УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ РІВНОМІРНОЇ *SK*-СПЛАЙН-ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

We establish necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of generalized interpolational *SK*-splines with the uniform distribution of points of interpolation.

Встановлено необхідні і достатні умови існування та єдиності узагальнених інтерполяційних *SK*-сплайнів з рівномірним розподілом вузлів інтерполяції.

Нехай $\Delta_n = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2\pi\}$ — довільне розбиття проміжку $[0, 2\pi)$ і $K(\cdot)$ — довільна сумовна 2π-періодична функція. SK-сплайном за розбиттям Δ_n називають (див., наприклад, [1, 2]) функцію $SK(\cdot)$ вигляду

$$SK(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} a_i K(\cdot - x_i) + a_{n+1}, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 0, \tag{1}$$

$$a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Множину функцій вигляду (1) будемо позначати через $SK(\Delta_n)$. Легко бачити, що $SK(\Delta_n)$ — лінійний многовид, розмірність якого не перевищує n $(\dim SK(\Delta_n) \le n)$.

Нехай далі $F = \{f_\nu\}_{\nu=1}^{n}$ — довільний набір дійсних чисел $f_\nu \in \mathbb{R}$, $\nu = \overline{1, n}$. Кожному такому набору F поставимо у відповідність сплайн $SK(F, \cdot)$ із множини $SK(\Delta_n)$, що інтерполює її в точках $0 \le y_1 < \ldots < y_n \le 2\pi$ (в узлах інтерполяції), тобто такий, що

$$SK(F, y_j) = f_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Цей сплайн називають інтерполяційним для даного набору F.

Зрозуміло, що для „n-періодичної" послідовності $\{f_\nu\}_{\nu=-\infty}^{+\infty}$, тобто такої, що для довільного $\nu \in \mathbb{Z}$: $f_{\nu+n} = f_\nu$, внаслідок 2π-періодичності функції $K(\cdot)$ із (2) випливають рівності

$$SK(F, y_j) = f_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

де послідовність $\{y_\nu\}_{\nu=-\infty}^{+\infty}$ така, що для довільного $\nu \in \mathbb{Z}$: $y_{\nu+n} = y_\nu + 2\pi$.

Далі будемо вважати, що SK-сплайни породжуються ядрами $K(\cdot)$ вигляду

$$K(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a(k)\cos kt + b(k)\sin kt), \tag{3}$$

де $a(k), b(k) \in \mathbb{R}$, $a^2(k) + b^2(k) \ne 0$, $k = 1, 2, \ldots$ і $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a^2(k) + b^2(k)} < \infty$.

У випадку, коли $K(\cdot)$ співпадають з ядрами Бернуллі $D_r(\cdot)$, тобто

$$K(t) = D_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - r\pi/2)}{k^r}, \quad r \in \mathbb{N},$$

$SK(\cdot)$ є відомими поліноміальними сплайнами порядку $r - 1$ мінімального дефекту за розбиттям Δ_n.

У даній роботі будемо розглядати питання про існування та єдиність інтерполяційних SK-сплайнів для рівномірного розбиття проміжку $[0, 2\pi]$ і сталого зсуву вузлів інтерполяції y, тобто при $x_j = 2\pi j/n$, $y_j = y + x_j$, $y \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$.

У випадку, коли $K(\cdot) = D_r(\cdot)$, $r = 2, 3, \ldots$, існування інтерполяційних поліноміальних сплайнів вивчалось Албергом, Нільсоном та Уолшем [3], Ю. М. Суботіним [4, 5], П. В. Галкіним [6], А. А. Женсикбаєвим [7], М. П. Корнійчуком [8] та ін.; у випадку

$K(\cdot) = D_{r,\beta}(\cdot)$, $r > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, де $D_{r,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(kt - \beta\pi/2)$, або

$K(\cdot) = P_{\rho,\beta}(\cdot)$, $0 < \rho < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, де $P_{\rho,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\rho^k}{k} \cos(kt - \beta\pi/2)$,

— В. Т. Шевалдіним [9 – 11]; у випадку $K(t) = \Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \beta\pi/2)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi(k) \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\psi(k)| < \infty$ — О. К. Кушпелем [1, 2, 12], О. І. Степанцем і автором даної статті [13].

Наступна теорема в термінах коефіцієнтів Фур'є ядра $K(\cdot)$ вигляду (3), що породжує простір SK-сплайнів, дає необхідні і достатні умови існування та єдиності інтерполяційних сплайнів $SK(F, y, \cdot)$ в залежності від значення y-зсуву вузлів інтерполяції. Її формулювання і доведення набирають компактного вигляду, якщо записати ядро $K(\cdot)$ вигляду (3) у комплексній формі

$$K(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty, \quad c_k \neq 0, \quad c_{-k} \neq \tilde{c}_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3'}$$

де $c_k = a(k) - ib(k)$, а $\tilde{c}_k = a(k) + ib(k)$.

Теорема 1. *Нехай ядро $K(\cdot)$, яке породжує SK-сплайни, має вигляд (3′) і $\{y_k\}_{k=1}^n$ — система рівномірно розміщених точок вигляду $y_k = y + x_k$, $x_k = 2k\pi/n$, $k = \overline{1, n}$, $y \in \mathbb{R}$. Для того щоб інтерполяційний сплайн $SK(F, y, \cdot)$ існував для довільного набору $F = \{f_\nu\}_{\nu=1}^n$, $f_\nu \in \mathbb{R}$, і був єдиним у множині $SK(\Delta_n)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного натурального j із проміжку $1 \leq j \leq n/2$ виконувалась нерівність*

$$\left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn+j}\, e^{imny} \right| \neq 0. \tag{4}$$

Доведення. Як випливає із леми 1.3 роботи [2], виконання при всіх $k \in \mathbb{N}$ умов $c_k \neq 0$ забезпечує лінійну незалежність системи функцій $\{K(\cdot - x_i), 1\}_{i=1}^n$, внаслідок чого сплайн $SK(\cdot) \in SK(\Delta_n)$ єдиним способом може бути зображений у вигляді (1). Запишемо інтерполяційні умови (2) у вигляді системи

$$\begin{gathered} \sum\nolimits_{i=1}^{n} a_i K(y_j - x_j) + a_{n+1} = f_j, \quad j = \overline{1, n}, \\ \sum\nolimits_{i=1}^{n} a_i = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

яку подамо у матричній формі

$$M\overline{A} = \overline{F}, \tag{6}$$

де

$$M = \begin{pmatrix} K(y_1 - x_1) & \ldots & K(y_1 - x_n) & 1 \\ K(y_2 - x_1) & \ldots & K(y_2 - x_n) & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(y_n - x_1) & \ldots & K(y_n - x_n) & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \overline{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Власні значення $\overline{\lambda}_j$ матриці M добре відомі [1, с. 10 – 13], а саме

$$\overline{\lambda}_j = \sum_{\nu=1}^{n} \exp(i2\pi j\nu/n)\, K(y - x_\nu), \quad j = \overline{1, n-1}, \tag{7}$$

$$\overline{\lambda}_n = \frac{1}{2}\left(K^*(y) + \sqrt{\left(K^*(y)\right)^2 + 4n}\right), \tag{8}$$

$$\overline{\lambda}_{n+1} = \frac{1}{2}\left(K^*(y) - \sqrt{\left(K^*(y)\right)^2 + 4n}\right), \tag{9}$$

де $K^*(y) = \sum_{\nu=1}^{n} K(y - x_\nu)$, i — уявна одиниця $(i^2 = -1)$.

Як відомо, $\det M = 0$ в тому і тільки в тому випадку, коли матриця M має нульове власне значення. З'ясуємо, в яких ситуаціях власні значення $\overline{\lambda}_j, j = \overline{1, n+1}$, матриці M можуть дорівнювати нулю. Згідно із рівностями (8) і (9) маємо $\overline{\lambda}_n > 0$, $\overline{\lambda}_{n+1} < 0$. Отже, нам залишилось дослідити значення $\overline{\lambda}_j$ при $j = \overline{1, n-1}$.

Розглянемо функції

$$\lambda_j(\cdot) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{2}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \exp(ijx_\nu)\, K(\cdot - x_\nu). \tag{10}$$

Підставивши у (10) замість ядра $K(\cdot)$ його розклад у комплексний ряд Фур'є, одержимо

$$\lambda_j(y) = \frac{2}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \exp(ijx_\nu)\, \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(ik(y - x_\nu)) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(i(ky + x_\nu(j-k))) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(iky) \sum_{\nu=1}^{n} \exp(ix_\nu(j-k)) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Оскільки

$$\sum_{\nu=1}^{n} \exp(ix_\nu(j-k)) = \sum_{\nu=1}^{n} \exp\left(i\frac{2\nu\pi(j-k)}{n}\right) =$$

$$= \frac{\exp\left(i\frac{2\pi(j-k)}{n}\right)(1 - \exp(i2\pi(j-k)))}{1 - \exp\left(i\frac{2\pi(j-k)}{n}\right)} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ якщо } j - k \neq mn, \; m \in \mathbb{Z}; \\ n, \text{ якщо } j - k = mn, \; m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{12}$$

то на основі співвідношень (12) із рівностей (11) виводимо

$$\lambda_j(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{j-mn} e^{i(j-mn)y} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn+j} e^{i(mn+j)y}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Тоді, враховуючи, що для кожного $\alpha \in \mathbb{R}$: $\left|e^{i\alpha}\right| = 1$, із (13) одержуємо

$$\left|\lambda_j(y)\right| = \left|e^{ijy}\right| \left|\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn+j} e^{imny}\right| = \left|\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn+j} e^{imny}\right|. \quad (14)$$

Таким чином, для того, щоб $\overline{\lambda}_j \neq 0$, $j = \overline{1, n-1}$ (як це випливає із співвідношення $2\overline{\lambda}_j / \pi = \lambda_j(y)$ і рівностей (14)), необхідно і достатньо, щоб сума числового ряду $\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{mn+j} e^{imny}$ не дорівнювала нулеві, тобто

$$\left|\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn+j} e^{imny}\right| \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n-1. \quad (15)$$

Для остаточного доведення теореми 1 нам залишилось показати, що співвідношення (15) досить перевіряти для j із проміжку $1 \leq j \leq n/2$.

Враховуючи умову $\tilde{c}_{-k} = c_k$, а також співвідношення (13), одержуємо

$$\lambda_{n-j}(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn+n-j} e^{i(mn+n-j)y} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn-j} e^{i(mn-j)y} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_{mn+j} e^{-i(mn+j)y} = \tilde{\lambda}_j(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, n-1}. \quad (16)$$

Рівності (16) показують, що виконання співвідношень $\lambda_j(y) \neq 0$ при $1 \leq j \leq n/2$ автоматично забезпечує справедливість цих же співвідношень для всіх $1 \leq j \leq$ $\leq n-1$.

Теорему доведено.

Оскільки

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn+j} e^{imny} = \sum_{m=0}^{\infty} (a(mn+j) - ib(mn+j))(\cos mny + i \sin mny) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} (a(mn-j) + ib(mn-j))(\cos mny - i \sin mny) = a(j) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} ((a(mn+j) + a(mn-j)) \cos mny + (b(mn+j) + b(mn-j)) \sin mny) -$$

$$- i\left(b(j) + \sum_{m=1}^{\infty} (b(mn+j) - b(mn-j)) \cos mny + (-a(mn+j) + a(mn-j)) \sin mny\right), \quad (17)$$

то з урахуванням рівностей (17) теорему 1 можна сформулювати в термінах коефіцієнтів Фур'є $a(k)$ і $b(k)$ ядра $K(\cdot)$ таким чином.

Теорема 1′. *Нехай ядро $K(\cdot)$, яке породжує SK-сплайни, має вигляд* (3) *і $\{y_k\}_{k=1}^n$ — система рівномірно розміщених точок $y_k = y + x_k$, $x_k = 2k\pi/n$, $k = \overline{1, n}$, $y \in \mathbb{R}$. Для того щоб інтерполяційний сплайн $SK(F, y, \cdot)$ існував для довільного набору $F = \{f_\nu\}_{\nu=1}^n$ дійсних чисел і був єдиним у множині $SK(\Delta_n)$, необхідно і достатньо, щоб ряди*

$$a(j) + \sum_{m=1}^{\infty} ((a(mn+j) + a(mn-j)) \cos mny + (b(mn+j) + b(mn-j)) \sin mny), \quad (18)$$

$$b(j) + \sum_{m=1}^{\infty} (b(mn+j) - b(mn-j)) \cos mny + (-a(mn+j) + a(mn-j)) \sin mny \quad (19)$$

одночасно не дорівнювали нулеві при жодному натуральному j *із проміжку* $1 \le$ $\le j \le n/2$.

Теорема 1 у випадку, коли $K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \beta\pi/2)$, $\psi(k) \neq 0$, $\beta \in$ $\in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k| < \infty$, була встановлена О. К. Кушпелем, для значень y-зсуву вузлів інтерполяції, що дорівнюють відповідно 0 або π/n.

***Зауваження* 1.** При виконанні умов теореми 1′, як випливає із лем 1.6 і 1.7 роботи [2], функції $SK(F, y, \cdot)$ можна однозначно зобразити у вигляді

$$SK(F, y, \cdot) = \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot \overline{SK}(y, \cdot - x_k), \quad (20)$$

де $\overline{SK}(y, \cdot - x_k)$ — фундаментальні сплайни, які обчислюються за допомогою формули

$$\overline{SK}(y, \cdot) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\rho_j(\cdot)\,\rho_j(y) + \sigma_j(\cdot)\,\sigma_j(y)}{\left|\lambda_j(y)\right|^2},$$

в якій функції $\lambda_j(\cdot)$, $j = \overline{1, n}$, означаються рівностями (10), а

$$\rho_j(\cdot) = \operatorname{Re}(\lambda_j(\cdot)), \quad \sigma_j(\cdot) = \operatorname{Im}(\lambda_j(\cdot))$$

(нагадаємо [1, с. 17], що фундаментальні сплайни $\overline{SK}_i(y, \cdot) = \overline{SK}(y, \cdot - x_i)$, $i =$ $= \overline{0, n-1}$, які фігурують у зображенні (20), задовольняють співвідношення $\overline{SK}_i(y, y_j) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{0, n-1}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), а система сплайнів $\{\overline{SK}_i(y, \cdot)\}_{i=0}^{n-1}$ утворює базис у просторі $SK(\Delta_n)$).

Відзначимо (див. роботу В. М. Тихомирова [14]), що необхідною умовою того, щоб інтерполяційний SK-сплайн $SK(f; y, \cdot)$ існував і був єдиним у множині $SK(\Delta_n)$ для довільного набору $F = \{f_j\}_{j=1}^{n}$, $f_j \in \mathbb{R}$, $y_k = y + 2k\pi/n$, $k = \overline{1, n}$, при всіх дійсних значеннях параметра y ($y \in \mathbb{R}$), є непарність числа n точок розбиття проміжку $[0, 2\pi]$; іншими словами, при парному n завжди знайдеться y ($y \in (0, 2\pi/n]$) — зсув вузлів інтерполяції, при якому визначник основної матриці системи рівнянь (6) буде дорівнювати нулеві і, отже, для зсуву y задача про існування та єдиність інтерполяційних SK-сплайнів не має розв'язку.

Із теореми 1 випливає таке твердження.

Наслідок. *Нехай ядро* $K(\cdot)$, *що породжує* SK-*сплайни, має вигляд* (3) *і його коефіцієнти Фур'є підпорядковані умові*

$$|c_j| > \sqrt{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left|c_{mn+j}\right| + \left|c_{mn-j}\right|\right), \quad 1 \le j < n/2, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

де

$$|c_k| \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{a^2(k) + b^2(k)}; \quad (22)$$

$F = \{f_\nu\}_{\nu=1}^{n}$ — *довільний набір дійсних чисел,* $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ — *система рівномірно розміщених точок вигляду* $y_k = y + 2k\pi/n$, $y \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$. *Тоді інтерполяційний сплайн* $SK(F, y, \cdot)$ *існує і єдиний у множині* $SK(\Delta_n)$ *для набору* F *у таких випадках:*

а) *при всіх значеннях* $y \in \mathbb{R}$, *якщо* n *непарне;*

б) *при всіх значеннях* $y \in \mathbb{R}$ *за виключенням точок вигляду* $y = \xi + 2\pi k/n$, $k \in \mathbb{Z}$, *де* $\xi \in (0, 2\pi/n]$ — *корені рівняння*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(a\left((2m+1)\frac{n}{2}\right) \cos\left((2m+1)\frac{n}{2}\xi\right) + b\left((2m+1)\frac{n}{2}\right) \sin\left((2m+1)\frac{n}{2}\xi\right)\right) = 0, \quad (23)$$

якщо n *парне.*

Доведення. Покажемо, що при виконанні умови (21) ряди (18) і (19) одночасно не перетворюються в нуль при $1 \le j < n/2$, $j \in \mathbb{N}$. Для цього запишемо ряди (18) і (19) у вигляді

$$|c_j| \cos\left(\frac{\beta(j)\pi}{2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} |c_{mn+j}| \cos\left(mny - \frac{\beta(mn+j)\pi}{2}\right) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} |c_{mn-j}| \cos\left(mny - \frac{\beta(mn-j)\pi}{2}\right), \quad (18')$$

$$|c_j| \sin\left(\frac{\beta(j)\pi}{2}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} |c_{mn+j}| \sin\left(mny - \frac{\beta(mn+j)\pi}{2}\right) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} |c_{mn-j}| \sin\left(mny - \frac{\beta(mn-j)\pi}{2}\right), \quad (19')$$

де $|c_k|$ визначається співвідношенням (22), а $\beta(k)$ — рівностями

$$\cos\frac{\pi\beta(k)}{2} = \frac{a(k)}{\sqrt{a^2(k)+b^2(k)}}, \quad \sin\frac{\pi\beta(k)}{2} = \frac{b(k)}{\sqrt{a^2(k)+b^2(k)}}.$$

Виберемо довільне натуральне число j із проміжку $1 \le j < n/2$. Нехай, наприклад,

$$\cos\frac{\beta(j)\pi}{2} = \frac{a(j)}{\sqrt{a^2(k)+b^2(k)}} \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Тоді очевидно, що

$$\sin\frac{\beta(j)\pi}{2} = \frac{b(j)}{\sqrt{a^2(k)+b^2(k)}} \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$$

і, отже, на основі (21) можемо записати

$$\left| |c_j| \sin\frac{\beta(j)\pi}{2}\right| \ge \frac{|c_j|}{\sqrt{2}} > \sum_{m=1}^{\infty} \left(|c_{mn+j}| + |c_{mn-j}|\right) \ge$$
$$\ge \left| -\sum_{m=1}^{\infty} |c_{mn+j}| \sin\left(mny - \frac{\beta(mn+j)\pi}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} |c_{mn-j}| \sin\left(mny - \frac{\beta(mn-j)\pi}{2}\right)\right|. \quad (24)$$

Із співвідношення (24) випливає, що сума ряду (19) не дорівнює нулеві.

Якщо ж

$$\cos\frac{\beta(j)\pi}{2} \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right],$$

то з урахуванням (21) одержимо

$$\left| \left| c_j \right| \cos \frac{\beta(j)\pi}{2} \right| \geq \frac{\left| c_j \right|}{\sqrt{2}} > \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left| c_{mn+j} \right| + \left| c_{mn-j} \right| \right) \geq$$

$$\geq \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left| c_{mn+j} \right| \cos \left(mny - \frac{\beta(mn+j)\pi}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left| c_{mn-j} \right| \cos \left(mny - \frac{\beta(mn-j)\pi}{2} \right) \right|. \quad (25)$$

Отже, як випливає із (25), сума ряду (18) не дорівнює нулеві. Тому на підставі теореми 1 переконуємось у виконанні умови а) наслідку. При парному числі n точок розбиття Δ_n залишається лише врахувати, що при $j = n/2$ ряд (18) співпадає із лівою частиною рівності (23), а сума ряду (19) дорівнює 0 при всіх значеннях $y \in \mathbb{R}$. Наслідок доведено.

Зауваження 2. Якщо n є парним числом, а неперервне на $[0, 2\pi]$ ядро $K(\cdot)$ має ту властивість, що будь-яке рівняння $K(t) - T_{n/2-1}(t) = 0$ може мати в проміжку $[0, 2\pi)$ з урахуванням кратності не більше ніж n коренів, то, як випливає із теореми 5 роботи [15] (див. також [16]), рівняння (23), яке фігурує у випадку б) наслідку, має в $(0, 2\pi/n]$ єдиний корень ξ_0.

В подальшому теорема 1′ і наслідок будуть використані для обчислення точних значень поперечників за Колмогоровим класів згорток із ядрами вигляду (3) у рівномірній та інтегральній метриках.

1. *Кушпель А. К.* Экстремальные свойства сплайнов и поперечники классов периодических функций в пространстве $C_{2\pi}$. – Киев, 1984. – 41 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.25).
2. *Кушпель А. К.* SK-сплайны и точные оценки поперечников функциональных классов в пространстве $C_{2\pi}$. – Киев, 1985. – 47 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.51).
3. *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.* Best approximation and convergence properties of higher-order spline approximations // J. Math. and Mech. – 1965. – **14**, № 2. – P. 231 – 243.
4. *Субботин Ю. Н.* О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **78**. – С. 24 – 42.
5. *Subbotin Yu. N.* Interpolating splines // Approximation theory. Proc. Conf. Poznan, 22 – 26 Aug. 1972. – Warszawa: PWN, 1975. – P. 221 – 234.
6. *Галкин П. В.* О разрешимости задачи периодической сплайн-интерполяции // Мат. заметки. – 1970. – **8**, № 5. – С. 563 – 573.
7. *Женсыкбаев А. А.* Некоторые вопросы приближения сплайнами в функциональных пространствах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Днепропетровск, 1973. – 11 с.
8. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
9. *Шевалдин В. Г.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Мат. заметки. – 1992. – **51**, № 6. – С. 126 – 136.
10. *Шевалдин В. Г.* Оценки снизу поперечников классов периодических функций с ограниченной дробной производной // Там же. – 1993. – **53**, № 2. – С. 145 – 151.
11. *Шевалдин В. Г.* Истокообразные сплайны и поперечники классов периодических функций: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Екатеринбург, 1996. – 30 с.
12. *Кушпель А. К.* Вопросы оптимального приближения функциональных классов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1989. – 22 с.
13. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* О существовании интерполяционных SK-сплайнов // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1546 – 1553.
14. *Тихомиров В. М.* Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1, 1]$ // Мат. сб. – 1969. – **80**, № 2. – С. 290 – 304.
15. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 5. – С. 691 – 701.
16. *Дзядык В. К.* К вопросу о наилучшем приближении абсолютно монотонных и некоторых других функций в метрике L при помощи тригонометрических полиномов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – **25**. – С. 173 – 238.

Одержано 11.06.97,
після доопрацювання — 26.05.98