УДК 517.946 + 511.2

І. О. Бобик, асп. (Львів. ун-т),
Б. Й. Пташник, д-р фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

By using a metric approach, the problem of correctness of a boundary-value problem is studied for a hyperbolic equation of order n $(n \geq 2)$ with constant coefficients defined in a tube domain. Existence and uniqueness conditions are formulated in terms of number theory. We prove a metric theorem on lower estimates for small denominators that appear in solutions of the problem.

На основі метричного підходу досліджено питання коректності крайових задач для гіперболічних рівнянь n-го порядку $(n \geq 2)$ зі сталими коефіцієнтами в циліндричній області. Умови існування та єдиності розв'язків задач формулюються в теоретико-числових термінах. Доведено метричну теорему про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків задач.

1. З точки зору постановки крайових задач найбільш глибоко вивчені диференціальні рівняння з частинними похідними класичних типів та безпосередні їх узагальнення. Що стосується довільних рівнянь з частинними похідними, а також некласичних задач, то при їх вивченні одержані менш значні результати. Так, крайові задачі з даними на всій границі обмеженої області для нееліптичних рівнянь почали вивчатися порівняно недавно. Це зумовлено тим, що такі задачі є, взагалі кажучи, некоректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемами малих знаменників і є нестійкою відносно малих змін області, а також коефіцієнтів рівнянь і граничних умов (див. [1], розд. 3 і бібліографію). Дана стаття є продовженням і розвитком праць [2–4].

Нижче використовуватимемо такі позначення та функціональні простори: $\mathbb{Z}_+^p$ — множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими невід'ємними координатами; $\{y \in Y: P(y)\}$ — підмножина елементів Y, що мають властивість $P(y)$; $x = (x_1, \ldots, x_p)$ — довільна точка в просторі $\mathbb{R}^p$;

$$(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1}; \quad k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p;$$

$$s = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}; \quad (k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_p x_p;$$

$$\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2}: \ |k| = |k_1| + \ldots + |k_p|; \ |s| = s_0 + s_1 + \ldots + s_p;$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}; \quad A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!};$$

Ω^p — p-вимірний тор $\{x \in \mathbb{R}^p: 0 \leq x_r \leq 2\pi, \ r = 1, \ldots, p\}$; $D^p = [0, T] \times \Omega^p$; $\operatorname{mes} M$ — міра Лебега множини M; $H_q(\Omega^p)$, $q \in \mathbb{Z}$, — гільбертовий простір 2π-періодичних за $x_1, \ldots, x_p$ комплекснозначних функцій $v(x) = \sum_{|k| \geq 0} v_k \exp(i(k, x))$ з нормою

$$\|v(x)\|^2_{H_q(\Omega^p)} = (2\pi)^p \sum_{|k| \geq 0} [1 + |k|^2]^q |v_k|^2;$$

$H_q^n(D^p)$, $q \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — гільбертовий простір функцій $u(t, x)$ таких, що для кожного $t \in [0, T]$ $\partial^r u(t, x)/\partial t^r \in H_{q-r}(\Omega^p)$, $r = 0, 1, \ldots, n$, і неперервна по t в нормі $H_{q-r}(\Omega^p)$,

$$\|u(t,x)\|^2_{H^n_q(D^p)} = \int_0^T \sum_{r=0}^n \left\| \frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r} \right\|^2_{H_{q-r}(\Omega^p)} dt.$$

В області D^p для рівняння

$$Lu \equiv \sum_{|s|=n} A_s \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} = 0, \quad A_s \in \mathbb{R},\ A_{n,0,\dots,0} \neq 0, \tag{1}$$

розглянемо крайову задачу з умовами

$$\left. \frac{\partial^{\alpha_1 - 1} u}{\partial t^{\alpha_1 - 1}} \right|_{t=0} = \varphi_{\alpha_1}(x), \qquad \left. \frac{\partial^{\alpha_2 - 1} u}{\partial t^{\alpha_2 - 1}} \right|_{t=T} = \varphi_{m+\alpha_2}(x) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 = 1,\dots,m; \\ \alpha_2 = 1,\dots,n-m; \\ 1 \le m \le n-1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Вигляд області D^p накладає умови 2π-періодичності по $x_1, \dots, x_p$ на функції $\varphi_j(x)$ та $u(t,x)$.

Припустимо, що рівняння (1) є гіперболічне за І. Г. Петровським, тобто для довільного $\eta \in \mathbb{R}^p$ всі λ-корені рівняння

$$\sum_{|s|=n} A_s \eta_1^{s_1} \dots \eta_p^{s_p} \lambda^{s_0} = 0 \tag{3}$$

дійсні. Для спрощення викладу будемо вважати, що для $\eta \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ кратність коренів рівняння (3) не залежить від η.

2. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо в просторі $H^n_q(D^p)$ у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k| \ge 0} u_k(t) \exp[i(k,x)]. \tag{4}$$

Кожна з функцій $u_k(t)$ визначається як розв'язок задачі

$$\sum_{|s|=n} A_s (ik_1)^{s_1} \dots (ik_p)^{s_p} \frac{d^{s_0} u_k(t)}{dt^{s_0}} = 0, \tag{5}$$

$$\left. \frac{d^{\alpha_1 - 1} u_k(t)}{dt^{\alpha_1 - 1}} \right|_{t=0} = \varphi_{\alpha_1,k}, \qquad \left. \frac{d^{\alpha_2 - 1} u_k(t)}{dt^{\alpha_2 - 1}} \right|_{t=T} = \varphi_{m+\alpha_2,k} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 = 1,\dots,m; \\ \alpha_2 = 1,\dots,n-m; \\ 1 \le m \le n-1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де $\varphi_{j,k}$ — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_j(x)$.

Зауважимо, що при $k = (0)$ завжди існує єдиний розв'язок $u_{(0)}(t)$ задачі (5), (6), який є многочленом степеня $n-1$.

Позначимо через $\lambda_j(k)$, $j = 1, \dots, l$, корені рівняння (3) при $\eta_r = k_r / \|k\|$, $r = 1, \dots, p$; $k \neq (0)$, кратність яких дорівнює відповідно m_j $(m_1 + \dots + m_l = n)$. Тоді $\forall\, k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ розв'язок задачі (5), (6) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{r_j=1}^{m_j} C_{j,r_j}(k)\, t^{r_j - 1} \exp[i \|k\| \lambda_j(k) t], \tag{7}$$

де коефіцієнти $C_{j,r_j}(k)$ визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{r_j=1}^{m_j} C_{j,r_j}(k)\,(r_j-1)!\; C_{\alpha_1-1}^{r_j-1}\,[\,i\,\|k\|\lambda_j(k)]^{\alpha_1-r_j} =$$

$$= \varphi_{\alpha_1,k}, \quad \alpha_1 = 1, \dots, m;$$

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{r_j=1}^{m_j} \sum_{\nu=0}^{\alpha_2-1} C_{j,r_j}(k)\, C_{\alpha_2-1}^{\nu}\, A_{r_j-1}^{\nu}\,[\,i\,\|k\|\lambda_j(k)]^{\alpha_2-\nu-1} \times$$

$$\times T^{r_j-\nu-1} \exp[\,i\,\|k\|\lambda_j(k)T\,] = \varphi_{m+\alpha_2,k}, \quad \alpha_2 = 1, \dots, n-m. \tag{8}$$

Визначник $\Delta(k)$ системи рівнянь (8) зображається у вигляді

$$\Delta(k) = (\,i\,\|k\|)^{\beta} \sum_{g\in G^{m,l}} P_g(i\,\|k\|T)\exp[\,i\,\|k\|(\lambda(k), g)\,T\,] \equiv$$

$$\equiv (\,i\,\|k\|)^{\beta}\,\Delta_1(k), \tag{9}$$

де

$$\beta = \frac{m(m-1)+(n-m)(n-m-1)}{2} - \sum_{j=1}^{l}\frac{m_j(m_j-1)}{2};$$

$$G^{m,l} = \{\,g\in \mathbb{Z}_+^l :\ |g| = n-m,\ g_r \le m_r,\ r = 1, \dots, l\,\};$$

$P_g(i\,\|k\|T)$ — многочлен степеня

$$f(g) = \sum_{j=1}^{l} g_r(m_r - g_r),$$

коефіцієнти якого поліноміально залежать від координат вектора

$$\lambda(k) = (\lambda_1(k), \dots, \lambda_l(k)); \quad (\lambda(k), g) = \sum_{r=1}^{l}\lambda_r(k)\,g_r.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *в просторі* $H_n^n(D^p)$ *необхідно і достатньо, щоб*

$$\Delta_1(k) \ne 0, \quad k\in \mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}. \tag{10}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 2.1 роботи ([1], розд. 3) і випливає з теореми про єдиність розвинення періодичної функції в ряд Фур'є.

***Зауваження* 1.** Для довільного фіксованого рівняння (1) умова (10) виконується для всіх (крім зліченного числа) значень $T > 0$, оскільки при фіксованому k аналітична функція $y_k(T) = \Delta_1(k)$ на довільному відрізку $[t_1, t_2]$ може мати лише скінченне число нулів.

3. Припустимо, що виконані умови (10). Тоді коефіцієнти $C_{j,r_j}(k)$ у формулі (7) однозначно визначаються із системи рівнянь (8) за формулами Крамера. При цьому розв'язок задачі (1), (2) формально зображається у вигляді ряду

$$u(t,x) = u_{(0)}(t) + \sum_{|k|>0}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\sum_{r_j=1}^{m_j}\frac{\Delta_{\nu,j,r_j}(k)}{\Delta(k)}\,t^{r_j-1}\times\right.$$

$$\times \exp\left[i \,\|k\| \lambda_j(k) t \right] \varphi_{\nu,k} \Bigg\} \exp\left[i(k,x) \right], \tag{11}$$

де $\Delta_{\nu,j,r_j}(k)$ — алгебраїчне доповнення елемента ν-го рядка і стовпця з номером $m_1 + \ldots + m_{j-1} + r_j$ у визначнику $\Delta(k)$. Ряд (11), взагалі, розбігається, бо величина $|\Delta(k)|$, що відмінна від нуля, може ставати як завгодно малою для нескінченної множини значень $k \in \mathbb{Z}^p$. Тому питання існування розв'язку задачі (1), (2) пов'язане з проблемою малих знаменників.

Теорема 2. *Нехай існують* $M_1 > 0$ *і* $\kappa_1 \in \mathbb{Z}^p$ *такі, що виконуються нерівності*

$$|\Delta_1(k)| > M_1 \|k\|^{-\kappa_1} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^p,\ |k| > K_1, \tag{12}$$

$$\varphi_{\alpha_1}(x) \in H_{q+\kappa-\alpha_1}(\Omega^p), \quad \varphi_{m+\alpha_2}(x) \in H_{q+\kappa-\alpha_2}(\Omega^p),$$

$$\alpha_1 = 1, \ldots, m; \quad \alpha_2 = 1, \ldots, n-m; \quad \kappa = \kappa_1 + \kappa_2,$$

$$\kappa_2 = \max\Big\{ f(g) + \max_{r=1,\ldots,l} (m_r - g_r) \Big\}.$$

Тоді існує розв'язок $u(t,x) \in H_q^n(D^p)$ *задачі* (1), (2), *який неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

Доведення. На основі формули (11), оцінок (12) і нерівностей

$$\left.\begin{aligned} \left|\Delta_{\alpha_1,j,r_j}(k)\right| &\le C_1 \|k\|^{\beta+\kappa_2-\alpha_1}, \\ \left|\Delta_{m+\alpha_2,j,r_j}(k)\right| &\le C_2 \|k\|^{\beta+\kappa_2-\alpha_2} \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 = 1,\ldots,m; & \alpha_2 = 1,\ldots,n-m; \\ j = 1,\ldots,l; & r_j = 1,\ldots,m_j \end{pmatrix}$$

одержуємо

$$\|u(t,x)\|^2_{H_q^n(D^p)} \le C_3 \Bigg\{ \sum_{\alpha_1=1}^{m} \left\|\varphi_{\alpha_1}(x)\right\|^2_{H_{q+\kappa-\alpha_1}(\Omega^p)} + $$

$$+ \sum_{\alpha_2=1}^{n-m} \left\|\varphi_{m+\alpha_2}(x)\right\|^2_{H_{q+\kappa-\alpha_2}(\Omega^p)} \Bigg\}, \tag{13}$$

де $C_3 = C_3(C_1, C_2, M, n, T, A_s)$. З нерівності (13) випливає твердження теореми.

4. Дослідимо можливість виконання оцінок (12). Позначимо через $\tilde{\lambda}_r(k)$, $r = 1, \ldots, n$, всі корені рівняння (3) при $\eta = k / \|k\|$, враховуючи кратність, при цьому $\tilde{\lambda}_{m_1+\ldots+m_{j-1}+q}(k) = \lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, l$; $q = 1, \ldots, m_j$; $y = (y_1, \ldots, y_\sigma)$ — вектор, складений з коефіцієнтів A_s рівняння (1), де σ — число розв'язків $s = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$ рівняння $|s| = n$; Q — множина тих векторів $y \in \mathbb{R}^\sigma$, для яких оператор L гіперболічний за І. Г. Петровським. Зауважимо, що Q є множиною повної міри [5].

Лема 1. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі* $\mathbb{R}^\sigma$*) векторів* $y \in Q$ *виконуються нерівності*

$$\prod_{1 \le j < r \le n} \left|\tilde{\lambda}_j(k) - \tilde{\lambda}_r(k)\right| \ge$$

$$\geq \|k\|^{-p(n-1)/2-\varepsilon} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^p,\ |k| > K_2(y),\ \varepsilon > 0. \tag{14}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 6 в [6].

Теорема 3. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^\sigma$) векторів $y \in Q$ і для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ нерівності* (12) *виконуються при $\kappa_1 > p((n-1)\omega/2 + \gamma - 1)$, де*

$$\gamma = C_n^m;\ \ \omega = \max\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} + 1,\ \ \omega_1 = \sum_{j=2}^{\tilde m} \frac{1}{j(2j-1)}\, C_{n-m-2}^{j-2}\, C_m^j,$$

$$\omega_2 = \sum_{j=2}^{\tilde m} \frac{1}{j(2j-1)}\, C_{n-m}^{j}\, C_{m-2}^{j-2}, \qquad \omega_3 = \sum_{j=2}^{\tilde m} \frac{1}{j(2j-1)}\, C_{n-m-1}^{j-1} C_{m-1}^{j-1},$$

$$\tilde m = \min\{m, n-m\}.$$

Доведення. Будемо вважати, що $T \in [t_1, t_2]$, а y належить деякому паралелепіпеду Y розмірності σ, оскільки простір $\mathbb{R}^{\sigma+1}$ можна зобразити у вигляді зліченного об'єднання паралелепіпедів. З леми 1 випливає, що для майже всіх (відносно міри Лебега) векторів $y \in Y$ $l = n$ для довільного $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(0)\}$; при цьому визначник $\Delta_1(k)$ (за теоремою Лапласа) зображається у вигляді

$$\Delta_1(k) = \sum_{\nu=1}^{\gamma} (-1)^{b_{r_\nu}} V_{r_{\nu,1}, \dots, r_{\nu,n-m}}(k)\, V_{r_{\nu,n-m+1}, \dots, r_{\nu,n}}(k) \times$$

$$\times \exp[i\|k\|(\lambda(k), g^{(\nu)})T], \tag{15}$$

де

$$b_{r_\nu} = n(n-m) + \frac{m(m-1)}{2} + \sum_{j=1}^{n-m} r_{\nu,j},\ \ g^{(\nu)} \in G^{m,n},\ \ r_\nu = (r_{\nu,1}, \dots, r_{\nu,n}),$$

— така перестановка чисел $(1, \dots, n)$, що

$$g_{r_{\nu,1}}^{(\nu)} = \dots = g_{r_{\nu,n-m}}^{(\nu)} = 1,\quad g_{r_{\nu,n-m+1}}^{(\nu)} = \dots = g_{r_{\nu,n}}^{(\nu)} = 0,\quad \nu = 1, \dots, \gamma,$$

$$V_{j_1, \dots, j_s}(k) = \prod_{1 \le \xi < \eta \le s} \big(\lambda_{j_\xi}(k) - \lambda_{j_\eta}(k)\big).$$

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $\forall\, k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{(0)\}$ $\lambda_1(k) > \dots$ $\dots > \lambda_n(k)$, а

$$g^{(\gamma)} = \Big(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-m}, 0, \dots, 0\Big).$$

Розглянемо функції

$$F_1(\lambda(k), T) = \exp[-i\|k\|(\lambda(k), g^{(1)})T]\,\Delta_1(k);$$

$$F_\nu(\lambda(k), T) = \frac{1}{i\|k\|} \exp[i\|k\|(\lambda(k), g^{(\nu-1)} - g^{(\nu)})T]\, \frac{dF_{\nu-1}(\lambda(k), T)}{dT}, \tag{16}$$

$$\nu = 2, \dots, \gamma.$$

Функція $|F_\gamma(\lambda(k), T)|$ має вигляд

$$|F_\gamma(\lambda(k),T)| = |V_{1,\dots,n}(k)| \prod_{q=2}^{\tilde m} \prod_{i\in I_q,\, j\in J_q} \big|\lambda_{i_1}(k)+\dots+\lambda_{i_q}(k) - \\ -\lambda_{j_1}(k)-\dots-\lambda_{j_q}(k)\big|, \tag{17}$$

де

$$I_q = \{i=(i_1,\dots,i_q)\in \mathbb{Z}_+^q:$$
$$i_\xi\in\{1,\dots,n-m\},\ \xi=1,\dots,q,\ i_\eta<i_{\eta+1},\ \eta=1,\dots,q-1\},$$
$$J_q = \{j=(j_1,\dots,j_q)\in \mathbb{Z}_+^q:$$
$$j_\xi\in\{n-m+1,\dots,n\},\ \xi=1,\dots,q,\ j_\eta<j_{\eta+1},\ \eta=1,\dots,q-1\}.$$

Для фіксованих $2\le q\le \tilde m$, $i\in I_q$, $j\in J_q$, справедлива нерівність

$$(2q-1)\big(\lambda_{i_1}(k)+\dots+\lambda_{i_q}(k)-\lambda_{j_1}(k)-\dots-\lambda_{j_q}(k)\big) >$$
$$> \sum_{\xi,\eta=1}^{q}\big(\lambda_{i_\xi}(k)-\lambda_{j_\eta}(k)\big)+$$
$$+\sum_{1\le\xi<\eta\le q}\Big[\big(\lambda_{i_\xi}(k)-\lambda_{i_\eta}(k)\big)+\big(\lambda_{j_\xi}(k)-\lambda_{j_\eta}(k)\big)\Big], \tag{18}$$

причому всі $q(2q-1)$ доданків у правій частині (18) є додатні $\forall\, k\in \mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}$. На основі формули (17) і нерівності (18), враховуючи, що $|a_1|+\dots+|a_n|\ge n(|a_1|\times\dots\times|a_n|)^{1/n}$, одержуємо

$$|F_\gamma(\lambda(k),T)| > |V_{1,\dots,n}(k)| \prod_{q=2}^{\tilde m} q^{-C_{n-m}^q C_m^q}\times$$
$$\times \prod_{1\le\xi<\eta\le n-m}|\lambda_\xi(k)-\lambda_\eta(k)|^{\omega_1} \prod_{n-m+1\le\xi<\eta\le n}|\lambda_\xi(k)-\lambda_\eta(k)|^{\omega_2}\times$$
$$\times\prod_{\xi=1}^{n-m}\prod_{\eta=n-m+1}^{n}|\lambda_\xi(k)-\lambda_\eta(k)|^{\omega_3}. \tag{19}$$

З формул (16), оцінки (19) і леми 1 випливає, що для майже всіх векторів $y\in Y$ нерівність

$$\left|\frac{dF_{\gamma-1}(\lambda(k),T)}{dT}\right| \ge B\,\|k\|^{-p(n-1)\omega/2+1-\varepsilon_1}\quad (B>0,\ \varepsilon_1>0) \tag{20}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) значень $k\in\mathbb{Z}^p$.

Для довільних фіксованих $y\in Y$ і $k\in\mathbb{Z}^p$ таких, що виконується (20) відрізок $[t_1,t_2]$ розбивається на підмножини $G_1(k)$ та $H_1(k)$ (які, можливо, перетинаються) такі, що

$$\forall\, T\in G_1(k)\quad \left|\operatorname{Re}\frac{dF_{\gamma-1}(\lambda(k),T)}{dT}\right| \ge \frac{B}{\sqrt2}\|k\|^{-p(n-1)\omega/2+1-\varepsilon_1}, \tag{21}$$

$$\forall\, T\in H_1(k)\quad \left|\operatorname{Im}\frac{dF_{\gamma-1}(\lambda(k),T)}{dT}\right| \ge \frac{B}{\sqrt2}\|k\|^{-p(n-1)\omega/2+1-\varepsilon_1}. \tag{22}$$

Покажемо, що для фіксованого $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ множина $G_1(k)$ (як і $H_1(k)$) складається з інтервалів, число яких не перевищує $d_{1,\gamma-1} \| k \|$, де константа $d_{1,\gamma-1}$ не залежить від k. На основі теореми Ролля на кожному з інтервалів (крім, можливо, двох крайніх), де виконується (21), функція

$$\operatorname{Re} \frac{d^2 F_{\gamma-1}(\lambda(k), T)}{dT^2} = y_{\gamma-1}(\| k \| T) = y_{\gamma-1}(z)$$

має хоча б один нуль. Зауважимо, що $y_{\gamma-1}(z)$ є розв'язком рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \left(\lambda(k), g^{(\nu)} - g^{(\nu-1)} \right)^2 \right) y(z) = 0. \tag{23}$$

Згідно з теоремою Валле Пуссена (див. [7], розд. 4) існує стала $h_{\gamma-1} > 0$ така, що на довільному інтервалі довжиною $h_{\gamma-1}$ будь-який нетривіальний розв'язок рівняння (23) має не більше одного нуля, отже, на відрізку $[\| k \| t_1; \| k \| t_2]$ функція $y_{\gamma-1}(z)$ може мати не більше, ніж $\left[(t_2 - t_1) \| k \| / h_{\gamma-1} \right] + 1$ нулів, де $[a]$ — ціла частина a.

Застосовуючи на кожному з інтервалів множини $G_1(k)$ лему 2 з [6], маємо, що міра множини T, для яких

$$| \operatorname{Re} F_{\gamma-1}(\lambda(k), T) | < \| k \|^{-p((n-1)\omega/2+1)-\varepsilon_2}, \tag{24}$$

не перевищує $d_{2,\gamma-1} \| k \|^{-p-1-\varepsilon_2+\varepsilon_1}$. Отже, нерівність (24) виконується для множини значень $T \in G_1(k)$, міра якої не перевищує

$$d_{1,\gamma-1} d_{2,\gamma-1} \| k \|^{-p-\varepsilon_2+\varepsilon_1} = d_{3,\gamma-1} \| k \|^{-p-\varepsilon_2+\varepsilon_1}.$$

На основі оцінки (22) аналогічно доводиться, що міра множини значень $T \in H_1(k)$, для яких виконується нерівність

$$| \operatorname{Im} F_{\gamma-1}(\lambda(k), T) | < \| k \|^{-p((n-1)\omega/2+1)-\varepsilon_2},$$

не більша, ніж $d_{3,\gamma-1} \| k \|^{-p-\varepsilon_2+\varepsilon_1}$. Отже, існує множина $D_1(k) \subset [t_1, t_2]$ така, що

$$\forall\, T \in D_1(k) \quad | F_{\gamma-1}(\lambda(k), T) | \geq \| k \|^{-p((n-1)\omega/2+1)-\varepsilon_2}$$

і $\operatorname{mes} D_1(k) > t_2 - t_1 - 2 d_{3,\gamma-1} \| k \|^{-p-\varepsilon_2+\varepsilon_1}$.

Аналогічними міркуваннями, переходячи послідовно від оцінки функції $F_j(\lambda(k), T)$ до оцінки $F_{j-1}(\lambda(k), T)$, $j = \gamma - 1, \ldots, 2$, одержуємо, що нерівність

$$| \Delta_1(k) | \geq \| k \|^{-p((n-1)\omega/2+\gamma-1)-\varepsilon_\gamma} \tag{25}$$

може не виконуватись лише для множини $D_\gamma(k) = [t_1, t_2] \setminus D_{\gamma-1}(k)$ значень T такої, що

$$\operatorname{mes} D_\gamma(k) < 2 \sum_{j=1}^{\gamma-1} d_{3,\gamma-j} \| k \|^{-p-\varepsilon_{j+1}+\varepsilon_j}.$$

Покладемо $\varepsilon_j = \varepsilon / (\gamma + 1 - j)$, $j = 1, \ldots, \gamma$; $\varepsilon > 0$; тоді ряд

$$\sum_{|k|>0} \| k \|^{-p-\varepsilon_{j+1}+\varepsilon_j}$$

збігається. За лемою Бореля – Кантеллі (див. [8], розд. 1, § 1) міра Лебега множини значень $T = [t_1, t_2]$, для яких нерівність (25) не виконується для нескінченної множини значень $k \in \mathbb{Z}^p$, дорівнює нулю. Теорема 3 доведена.

***Наслідок* 1.** *Нехай*

$$\varphi_{\alpha_1}(x) \in H_{d-\alpha_1}(\Omega^p), \ \varphi_{m+\alpha_2}(x) \in H_{d-\alpha_2}(\Omega^p),$$

$$\alpha_1 = 1, \ldots, m; \ \ \alpha_2 = 1, \ldots, n-m; \ \ d > q + p((n-1)\omega/2 + \gamma - 1) + 1.$$

Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^\sigma$*) векторів* $y \in Q$ *і для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі* $\mathbb{R}$*) чисел* $T > 0$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $H_q^n(D^p)$, $q \geq n$, *який неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

Доведення випливає з теореми 3, леми 1 і зауваження 1.

***Зауваження* 2.** Результати роботи переносяться на рівняння вигляду (1) з молодшими членами, гіперболічні за Гордінгом, а також на системи таких рівнянь.

1. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
2. *Пташник Б. И., Штабалюк П. Й.* Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 4. – С. 669 – 678.
3. *Бобик І. О., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь: Всеукраїн. наук. конф. (Дрогобич, 25 – 27 січня 1994 р.). – Київ: Ін-т математики АН України, 1994. – С. 15.
4. *Бобик І. О.* Крайові задачі для гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами // Допов. АН України. – 1993. – № 6. – С. 5 – 9.
5. *Fritz J.* Restrictions on the coefficients of hiperbolic systems of partial differential equations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1977. – **74**, № 72. – P. 4150 – 4151.
6. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4.– С. 637 – 645.
7. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.
8. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 143 с.

Одержано 10.03.94