УДК 512.54

В. П. Шунков (ВЦ СО РАН, Красноярск, Россия)

T_0-ГРУППА И ЕЕ МЕСТО В ТЕОРИИ ГРУПП *

A class of T_0-groups is characterized which is closely associated with free Burnside groups with odd period not less than 665. Examples based on the well-known Adyan and Ol'shanskii constructions are given. In addition, the place of a finite group in the class of all groups is indicated.

Охарактеризовано клас T_0-груп, тісно пов'язаний із вільними бернсайдівськими групами непарного періоду не менш ніж 665. Наведено приклади, що ґрунтуються на відомих конструкціях С. І. Адяна та О. Ю. Ольшанського. Крім цього, вказано місце скінченної групи у класі всіх груп.

В 60-х годах П. С. Новиковым и С. И. Адяном были опубликованы результаты с полными доказательствами о группах конечного периода [1, 2], из которых, в частности, вытекает отрицательное решение знаменитой проблемы Бернсайда [4 – 6] о таких группах. Сформулируем эти результаты в виде следующей **теоремы**::

Свободная бернсайдовская группа $G = B(m, n)$ *с числом образующих* $m \geq 2$ *и с нечетным периодом* $n \geq 4381$ *бесконечна и централизатор любого нетривиального элемента из* G *является циклической подгруппой порядка* n.

Доказательство этой теоремы [1, 2] основано на идеях, кратко изложенных в [3].

Позднее С. И. Адян значительно понизил период n, т. е. сформулированная выше теорема верна для нечетных $n \geq 665$ и, более того, в группе $B(m, n)$ при нечетных $n \geq 665$ любая конечная подгруппа циклическая [7]. Там же С. И. Адяном построена группа без кручения $A(m, n)$, являющаяся центральным расширением циклической группы с помощью группы типа $B(m, n)$ при нечетном $n \geq 665$ (см. также [8]). С помощью групп типа $A(m, n)$, $B(m, n)$ ($m > 1$, n — нечетное число и $n \geq 665$) удается обосновать существование T_0-группы (см. определение и пример 1). Далее, А. Ю. Ольшанским построена группа без кручения $O(p)$, являющаяся центральным расширением циклической группы с помощью бесконечной p-группы $G(\infty)$, в которой все собственные подгруппы имеют порядки, равные простому числу p (для достаточно большого p) [9, 10] (см. теоремы 28.1, 31.4 в [10]). Опираясь на свойства групп типа $O(p)$, $C(\infty)$, автор находит другой пример T_0-группы (см. пример 2).

Итак, группы $A(m, n)$, $B(m, n)$ ($m > 1$, n — нечетное число, $n \geq 665$), $O(p)$, $G(\infty)$ (p — достаточно большое простое число), весьма специфические по своим свойствам, особенно группы $O(p)$, $C(\infty)$, оказались тесным образом связанными (через понятие T_0-группы) с общими вопросами вложения и расположения элементов простых порядков в группе (см. основную теорему и ее следствия).

Здесь мы будем придерживаться, в основном, стандартных обозначений [5, 11].

Напомним, что под группой, содержащей периодическую часть, подразумевается группа, в которой множество всех элементов конечных порядков составляет подгруппу этой группы.

Определение. *Пусть* G *— группа с инволюциями,* i *— ее некоторая инволюция, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) *все подгруппы вида* $\text{гр}(i, i^g)$, $g \in G$, *конечны;*

* Выполнена при поддержке Красноярского краевого фонда науки (грант № 7F0008) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00400).

© В. П. ШУНКОВ, 1999

2) *силовские* 2-*подгруппы из* G — *циклические или обобщенные группы кватернионов;*

3) *централизатор* $C_G(i)$ *бесконечен и содержит конечную периодическую часть;*

4) *нормализатор любой нетривиальной* (i)-*инвариантной конечной подгруппы из* G *либо содержится в* $C_G(i)$, *либо имеет периодическую часть, являющуюся группой Фробениуса с абелевым ядром и конечным неинвариантным множителем четного порядка;*

5) $C_G(i) \neq G$ *и для любого элемента* c *из* $G \setminus C_G(i)$, *строго вещественного относительно* i, *т. е.* $c^i = c^{-1}$, *существует в* $C_G(i)$ *такой элемент* c_s, *что подгруппа* $\text{гр}(c, c^{s_c})$ *бесконечна.*

Группу G с инволюцией i, удовлетворяющую относительно инволюции i условиям $1-5$, назовем T_0-*группой.*

Данное определение и определение T_0-группы из [12] эквивалентны.

***Пример* 1.** Пусть $A = A(m, n)$, $m > 1$, n — нечетное число, $n \geq 665$. Группа A имеет нетривиальный центр $Z(A) = (d)$, причем $A/Z(A) = A/(d) \simeq B(m, n)$ [7]. Рассмотрим группу $B = A\, г\, (x) = (A \times A) \leftthreetimes (x)$, где x — инволюция. Возьмем из $A \times A$ элемент $u = (d, d^{-1})$. Очевидно, $u \in Z(A \times A)$ и $u^x = u^{-1}$. Далее, группа $G = B/(u)$, и ее инволюция $i = x(u)$ удовлетворяет условиям $1-5$ из определения T_0-группы. В этом нетрудно убедиться, используя абстрактные свойства групп типа $A(m, n)$, $B(m, n)$ [7] (см. также введение к настоящей работе). Следовательно, $G = B/(u)$ является T_0-группой (относительно инволюции $i = x(u)$). Кроме этого, в $G = B/(u)$ любая максимальная периодическая подгруппа, содержащая инволюцию i, есть группа диэдра порядка $2n$.

***Пример* 2.** Пусть $V = O(p)$ (см. во введении определение групп типа $O(p)$, $C(\infty)$). Группа V имеет нетривиальный центр $Z(V) = (t)$ и $V/Z(V) = V/(t) \simeq C(\infty)$ [10].

Рассмотрим группу $T = V\, г\, (k) = (V \times V) \leftthreetimes (k)$, где k — инволюция. Возьмем из $V \times V$ элемент $b = (t, t^{-1})$. Очевидно, $b \in Z(V \times V)$ и $b^k = b^{-1}$. Возьмем фактор-группу $M = T/(b)$, а в ней — инволюцию $j = k(b)$. Далее, опираясь на абстрактные свойства групп $V = O(p)$, $C(\infty)$ [10], нетрудно показать, что группа M и ее инволюция j удовлетворяют условиям $1-5$ из определения. Следовательно, $M = T/(b)$ является T_0-группой (относительно инволюции $j = k(b)$). Заметим также, что в M любая максимальная периодическая подгруппа, содержащая инволюцию j, есть группа диэдра порядка $2p$.

Укажем некоторые элементарные свойства T_0-группы.

Пусть V — T_0-группа, i — ее некоторая инволюция. Справедливы следующие утверждения:

1. *Все инволюции из* V *сопряжены в* V *и силовские* 2-*подгруппы из* V *сопряжены в* V.

2. *Любая подгруппа из* V, *содержащая инволюции, либо содержит почти абелеву периодическую часть, либо является* T_0-*группой.*

3. *Если* i, j — *две различные инволюции из* V, *то* $\text{гр}(i, j, j^s)$ — T_0-*группа для некоторого элемента* s *из* $C_G(i)$.

4. $V = C_V(i)\mathfrak{M}$, *где* $\mathfrak{M} = \{ c \in V \setminus C_V(i) \mid$ — *элемент конечного нечетного порядка и* $c^i = c^{-1} \}$.

5. *Если* $V = \text{гр}(i^g \mid g \in V)$ *и* $L \lhd V$, *где* L *— группа без кручения, то* $L \leq Z(V)$.

6. *Если* B *— группа без кручения, то* $B \times V$ *—* T_0*-группа.*

7. *Если* t *— нетривиальный элемент конечного порядка из* $C_V(i)$, *то* $C_V(t) \leq C_V(i)$.

Докажем утверждение 1. Пусть k — инволюция из V. По условию 1 из определения подгруппа $\text{гр}(i, i^k)$ конечна. Но тогда, очевидно, и подгруппа $\text{гр}(i, k)$ конечна и $M = \text{гр}(i, k) = (ik) \leftthreetimes (i) = (ik) \leftthreetimes (k)$. Элемент ik имеет нечетный порядок, так как в противном случае M содержала бы элементарную абелеву подгруппу 4-го порядка вопреки условию 2 из определения. Следовательно, $|ik|$ — нечетное число и инволюции i, k сопряжены в M. Если S_i, S_k — силовские 2-подгруппы из G и $i \in S_i$, $k \in S_k$, то согласно доказанному выше $k^c = i$, где $c \in (ik)$. Отсюда и из условия 2 определения вытекает S_i, $S_k^c < C_G(i)$. Но по условию 3 определения $C_G(i)$ содержит конечную периодическую часть X. А так как S_i, $S_k^c < X$ и S_i, S_k^c — силовские 2-подгруппы из X, то согласно теореме Силова [5] S_i, S_k^c сопряжены в X, а значит, S_i, S_k^c сопряжены в V. Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждений 2 – 7 вытекает из определения и утверждения 1.

Основная теорема. *Пусть* G *— группа,* a *— ее элемент простого порядка* p, *удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *почти все подгруппы вида* $\text{гр}(a, a^g)$, $g \in G$, *конечны и почти все разрешимы;*

2) *в централизаторе* $C_G(a)$ *множество элементов конечных порядков конечно;*

3) *в группе* G *нормализатор любой нетривиальной* (a)*-инвариантной конечной подгруппы содержит периодическую часть;*

4) *при* $p \neq 2$ *и для* $q \in \pi(G)$, $q \neq p$, *любая* (a)*-инвариантная элементарная абелева* q*-подгруппа из* G *конечна.*

Тогда либо G *содержит почти нильпотентную периодическую часть, либо* G *—* T_0*-группа и* $p = 2$.

***Следствие* 1.** *Пусть* G *— (периодическая) группа,* a *— ее элемент простого порядка* $p \neq 2$, *удовлетворяющие условиям* 1 – 4 *основной теоремы.*

Тогда G *содержит почти нильпотентную периодическую часть.*

Следующее утверждение, как нетрудно показать, равносильно основной теореме и дает абстрактную характеризацию T_0-группы в классе всех групп.

***Следствие* 2.** *Пусть* G *— группа,* a *— ее элемент простого порядка* p. *Группа* G *тогда и только тогда является* T_0*-группой и* $p = 2$, *когда для пары* (G, a) *выполняются условия* 1 – 4 *основной теоремы и подгруппа* $\text{гр}(a^g \mid g \in G)$ *не является периодической почти нильпотентной.*

Частный случай, когда $p = 2$, требует специального выделения, так как в этом случае условие 4 основной теоремы является лишним, т. е. справедливы следующие утверждения.

***Следствие* 3.** *Пусть* G *— группа с инволюциями,* i *— ее некоторая инволюция, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) *почти все подгруппы вида* $\text{гр}(i, i^g)$, $g \in G$, *конечны;*

2) *в централизаторе* $C_G(i)$ *множество элементов конечных порядков конечно;*

3) *в группе G нормализатор любой нетривиальной (i)-инвариантной конечной подгруппы содержит периодическую часть.*

Тогда либо G содержит почти нильпотентную периодическую часть, либо G — T_0-группа.

Покажем на примерах, что условия $1-3$ из следствия 3 независимы, т. е. каждое из них не вытекает из двух остальных.

***Пример* 3.** Пусть $B = (c)\leftthreetimes(i)$, где $|c| = \infty$, $|i| = 2$ и $i^{-1}ci = c^{-1}$. Для пары (B, i) выполняются условия 2, 3, но не выполняется условие 1.

***Пример* 4.** Пусть X — бесконечная группа типа $PSL(2, K)$ над локально конечным полем K, i — ее некоторая инволюция. Так как X — локально конечная группа, то в ней по отношению к инволюции i выполняются условия 1, 3 следствия 4, но не выполняется условие 2 и X не является почти нильпотентной группой и T_0-группой.

***Пример* 5.** Пусть $D = (b)\leftthreetimes(x)$, где $|b| = \infty$, $|x| = 2$, $x^{-1}bx = b^{-1}$. Далее, пусть H — группа диэдра 8-го порядка. Группу H представим в виде $H = R\leftthreetimes(t)$, где $R = (i)\times(v)$ — элементарная абелева группа 4-го порядка, t — инволюция и $t^{-1}it = v$. В прямом произведении $H\times D$ возьмем подгруппу $A = (R\times(b))\leftthreetimes(k)$, где $|k| = tx$. Очевидно, для пары (A, i) выполняются условия 1, 2 следствия 3, но не выполняется условие 3. Кроме этого, A не является T_0-группой.

Следствие 4. *Пусть G — группа с инволюциями, i — ее некоторая инволюция. Группа G тогда и только тогда является T_0-группой, когда для пары (G, i) выполняются условия $1-3$ следствия 3 и подгруппа $\text{гр}(i^g \mid g \in G)$ не является периодической почти нильпотентной.*

Как видно из основной теоремы и следствий 2, 4, ключ к решению некоторых общих вопросов вложения и расположения элементов простых порядков в группе находится в глубине строения T_0-группы. Однако о строении таких групп мы пока располагаем сведениями на уровне определения T_0-группы и ее элементарных свойств $1-7$, перечисленных выше. В связи с этим является актуальной постановка вопросов, относящихся непосредственно к изучению T_0-группы. В качестве примера приведем следующие вопросы.

1. Существует ли простая T_0-группа?

2. Пусть U — T_0-группа, i — ее инволюция и $U = \text{гр}(i^g \mid g \in U)$. Что можно сказать о централизаторе $C_U(i)$? В частности, будет ли $C_U(i)$ аппроксимироваться периодическими группами?

В примерах 1, 2, очевидно, централизаторы $C_G(i)$, $C_M(j)$ аппроксимируются периодическими группами, причем фактор-группа централизатора $C_G(i)$ по его центру изоморфна группе типа $B(m, n)$, $m > 1$, n — нечетное число, $n \geq 665$. А в примере 2 фактор-группа централизатора $C_M(j)$ по его центру изоморфна группе типа $C(\infty)$ для достаточно большого простого числа p.

3. Что можно сказать о геометрии, соответствующей T_0-группе?

Этот вопрос заслуживает внимания хотя бы по аналогии с конечными группами. В теории конечных групп, если какой-то класс групп абстрактно охарактеризован, то ему, как правило, соответствует довольно содержательная конечная проективная геометрия. Кроме этого в примере 2 существенно использованы свойства групп типа $O(p)$, $C(\infty)$ для достаточно большого простого числа p, а доказательство их существования было получено А. Ю. Ольшанским с помощью геометрического метода, разработанного в [10].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — группа, a — ее элемент простого порядка p, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *почти все подгруппы вида* $\text{гр}(a, a^g)$, $g \in G$, *конечны и почти все разрешимы;*

2) *централизатор* $C_G(a)$ *конечен;*

3) *при* $p \neq 2$ *и для* $q \in \pi(G)$, $q \neq p$, *любая* (a)*-инвариантная элементарная абелева* q*-подгруппа конечна.*

Тогда G — периодическая почти нильпотентную группа.

Какое место занимает конечная группа в классе всех групп или, другими словами, каковы условия конечности, при которых группа становится конечной? Этот вопрос всегда был актуальным, в особенности, в связи с известными проблемами Бернсайда [5, 6]. Результат, который будет приведен ниже, в какой-то мере дает ответ на сформулированный выше вопрос.

Теорема 2. *Нетривиальная конечнопорожденная группа G тогда и только тогда конечна, когда в ней существует такой элемент a простого порядка p и выполняются следующие условия:*

1) *почти все подгруппы вида* $\text{гр}(a, a^g)$, $g \in G$, *конечны и почти все разрешимы;*

2) *централизатор* $C_G(a)$ *конечен;*

3) *при* $p \neq 2$ *и для* $q \in \pi(G)$, $q \neq p$, *любая* (a)*-инвариантная элементарная абелева* q*-подгруппа конечна.*

Доказательство. Пусть G — нетривиальная конечная группа. В этом случае порядок $|G|$ делится на некоторое простое число p и согласно теореме Силова [5] G имеет элемент a простого порядка p. Далее, ввиду конечности группы G, очевидно, для пары (G, a) условия $1-3$ выполняются. Достаточность условий $1-3$ вытекает из теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Доказательство результатов, приведенных в данной статье, можно найти в [12–16].

1. *Новиков П. С., Адян С. И.* О бесконечных периодических группах. I–III // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 1–3. – С. 212–244, 521–524, 709–731.
2. *Новиков П. С., Адян С. И.* О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка // Там же. – № 5. – С. 1176–1190.
3. *Новиков П. С.* О периодических группах // Докл. АН СССР. – 1959. – **127**, № 4. – С. 749–752.
4. *Bernside W.* On an unsettled question in the theory of discontinuous groups // Quart. J. Pure and Appl. Math. – 1902. – **33**. – P. 230–238.
5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – 3-е изд. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
6. *Кострикин А. И.* Вокруг Бернсайда. – М.: Наука, 1982. – 317 с.
7. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
8. *Адян С. И.* О некоторых группах без кручения // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**, № 3. – С. 459–468.
9. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечные группы с циклическими подгруппами // Докл. АН СССР. – 1979. – **245**, № 4. – С. 785–787.
10. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группе. – М.: Наука, 1989. – 448 с.
11. *Gorenstein D.* Finite groups. – New York: Harper and Row, 1968. – 528 p.
12. *Шунков В. П.* О расположении инволюций в группе // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 2. – С. 208–219.
13. *Шунков В. П.* К доказательству теоремы о T_0-группе // Теория групп (сб. научн. тр.). – Красноярск, 1994. – С. 1–20. – (Препринт / ВЦ СО РАН; № 1).
14. *Шунков В. П.* К доказательству теоремы о T_0-группе. Ч. 2 // Алгебраические системы (сб. научн. тр.). – Красноярск, 1994. – С. 24–42. – (Препринт / ВЦ СО РАН; № 3).
15. *Шунков В. П.* К доказательству теоремы о T_0-группе. Ч.3 // Теория групп (сб. научн. тр.). – Красноярск, 1996. – С. 25–33. – (Препринт / ВЦ СО РАН; № 14).
16. *Шунков В. П.* Завершение доказательства теоремы о T_0-группе. Ч. 4. – Красноярск, 1996. – 10 с. – (Препринт / ВЦ СО РАН; № 16).

Получено 27.01.97