N \in \mathbb{N}$ таке, що для будь-яких $k \in \{1, \ldots, M-1\}$, $m \geq N$, $n \geq N$ $\| f_m - f_n \|^2_{L_2(X, \mu_k)} < \varepsilon/2$.

Тоді для всіх $m \geq N$, $n \geq N$

$$\| f_m - f_n \|^2_{L_2(X, \mu)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \| f_m - f_n \|^2_{L_2(X, \mu_k)} = \sum_{k=1}^{M-1} a_k \| f_m - f_n \|^2_{L_2(X, \mu_k)} +$$

$$+ \sum_{k=M}^{\infty} a_k \| f_m - f_n \|^2_{L_2(X, \mu_k)} < \sum_{k=1}^{M-1} a_k \varepsilon/2 + 4 \sum_{k=M}^{\infty} 2^{-k} < \varepsilon.$$

Отже, послідовність $\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n$ фундаментальна у просторі $L_2(X, \mu)$. Нехай f — її границя. З нерівностей

$$\mu_k \leq a_k^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \mu_m, \quad k \in \mathbb{N},$$

випливають неперервні вкладення простору $L_2(X, \mu)$ в простори $L_2(X, \mu_1)$, $L_2(X, \mu_2)$, $\ldots$. У кожному з них $f_n \to f$, $n \to \infty$.

Нехай $\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n$ — послідовність $\mathfrak{F}$-вимірних функцій, M — множина всіх векторів $\xi \in H$, для яких послідовність

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto \int_X f_n(x) dE(x) \xi$$

фундаментальна в H. Легко бачити, що M — многовид. Припускатимемо його щільність в H. Серед векторів M можемо вибрати ортонормований базис $\mathbb{N} \ni k \mapsto e_k$ простору H. Фундаментальність послідовностей

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto \int_X f_n(x) dE(x) e_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

рівносильна фундаментальності $\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n$ в кожному з просторів $L_2(X, (Ee_1, e_1))$, $L_2(X, (Ee_2, e_2))$, $\ldots$, тож згідно з лемою 2 існує $\mathfrak{F}$-вимірна функція $f\colon X \to \mathbb{C}$ — спільна границя послідовності $\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n$ в цих просторах.

Теорема 2. *Для кожного* $\xi \in M$ $f_n \to f$, $n \to \infty$, *в* $L_2(X, (E\xi, \xi))$.

Доведення. Нехай μ — міра, побудована за мірами (Ee_1, e_1), (Ee_2, e_2), $\ldots$ $\ldots$, так само, як у доведенні леми 2. Згідно з цією ж лемою $f_n \to f$, $n \to \infty$, в $L_2(X, \mu)$. Міра μ еквівалентна розкладу одиниці E. Справді, нехай $\mu(\alpha) = 0$. Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ $(E(\alpha) e_k, e_k) = 0$, або $E(\alpha) e_k = 0$. Звідси для будь-якого $\xi \in H$ $(E(\alpha)\xi, e_k) = (\xi, E(\alpha) e_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, отже, $E(\alpha) = 0$. Зворотне міркування очевидне.

Нехай $\xi \in M$. Розгляньмо міру $\nu = \mu + (E\xi, \xi)$. Послідовність $\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n$ фундаментальна в $L_2(X, \nu)$. Отже, вона має границю в $L_2(X, \nu)$, яка внаслідок неперервності вкладення $L_2(X, \nu) \subseteq L_2(X, \mu)$ майже скрізь відносно міри μ збігається з f. Але $\nu = \mu + (E\xi, \xi)$ еквівалентна мірі μ, отже, $f_n \to f$, $n \to \infty$, в $L_2(X, \nu)$. З неперервності вкладення $L_2(X, \nu) \subseteq L_2(X, (E\xi, \xi))$ маємо збіжність $f_n \to f$, $n \to \infty$, в $L_2(X, (E\xi, \xi))$.

Таким чином, зі збіжності послідовності операторів

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto \int_X f_n(x)\, dE(x)$$

до оператора $\int_X f(x)\, dE(x)$ поточково на тотальній множині випливає її поточкова збіжність до тієї ж границі на всій множині її поточкової фундаментальності. Більш того, теорема 2 поширюється на всі вектори $\xi \in H$, для яких послідовність $\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n$, лише починаючи з деякого номера, лежить у просторі $L_2(X, (E\xi, \xi))$ і фундаментальна в ньому.

Нехай $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n$ — послідовність щільно визначених лінійних операторів, що діють у просторі H, M — множина всіх $\xi \in H$, для яких послідовність векторів $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n\xi$ збігається в H. У випадку щільності M в H будемо говорити, що послідовність $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n$ має поточкову границю, під якою розумітимемо такий лінійний оператор:

$$M \ni \xi \mapsto \lim_{n \to \infty} A_n \xi \in H.$$

Позначатимемо її виразом $\operatorname*{p\,lim}_{n \to \infty} A_n$ (від слів „point limit').

Теорема 3. *Нехай послідовність* $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n$ *нормальних операторів, що сильно комутують, має поточкову границю. Тоді* $\operatorname*{p\,lim}_{n \to \infty} A_n$ *замикається і її замикання є спектральним інтегралом за спільним для послідовності* $\mathbb{N} \ni n \mapsto$ $\mapsto A_n$ *розкладом одиниці.*

Доведення. Нехай E — спільний розклад одиниці послідовності сильно комутуючих операторів $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n$, $\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n : X \to \mathbb{C}$ — послідовність $\mathfrak{F}$-вимірних функцій така, що

$$A_n = \int_X f_n(x)\, dE(x),$$

M — множина всіх $\xi \in H$, для яких послідовність векторів $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n\xi$ збігається.

За теоремою 2 існує $\mathfrak{F}$-вимірна функція f така, що для будь-якого $\xi \in M$ $f_n \to f$, $n \to \infty$, в $L_2(X, (E\xi, \xi))$. Іншими словами,

$$\left\| \int_X f_n(x)\, dE(x)\xi - \int_X f(x)\, dE(x)\xi \right\|^2 = \int_X \| f_n - f \|^2\, d(E\xi, \xi) \to 0, \quad n \to \infty,$$

тож

$$\operatorname*{p\,lim}_{n \to \infty} A_n = \left(\int_X f(x)\, dE(x) \right) \upharpoonright M.$$

Многовид M витримує дію $E(\alpha)$ для будь-якого $\alpha \in \mathfrak{F}$. Справді, з фундаментальності послідовності $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n\xi$ випливає фундаментальність $\mathbb{N} \ni$ $\ni n \mapsto E(\alpha)A_n\xi = A_nE(\alpha)\xi$, а тому $E(\alpha)\xi \in M$. Значить, згідно з лемою 1 M — істотна область визначення оператора $\int_X f(x)\, dE(x)$. Тобто

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_n\right)^{\sim} = \int_X f(x)\,dE(x).$$

Зауважимо, що за умов теореми 3 многовид $\mathrm{Dom}\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_n\right)$ — спільна істотна область визначення операторів A_n, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4. *Нехай послідовність* $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n$ *нормальних операторів, що сильно комутують, має поточкову границю. Тоді поточкову границю має й послідовність* $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n^*$, *причому*

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_n\right)^{*} = \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_n^*\right)^{\sim}.$$

Доведення. В позначеннях доведення попередньої теореми маємо

$$A_n^* = \int_X \overline{f_n(x)}\,dE(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для кожного $\xi \in M$

$$\left\| \int_X \overline{f_n(x)}\,dE(x)\xi - \int_X \overline{f(x)}\,dE(x)\xi \right\|^2 = \int_X \left|\overline{f_n} - \bar{f}\right|^2 d(E\xi,\xi) =$$

$$= \int_X |f_n - f|^2\, d(E\xi,\xi) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Використовуючи попередні міркування про многовид M, робимо висновок

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_n^*\right)^{\sim} = \int_X \overline{f(x)}\,dE(x) = \left(\int_X f(x)\,dE(x)\right)^* = \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_n\right)^*.$$

Отже, замиканням поточкової границі послідовності самоспряжених операторів, що сильно комутують, є самоспряжений оператор. Оскільки многовид $\mathrm{Dom}\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_n\right)$ — спільна істотна область визначення операторів послідовності $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n$, замикання її поточкової границі збігається з її сильною резольвентною границею (відповідне твердження наводиться в [4]). У випадку нормальних операторів такого зв'язку немає, бо поточкову границю може мати послідовність операторів, які взагалі не мають резольвентних множин.

2. Нехай $H_1, \ldots, H_n$ — сепарабельні гільбертові простори, $(X_1, \mathfrak{F}_1), \ldots, (X_n, \mathfrak{F}_n)$ — вимірні простори, та $E_1\colon \mathfrak{F}_1 \to \mathfrak{L}(H_1), \ldots, E_n\colon \mathfrak{F}_n \to \mathfrak{L}(H_n)$ — розклади одиниці. Виразом $\mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_n$ позначатимемо напівкільце множин, складене з декартових добутків елементів σ-алгебр $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$, літерою $\mathfrak{F}$ — σ-алгебру $\sigma(\mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_n)$. Надалі $H = H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$, $X = X_1 \times \ldots \times X_n$.

Існує єдиний розклад одиниці $E\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{L}(H)$ такий, що для будь-якого $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n \in \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_n$ $E(\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n) = E_1(\alpha_1) \otimes \ldots \otimes E_n(\alpha_n)$. Називатимемо його тензорним добутком розкладів одиниці $E_1, \ldots, E_n$ і позначатимемо виразом $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$. Наведемо лише схему доведення цього відомого [1] твердження. Функція множин E, визначена рівністю $E(\alpha_1 \times \ldots\ldots \times \alpha_n) =$

$= E_1(\alpha_1) \otimes \ldots \otimes E_n(\alpha_n)$, продовжується за адитивністю до адитивної проекторнозначної функції множин на алгебрі, породженій півкільцем $\mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_n$. З σ-адитивності функції множин $(E\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n, \eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_n)$, що є добутком зарядів $(E_1\xi_1, \eta_1), \ldots, (E_n\xi_n, \eta_n)$, разом з тотальністю в H множини $\{\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \mid \xi_1 \in H_1, \ldots, \xi_n \in H_n\}$ та рівномірною обмеженістю проекторів випливає слабка σ-адитивність E. Доведення існування завершує продовження розкладу одиниці E з алгебри на породжену σ-алгебру. Єдиність випливає з єдиності продовжень за адитивністю та σ-адитивністю.

Зауважимо, що деякі додаткові припущення щодо вимірних просторів $(X_1, \mathfrak{F}_1), \ldots, (X_n, \mathfrak{F}_n)$ значно спрощують доведення. А саме: нехай $X_1, \ldots, X_n$ — повні метричні простори, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{B}(X_1), \ldots, \mathfrak{F}_n = \mathfrak{B}(X_n)$ — відповідні борелівські σ-алгебри. Тоді $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ — розклад одиниці як добуток комутуючих розкладів одиниці $E_1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1, \ldots, 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes E_n$, визначених на борелівських σ-алгебрах повних метричних просторів. Однак загальні припущення щодо вимірних просторів не гарантують того, що добуток комутуючих розкладів одиниці буде розкладом одиниці [3].

Алгебраїчним тензорним добутком лінійних многовидів $L_1 \subseteq H_1, \ldots, L_n \subseteq H_n$ називають лінійну оболонку множини всіх елементарних тензорних добутків $\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \in H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$, що задовольняють умови $\xi_1 \in L_1, \ldots, \xi_n \in L_n$. Позначатимемо його виразом $L_1 \otimes_a \ldots \otimes_a L_n$.

Нехай $A_1, \ldots, A_n$ — лінійні оператори, що діють у просторах $H_1, \ldots, H_n$ відповідно. Їх алгебраїчним тензорним добутком називають лінійний оператор, визначений на $\mathrm{Dom}(A_1) \otimes_a \ldots \otimes_a \mathrm{Dom}(A_n)$ співвідношенням $\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \mapsto (A_1\xi_1) \otimes \ldots \otimes (A_n\xi_n)$. Позначатимемо його виразом $A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n$.

Якщо оператори $A_1, \ldots, A_n$ замкнені, то $A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n$ замикається і ми позначатимемо виразом $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ його замикання. Зауважимо, що у випадку неперервних операторів таке визначення добутку $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ збігаєтьтся зі стандартним.

Розгляньмо деякі застосування наведених вище тверджень.

Теорема 5. *Нехай $A_1, \ldots, A_n$ — нормальні оператори, що діють у просторах $H_1, \ldots, H_n$ відповідно. Тоді оператор $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ також нормальний, причому $(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)^* = A_1^* \otimes \ldots \otimes A_n^*$.*

Доведення. Нехай $E_1 : \mathfrak{F}_1 \to \mathfrak{L}(H_1), \ldots, E_n : \mathfrak{F}_n \to \mathfrak{L}(H_n)$ — розклади одиниці, відносно яких оператори $A_1, \ldots, A_n$ зображаються спектральними інтегралами

$$A_i = \int_{X_i} f_i(x_i) dE_i(x_i), \quad 1 \le i \le n.$$

Нехай $E = E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$. Тоді

$$A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \subseteq \int_X f_1(x_1) \ldots f_n(x_n) dE(x).$$

Множина

$$\mathrm{Dom}(A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n) = \mathrm{Dom}(A_1) \otimes_a \ldots \otimes_a \mathrm{Dom}(A_n),$$

очевидно, витримує дію $E(\alpha)$ для всіх $\alpha \in \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_n$, отже за теоремою 1

$$A_1 \otimes \ldots \otimes A_n = \int_X f_1(x_1) \ldots f_n(x_n) dE(x).$$

Тоді

$$(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)^* = \int_X \overline{f_1(x_1)} \ldots \overline{f_n(x_n)}\, dE(x) = A_1^* \otimes \ldots \otimes A_n^*.$$

Аналогічне твердження доводиться в роботі [1] (там також доводиться, що рівність

$$(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)^* = A_1^* \otimes \ldots \otimes A_n^*$$

виконується для будь-яких замкнених операторів).

Теорема 6. *Нехай нормальні оператори $A_{i1}, \ldots, A_{im}$ сильно комутують у просторі H_i, $1 \le i \le n$. Тоді оператор*

$$\sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}$$

замикається, причому

$$\left(\sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \right)^* = \left(\sum_{k=1}^{m} A_{1k}^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^* \right)^{\sim}.$$

Доведення. Нехай $E_i \colon \mathfrak{F}_i \to \mathfrak{L}(H_i)$ — спільний розклад одиниці для операторів $A_{i1}, \ldots, A_{im}$, $1 \le i \le n$. Тоді

$$A_{ik} = \int_{X_i} f_{ik}(x_i) dE_i(x_i), \quad 1 \le k \le m, \quad 1 \le i \le n.$$

Нехай $E = E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$. При цьому

$$\sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \subseteq \int_X \left(\sum_{k=1}^{m} f_{1k}(x_1) \ldots f_{nk}(x_n) \right) dE(x).$$

Множина

$$\operatorname{Dom} \left(\sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \right),$$

очевидно, витримує дію $E(\alpha)$ для всіх $\alpha \in \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_n$, отже, за теоремою 1

$$\left(\sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \right)^{\sim} = \int_X \left(\sum_{k=1}^{m} f_{1k}(x_1) \ldots f_{nk}(x_n) \right) dE(x),$$

а значить,

$$\left(\sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \right)^* = \int_X \left(\sum_{k=1}^{m} \overline{f_{1k}(x_1)} \ldots \overline{f_{nk}(x_n)} \right) dE(x) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} A_{1k}^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^* \right)^{\sim}.$$

У випадку, коли для кожного фіксованого $i \in \{1, \ldots n\}$ оператори $A_{i1}, \ldots, A_{in}$ є степені одного і того ж оператора A_i, це твердження доведене в [4].

Теорема 7. *Нехай* $\mathbb{N} \ni K \mapsto A_{ik}$ *— послідовність нормальних операторів, що діють у просторі* H_i *і сильно комутують,* $1 \le i \le n$. *Припустимо, що існує границя*

$$\operatorname{p}\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}.$$

Тоді вона замикається і

$$\left(\operatorname{p}\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \right)^* = \left(\operatorname{p}\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} A_{1k}^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^* \right)^{\sim}.$$

Доведення. Нехай $E_i \colon \mathfrak{F}_i \to \mathfrak{L}(H_i)$ — спільний розклад одиниці послідовності операторів $\mathbb{N} \ni K \mapsto A_{ik}$, $1 \le i \le n$. Тоді

$$A_{ik} = \int_{X_i} f_{ik}(x_i) dE_i(x_i), \quad k \in \mathbb{N}, \quad 1 \le i \le n.$$

Нехай $E = E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$. Тоді

$$\operatorname{p}\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \subseteq \left(\operatorname{p}\lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \right)^{\sim} \right)^{\sim} = \int_X f(x)\, dE(x).$$

Неважко переконатись, що множина

$$\operatorname{Dom} \left(\operatorname{p}\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \right)$$

витримує дію $E(\alpha)$ для всіх $\alpha \in \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_n$, отже, за теоремою 1

$$\left(\operatorname{p}\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \right)^{\sim} = \left(\operatorname{p}\lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \right)^{\sim} \right)^{\sim}.$$

Аналогічно доводиться рівність

$$\left(\operatorname{p}\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} A_{1k}^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^* \right)^{\sim} = \left(\operatorname{p}\lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{m} A_{1k}^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^* \right)^{\sim} \right)^{\sim}.$$

(Існування поточкової границі в її лівій частині безпосередньо перевіряється.) Нарешті, згідно з теоремою 4

$$\left(\operatorname{p}\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} A_{1k}^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^* \right)^{\sim} = \left(\operatorname{p}\lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{m} A_{1k}^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^* \right)^{\sim} \right)^{\sim} =$$

$$= \left(\operatorname{p}\lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \right)^{\sim} \right)^* = \left(\operatorname{p}\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \right)^*.$$

1. *Наймарк М. А.* О прямом произведении замкнутых операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1939. – № 1. – С. 53–86.
2. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 680 с.
3. *Бирман М. Ш., Вершик А. М., Соломяк М. З.* Произведение перестановочних спектральных мер может не быть счетно-аддитивным // Функцион. анализ и его прил. – 1979. – **13**, № 1. – С. 61–62.
4. *Рид М., Саймон В.* Методы современной математической физики. – М.: Мир, 1977. – 658 с.

Одержано 04.03.93