УДК 62.501.52

М. В. Тригуб (Харк. техн. ун-т радіоелектроніки)

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ НЕЛІНІЙНИМИ СТОХАСТИЧНИМИ СИСТЕМАМИ

The synthesis of optimal control of nonlinear stochastic systems which are described by the Ito equations is reduced to the solution of recurrence relations derived from the Bellman stochastic equation.

Синтез оптимального керування нелінійними стохастичними системами, що описуються рівняннями Іто, зведено до розв'язку рекурентних співвідношень, виведених із стохастичного рівняння Беллмана.

Нехай рух динамічної системи описується векторним диференціальним рівнянням

$$dx = f(t, x, u)\,dt + g(t, x)\,d\tilde{\gamma}(t), \tag{1}$$

де t — час на відрізку $[t_0, T]$; x — вектор стану, що належить області $\overline{G} \subset \subset R^n$; $R^1 \supset u$ — керування; $R^l \supset \tilde{\gamma}$ — сепарабельний вінерів процес [1].

Припустимо, що задана область $G_0 \subset [t_0, T] \times \overline{G} \subset R^{n+1}$ початкових невипадкових величин (t_0, x_0). Позначимо через U_φ клас функцій $\varphi(t, x)$ що задовольняють такі умови: $\varphi(t, x)$ — вимірна по t для будь-якого фіксованого $x \in G \subset \overline{G}$ (G — певна замкнена область);

$$\|\varphi(t, x)\| \le k(1 + \|x\|), \qquad (t, x) \in [t_0, T] \times G,$$

а також $\varphi(t, x)$ задовольняє умову Ліпшіца по $x \in G$ рівномірно на $[t_0, T] \times \times G$.

Будемо вважати припустимими керування вигляду

$$u(t) = \varphi(t, x(t))$$

та позначати $u \in U_\varphi$.

Оскільки $\gamma = d\tilde{\gamma}/dt$ — гауссів білий шум з нульовим середнім значенням $M[\gamma(t)] = 0$, то інколи рівняння (1) записують формально в такому вигляді [2]:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u) + g(t, x)\gamma(t) \tag{2}$$

(кореляційна матриця випадкового процесу $\gamma(t)$ має вигляд

$$\operatorname{cov}[\gamma(t); \gamma(\tau)] = M[\gamma(t)\gamma^T(\tau)] = Q_\gamma(t)\delta(t - \tau),$$

де $Q_\gamma(t)$ — симетрична невід'ємно означена $(l \times l)$-матриця.

Рівняння (2), як і рівняння (1), необхідно розглядати як зображення інтегрального рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\,d\tau + \int_{t_0}^{t} g(\tau, x(\tau))\,d\tilde{\gamma}(\tau). \tag{3}$$

Другий інтеграл у рівнянні (3) є стохастичним інтегралом Іто [1, 2].

Припустимо, що функції $f(t, x, \varphi(t, x))$, $g(t, x)$ вимірні по t та x при $t \in \in [t_0, T]$, $x \in G$ і задовольняють умови

$$\|f(t, x, \varphi(t, x))\| + \|g(t, x)\| \le k(1 + \|x\|),$$

$$\|f(t, x', \varphi(t, x')) - f(t, x'', \varphi(t, x''))\| + \|g(t, x') - g(t, x'')\| \le k\|x' - x''\|,$$

де k — відповідна стала, $t \in [t_0, T]$, $x \in G$.

При наведених умовах для кожної початкової точки $(t_0, x_0) \in G_0$ стохастичне інтегральне рівняння (3) визначає єдиний дифузійний [1] стохастичний процес $\{x(t); t \in [t_0, T]\}$. Припустимо, що область $[t_0, T] \times G$ з імовірністю 1 охоплює всі дифузійні процеси, що виходять з області G_0.

Задача формулюється таким чином: необхідно вибрати керування $u \in U_\varphi$, яке мінімізує функціонал

$$J(t_0, x_0, u) = M\left\{[F(T, x(T))] + \int_{t_0}^{T} \omega(t, x(t), u(t))\, dt\right\}$$

для кожної початкової точки $(t_0, x_0) \in G_0$.

Сформульована задача є задачею синтезу оптимального керування.

Припустимо, що функції $f_i(t, x, u)$, $i = \overline{1, n}$, $\omega(t, x, u)$, $F(T, x(t))$ при $x \in \overline{G}$ та при припустимих $u \in U_\varphi$ є збіжними рядами

$$f_i(t, x, u) = \bar{f}_i(t, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_{ik}(t, x) u^k, \tag{4}$$

$$\omega(t, x, u) = \omega(t, x) + \sum_{k=2}^{\infty} \overline{\omega}_k(t, x) u^k, \tag{5}$$

де

$$\begin{gathered} \bar{f}_{ik}(t, x) = \overline{b}_{ik}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{f}_{ik}^{(j)}(t, x), \\ \overline{\omega}_k(t, x) = \overline{d}_k(t) + \sum_{j=2}^{\infty} \overline{\omega}_k^{(j)}(t, x), \quad \overline{d}_2 \ne 0, \\ \bar{f}_i(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{f}_i^{j}(t, x), \\ \omega(t, x) = \sum_{j=2}^{\infty} \overline{\omega}^{(j)}(t, x), \end{gathered} \tag{6}$$

$$F(T, x(T)) = \sum_{j=2}^{\infty} F^{(j)}(T, x(T)) \tag{7}$$

з коефіцієнтами, обмеженими функціями часу $t \in [t_0, T]$.

Необхідно для наведених функцій знайти розв'язок поставленої задачі.

Лема. *Припустимо, що існують область $G \subset \overline{G}$, керування $\varphi_0(t, x)$ та скалярна функція $V(t, x)$, $t \in [t_0, T]$, $x \in G$, що задовольняють такі умови:*

1) V, V_t, V_x, V_{xx} *неперервні при* $t \in [t_0, T]$, $x \in G$;

2) *для всіх* $t \in [t_0, T]$, $x \in G$

$$0 = V_t(t, x) + L_{\varphi^0} V(t, x) + \omega\left(t, x, \varphi^0(t, x)\right), \tag{8}$$

$$0 \le V_t(t, x) + L_u V(t, x) + \omega(t, x, u); \tag{9}$$

3) *для* $t = T$

$$V(T, x(T)) = F(T, x(T)) \tag{10}$$

(диференціальний оператор L_u *визначається співвідношенням* [2]

$$L_u V(t,x) = \left(f(t,x,u), \frac{\partial V}{\partial x} \right) + 0{,}5\,\mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x} g(t,x) Q_\gamma(t) g^T(t,x) \right]. \tag{11}$$

Тоді керування $u^0(t) = \varphi^0(t, x(t))$ *є оптимальним.*

Доведення. Нехай φ — припустиме керування, а $x(t)$ та $x^0(t)$ — траєкторії процесів x_φ та x_{φ^0} відповідно для $(t_0, x_0) \in G_0$.

Формула інтегрування Іто [2] має вигляд

$$M[V(T, x(T))] = V(t,x) + M\left\{ \int_t^T \left[L_\varphi V(\tau, x(\tau)) + V_\tau(\tau, x(\tau)) \right] d\tau \right\}, \tag{12}$$

оскільки, згідно з (10), при виконанні умови (8) співвідношення (12) набирає вигляду

$$V(t,x) = -M\left\{ \int_t^T \left[L_{\varphi^0} V\left(\tau, x^0(\tau)\right) + V_\tau\left(\tau, x^0(\tau)\right) \right] d\tau - F(T, x(T)) \right\} =$$

$$= M\left\{ F(T, x(T)) + \int_t^T \omega\left(\tau, x^0(\tau), \varphi^0\left(\tau, x^0(\tau)\right)\right) d\tau \right\}. \tag{13}$$

Аналогічно при виконанні умови (9) співвідношення (12) має вигляд

$$V(t,x) = -M\left\{ \int_t^T \left[L_{\varphi^0} V\left(\tau, x^0(\tau)\right) + V_\tau\left(\tau, x^0(\tau)\right) \right] d\tau - F(T, x(T)) \right\} \le$$

$$\le M\left\{ F(T, x(T)) + \int_t^T \omega(\tau, x(\tau), \varphi(\tau, x(\tau))) d\tau \right\}. \tag{14}$$

При $t = t_0$, $x = x_0$ з (13), (14) випливає

$$V(t_0, x_0) = J(u^0) \le J(u). \tag{15}$$

З (15) випливає, що керування $u^0(t) = \varphi\left(t, x^0(t)\right)$, яке задовольняє умови (8) – (10), є оптимальним.

Лему доведено.

Умови (8), (9) можна об'єднати та подати у вигляді рівняння

$$\inf_{u \in U_\varphi} \left[\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + L_u V(t,x) + \omega(t,x,u) \right] = 0. \tag{16}$$

Граничною умовою для нього є умова (10).

Рівняння (16) з граничною умовою (10) є функціональним рівнянням Беллмана, а тому оптимальний синтез керування знаходимо в результаті розв'язків рівнянь

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \omega(t,x,u) +$$

$$+ 0{,}5\,\mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x \partial x} g(t,x) Q_\gamma(t) g^T(t,x) \right] = 0, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(t,x,u)}{\partial u} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega(t,x,u)}{\partial u} = 0 \tag{18}$$

з крайовою умовою (10).

Розв'язок рівнянь (17), (18) з умовою (10) шукаємо у вигляді рядів

$$V(t,x) = V^{(0)}(t,x) + V^{(2)}(t,x) + \ldots + V^{(r)}(t,x) + \ldots, \tag{19}$$

$$u(t) = \varphi(t, x(t)) = u^{(1)}(t, x(t)) + \ldots + u^{(r-1)}(t, x(t)) + \ldots. \tag{20}$$

Підставимо формально ряди (4) – (7), (19), (20) у рівняння (17), (18) з умовою (10) та прирівняємо члени, що мають однаковий порядок r відносно $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ $(i_1 + \ldots + i_n = r)$, до нуля. В результаті отримаємо дві нескінченні системи рівнянь та нескінченну систему умов для визначення форм

$$V^{(0)}(t,x),\ V^{(2)}(t,x),\ \ldots,\ V^{(r)}(t,x),\ \ldots,\ u^{(1)}(t,x),\ \ldots,\ u^{(r-1)}(t,x),\ \ldots.$$

При цьому два перші рівняння першої системи та перше рівняння другої системи

$$\frac{\partial V^{(0)}(t,x)}{\partial t} + 0{,}5\,\mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2 V^{(2)}(t,x)}{\partial x \partial x} g(t,x) Q_\gamma(t) g^T(t,x)\right] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V^{(2)}(t,x)}{\partial x_i}\left[\bar{f}_i^{(1)}(t,x) + \bar{b}_{i1}(t) u^{(1)}(t,x)\right] + \tag{21}$$

$$+ \frac{\partial V^{(2)}(t,x)}{\partial t} + \bar{\omega}^{(2)}(t,x) + \bar{d}_2(t)\left(u^{(1)}(t,x)\right)^2 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V^{(2)}(t,x)}{\partial x_i} \bar{b}_{i1}(t) + 2\bar{d}_2(t) u^{(1)}(t,x) = 0 \tag{22}$$

з двома першими умовами

$$V^{(0)}(T, x(T)) = 0, \tag{23}$$

$$V^{(2)}(t, x(T)) = F^{(2)}(T, x(T)) \tag{24}$$

визначають форми $V^{(0)}(t,x)$, $V^{(2)}(t,x)$, $u^{(1)}(t,x)$ функції $V(t,x)$ та керування $\varphi(t,x)$ відповідно для лінійної задачі [2]

$$x_i(t) = \bar{f}_i^{(1)}(t,x) + \bar{b}_{i1}(t) u^{(1)}(t,x) + \sum_{j=1}^{l} g_{ij}(t,x) \gamma_j(t), \tag{25}$$

$$J(t_0, x_0, u) = M\left\{\int_{t_0}^{T}\left[\bar{\omega}^2(t,x) + \bar{d}_2(t)\left(u^{(1)}(t,x)\right)^2\right]dt + F^{(2)}(T, x(T))\right\} \to \inf_{u \in U_\varphi}. \tag{26}$$

Припустимо, що

$$V^{(2)}(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Інші форми $V^{(r)}(t,x)$, $u^{(r-1)}(t,x)$ знаходимо із співвідношень [3]

$$-\left(DV^{(r)}(t,x)\right)_{(25)} = \sum_{k=2}^{r-1} \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i^{(k)}(t,x) \frac{\partial V^{(r-k+1)}}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{r-2} \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_{i1}(t) u^{(k)}(t,x) \frac{\partial V^{(r-k+1)}}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{p=2}^{r-1} \sum_{s=2}^{r-p+1} \sum_{k_1 \ldots k_p \geq 1}^{\sum k_p = r-s+1} \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_{ip}(t) u^{(k_1)}(t,x) \ldots u^{(k_p)}(t,x) \frac{\partial V^{(s)}}{\partial x_i} +$$

$$+\sum_{p=2}^{r-2}\sum_{k=1}^{r-3}\sum_{s=2}^{r-p}\sum_{k_1\ldots k_p\geq 1}^{\sum k_p=r-s+1}\sum_{i=1}^{n}\bar{f}_{ip}^{(k)}(t,x)u^{(k_1)}(t,x)\ldots u^{(k_p)}(t,x)\frac{\partial V^{(s)}}{\partial x_i}+$$

$$+\sum_{p=2}^{r-2}\sum_{s=2}^{r-k}\sum_{i=1}^{n}u^{(k)}(t,x)\bar{f}_{i1}^{(r-s-k+1)}(t,x)\frac{\partial V^{(s)}}{\partial x_i}+\overline{\omega}^{(r)}(t,x)+$$

$$+\bar{d}_2(t)\sum_{k=2}^{r-2}u^{(k)}(t,x)u^{(r-k)}(t,x)+\sum_{p=s}^{r}\sum_{k_1\ldots k_p\geq 1}^{\sum k_p=r}\bar{d}_k(t)u^{(k_1)}(t,x)\ldots u^{(k_p)}(t,x)+$$

$$+\sum_{s=1}^{r-2}\sum_{p=2}^{r-1}\sum_{k_1\ldots k_p\geq 1}^{\sum k_p=r-1}\overline{\omega}_p^{(s)}(t,x)u^{(k_1)}(t,x)\ldots u^{(k_p)}(t,x)+$$

$$+\sum_{s=2}^{r-2}\overline{\omega}_1^{(s)}(t,x)u^{(r-s)}(t,x)\,, \tag{27}$$

$$-2\bar{d}_2(t)u^{(r-1)}(t,x)=\sum_{i=1}^{n}\bar{b}_{i1}(t)\frac{\partial V^{(r)}}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{r-2}\sum_{i=1}^{n}\bar{f}_{i1}^{(k)}(t,x)\frac{\partial V^{(r-k)}}{\partial x_i}+$$

$$+\sum_{p=2}^{r-1}\sum_{s=2}^{r-p+1}\sum_{k_1\ldots k_{p-1}\geq 1}^{\sum k_{p-1}=r-s}\sum_{i=1}^{n}p\,\bar{b}_{ip}(t)u^{(k_1)}(t,x)\ldots u^{(k_p)}(t,x)\frac{\partial V^{(s)}}{\partial x_i}+$$

$$+\sum_{p=2}^{r-2}\sum_{s=2}^{r-p}\sum_{k=1}^{r-s}\sum_{k_1\ldots k_{p-1}\geq 1}^{\sum k_{p-1}=r-s-k}\sum_{i=1}^{n}p\,\bar{f}_{ip}^{(k)}(t,x)u^{(k_1)}(t,x)\ldots u^{(k_{p-1})}(t,x)\frac{\partial V^{(s)}}{\partial x_i}+$$

$$+\overline{\omega}_1^{(r-1)}(t,x)+\sum_{p=3}^{r}\sum_{k_1\ldots k_{p-1}\geq 1}^{\sum k_{p-1}=r-1}\sum_{i=1}^{n}p\,\bar{d}_p(t)u^{(k_1)}(t,x)\ldots u^{(k_{p-1})}(t,x)+$$

$$+\sum_{s=1}^{r-2}\sum_{p=2}^{r-1}\sum_{k_1\ldots k_{p-1}\geq 1}^{\sum k_p=r-s-1}p\,\overline{\omega}_p^{(s)}(t,x)u^{(k_1)}(t,x)\ldots u^{(k_{p-1})}(t,x) \tag{28}$$

з умовами

$$V^{(r)}(T,x(T))=F^{(r)}(T,x(T))\,.$$

У рівнянні (27) символом $\left(DV^{(r)}(t,x)\right)_{(25)}$ позначено інфінітезимальний оператор $\partial/\partial t+L$ функції $V^{(r)}(t,x)$ в силу лінійної системи (25), тобто такий оператор, в якому L визначається за допомогою співвідношення

$$\left(LV^{(r)}(t,x)\right)_{(25)}=0{,}5\,\mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2V^{(r)}(t,x)}{\partial x\partial x}g(t,x)Q_\gamma(t)g^T(t,x)\right]+$$

$$+\left(\left[\bar{f}^{(1)}(t,x)+\bar{b}_1(t)u^{(1)}(t,x)\right]^T,\frac{\partial V^{(r)}(t,x)}{\partial x}\right),$$

де $u^{(1)}(t,x)$ — оптимальне керування для лінійної задачі (25), (26), $x(t)$ — розв'язок системи (25) при

$$u(t)=u^{(1)}(t,x(t))\,.$$

Згідно з формулою інтегрування Іто [1], функцію $V^{(r)}(t,x)$ можна зобразити у вигляді

$$V^{(r)}(t,x) = -M\left\{-F(T,x(T)) + \int_0^T \left[\left(LV^{(r)}(\tau,x(\tau))\right)_{(25)} + \frac{\partial V^{(r)}(\tau,x(\tau))}{\partial\tau}\right]dt\right\}. \quad (29)$$

Легко бачити, що у цю формулу інтегрування замість інфінітезимального оператора $\left(DV^{(r)}(t,x)\right)_{(25)}$ можна підставити праву частину рекурентного співвідношення (27) за умови, що $x(t)$ — розв'язок лінійної задачі (25), (26) з оптимальним керуванням $u^{(1)}(t,x)$.

Після визначення форми $V^{(r)}(t,x)$ можна знайти форму $u^{(r-1)}(t,x)$ функції керування з рівняння (28).

Таким чином, після розв'язку лінійної задачі, користуючись рекурентними співвідношеннями (27), (28), можна послідовно визначити форми $V^{(r)}(t,x)$, $u^{(r-1)}(t,x)$ для $r=3,4,\ldots$.

Замінюючи у формулі інтегрування (29) t на t_0, а x на x_0, одержуємо вираз для $V^{(r)}(t_0,x_0)$.

Легко бачити, що $V(t_0,x_0)=J(t_0,x_0,u^0)$, де u^0 — оптимальне керування для нелінійної задачі.

Для доведення збіжності рядів (19), (20) побудуємо ряди

$$\overline{V}_0 + \overline{V}_2 z^2 + \ldots + \overline{V}_r z^r + \ldots, \quad (30)$$

$$\overline{u}_1 z + \ldots + \overline{u}_{r-1} z^{r-1} + \ldots, \quad (31)$$

що формально є мажорантами рядів (19), (20) при деяких $z \le \rho < \overline{\rho}$.

Зауважимо, що для збіжності рядів (19), (20) можна виписати такі нерівності [4, 5]:

$$\begin{gathered}
\left|\bar{f}_i^{(r)}(t,x)\right| \le \bar{f}_r^i z^r \le \bar{f}_r z^r, \\
\left|\bar{f}_{ik}^{(r)}(t,x)\right| \le \bar{f}_{ki} z^r, \qquad \left|\overline{b}_{ik}(t)\right| \le \overline{b}_k^i \le \overline{b}_k, \\
\left|\overline{\omega}^{(r+1)}(t,x)\right| \le \overline{\omega}_{r+1} z^{r+1}, \qquad \left|\overline{\omega}_k^{(r)}(t,x)\right| \le \overline{\omega}_{kr} z^r, \\
\left|\overline{d}_k(t)\right| \le d_k, \qquad r,k=1,2,\ldots, \qquad i=\overline{1,n},
\end{gathered} \quad (32)$$

при $t\in[t_0,T]$, $x\in\overline{G}$, $z<\overline{\rho}$.

Коефіцієнти радів, складених із сум членів, що стоять у правих частинах нерівностей (32), а також значення $z<\overline{\rho}$, при яких ці ряди збігаються, можна знайти аналогічно тому, як це зроблено у роботах [5, 6].

Припустимо, що у нас є шукані ряди (19), (20), члени яких задовольняють при $t\in[t_0,T]$, $x\in G$, $z\le\rho<\overline{\rho}$ такі нерівності:

$$\begin{gathered}
\left|V^{(0)}(t,x)\right| \le \overline{V}_0, \qquad \left|V^{(r)}(t,x)\right| \le \overline{V}_r z^r, \\
\left|\frac{\partial V^{(r)}(t,x)}{\partial x_i}\right| \le r\overline{c}_r^i \overline{V}_r z^{r-1} \le r\overline{c}\,\overline{V}_r z^{r-1}, \\
\left|\frac{\partial V^{(r)}(t,x)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right| \le r(r-1)\tilde{c}_r^{ij} \overline{V}_r z^{r-2} \le r(r-1)\tilde{c}\tilde{V}_r z^{r-2}, \qquad i,j=\overline{1,n}, \\
\left|u^{(r-1)}(t,x)\right| \le \overline{u}_{r-1} z^{r-1}, \qquad r=2,3,\ldots; \qquad i,j=\overline{1,n},
\end{gathered} \quad (33)$$

де $\overline{c}$, $\tilde{c}$ — коефіцієнти, не залежні від порядку форм рядів функцій

$$\frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_i\,\partial x_j}, \qquad i,j=\overline{1,n}.$$

Використовуючи залежності (27), (28) та нерівності (32), (33), запишемо наступні оцінки для форм $V^{(r)}(t,\boldsymbol{x})$, $u^{(r-1)}(t,\boldsymbol{x})$ рядів (19), (20) [5, 6]:

$$\left|V^{(r)}(t,\boldsymbol{x})\right| \le \overline{V}_r z^r,$$

$$\left|u^{(r-1)}(t,\boldsymbol{x})\right| \le \overline{u}_{r-1} z^{r-1}, \qquad r>2, \qquad \boldsymbol{x}\in G, \qquad z\le\rho.$$

Теорема. *Ряди*

$$\sum_{r=2}^{\infty} V^{(r)}(t,\boldsymbol{x}), \quad \sum_{r=2}^{\infty} u^{(r-1)}(t,\boldsymbol{x}), \quad \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\partial V^{(r)}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t},$$

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{\partial V^{(r)}(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_i}, \quad \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\partial^2 V^{(r)}(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_i\,\partial x_j}, \qquad i,j=\overline{1,n},$$

збігаються майже рівномірно у певній замкненій області $G\subset\overline{G}$.

Доведення. Побудуємо допоміжні рівняння

$$n_1\left[\sum_{p=1}^{\infty}\bar f_p\mu^p+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\bar f_{kp}\mu^p u_1^k(\mu)\right]V_1(\mu) +$$

$$+ \sum_{p=2}^{\infty}\overline{\omega}_p\mu^p + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\tilde\omega_{kp}u_1^k(\mu) + \tilde c\,\mathrm{Sp}\left(\tilde V_2\overline{g}\,\overline{Q}_\gamma\overline{g}^T\right) - \overline{K}\frac{dV_1(\mu)}{d\mu} - \overline{K}_0\tilde V_0 = 0, \quad (34)$$

$$n_1\left[\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\bar f_{kp}\mu^p u_1^{k-1}(\mu)\right]V_1(\mu) + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}k\tilde\omega_{kp}\mu^p u_1^{k-1}(\mu) = 0 \qquad (35)$$

$$\left(n_1=n\overline{c},\ g=\max_{\substack{t_0\le t\le T\\ \mathbf{x}\in G}} g(t,x),\ \overline{Q}_\gamma=\max_{t_0\le t\le T}Q_\gamma(t)\right),$$

$\overline{\rho}>\mu$ — параметр, який не порушує збіжності рядів

$$\sum_{p=1}^{\infty}\bar f_p\mu^p, \quad \sum_{p=0}^{\infty}\tilde f_{kp}\,\mu^p, \quad \sum_{p=2}^{\infty}\overline{\omega}_p\,\mu^p, \quad \sum_{p=0}^{\infty}\tilde\omega_{kp}\,\mu^p$$

$$\left(\tilde f_{k0}=\overline{b}_k,\ \tilde\omega_{ko}=d_k,\ \tilde f_{kp}=\bar f_{kp},\ \tilde\omega_{kp}=\overline{\omega}_{kp},\ p\ge 1\right).$$

Функції $V_2(\mu)$, $u_1(\mu)$ будемо шукати у вигляді рядів

$$V_1(\mu) = \sum_{s=2}^{\infty} s\tilde V_s u^{s-1}, \qquad (36)$$

$$u_1(\mu) = \sum_{s=2}^{\infty}\tilde B_{s-1}\mu^{s-1}, \qquad (37)$$

які згідно з теорією диференціальних рівнянь [7] збігаються при $\mu\le\rho<\overline{\rho}$.

Підставимо ряди (36), (37) у рівняння (34), (35). В результаті одержимо нескінченну множину рівнянь. Перше з них

$$\overline{K}_0\tilde V_0 = \tilde c\tilde V_2\,\mathrm{Sp}\left(\overline{g}\,\overline{Q}_\gamma\overline{g}^T\right) - 2\overline{K}\tilde V_2$$

визначає зв'язок між коефіцієнтами $\tilde V_0$ та $\tilde V_2$. Взявши коефіцієнт $\tilde V_0 \ge \overline{V}_0$, виберемо константу $\overline{K}_0$ таким чином, щоб $\tilde{V}_2 = \overline{V}_2$ ($\overline{K}$ знаходимо з (38)).

Наступні рівняння нескінченної множини рівнянь відносно коефіцієнтів $\tilde{V}_4$, $\tilde{B}_1$ мають вигляд

$$2n_1\bar{f}_1\tilde{V}_2 + 2n_1\tilde{f}_{10}\tilde{B}_1\tilde{V}_2 + \overline{\omega}_2 + \tilde{\omega}_{20}\tilde{B}_1^2 - 2\overline{K}\,\overline{c}\,\overline{V}_4 = 0, \tag{38}$$

$$2n_1\bar{f}_{10}\tilde{V}_2 - \overline{\omega}_{20}\tilde{B}_1 = 0 \qquad (\overline{K} = -1). \tag{39}$$

Взявши коефіцієнт $\tilde{B}_1$, з рівняння (39), ми можемо знайти коефіцієнт $\tilde{V}_4 \geq \geq \overline{V}_4$ з рівняння (38), підбираючи відповідно константу $\overline{K}$. Таким чином, одержимо нерівності

$$\tilde{B}_1 \geq \overline{u}_1, \qquad \tilde{V}_4 \geq \overline{V}_4. \tag{40}$$

Одержавши коефіцієнти $\tilde{V}_0$, $\tilde{V}_2$, $\tilde{B}_1$, $\tilde{V}_4$ ($\tilde{V}_3 = 0$), ми можемо знайти всі інші коефіцієнти $\tilde{V}_5, \ldots, \tilde{V}_r, \ldots, \tilde{B}_3, \ldots, \tilde{B}_{r-1}$ з наступних рівнянь одержаної нескінченної множини рівнянь. При цьому виконуватимуться нерівності $\tilde{V}_r \geq \overline{V}_r$, $\tilde{B}_{r-1} \geq \overline{u}_{r-1}$, $r \geq 2$.

Оскільки ряд (36) є збіжним при $\mu \leq \rho$, його можна інтегрувати та диференціювати, після чого одержимо $\sum\limits_{s=2}^{\infty}\tilde{V}_s\mu^s$,

$$\sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)\tilde{V}_s\mu^{s-2}. \tag{41}$$

Ряди

$$\tilde{V}_0 + \sum_{s=2}^{\infty}\tilde{V}_s\mu^s, \qquad \sum_{s=2}^{\infty}\tilde{B}_{s-1}\mu^{s-1}$$

є мажорантами рядів (30), (31) при $\mu \leq \rho$, тому що виконуються нерівності (40).

В свою чергу, ряди (30), (31) є мажорантами рядів (19), (20) у певній замкненій області $G \subset \overline{G}$ при $z \leq \rho$. Ряди (36), (41), $\tilde{K}\sum\limits_{s=2}^{\infty}\tilde{V}_s\mu^s$ ($\tilde{K}$ — деяка константа) є мажорантами рядів

$$\sum_{s=2}^{\infty}\frac{\partial V^{(s)}(t,x)}{\partial x_i}, \qquad \sum_{s=2}^{\infty}\frac{\partial^2 V^{(s)}(t,x)}{\partial x_i\,\partial x_j}, \qquad i,j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{s=2}^{\infty}\frac{\partial V^{(s)}(t,x)}{\partial t} \quad \text{при} \quad x \in G, \quad \mu \leq \rho.$$

Область G можна оцінити за допомогою ρ.

В результаті розв'язку системи (1) при $(t_0, x_0) \in G_0$ одержуємо дифузійний процес. Припустимо, що область G_t: $[t_0, T] \times G$ з імовірністю 1 охоплює всі оптимальні процеси, що виходять з області початкових умов G_0.

В такому розумінні збіжність вказаних у теоремі рядів буде збіжністю з імовірністю 1. Теорему доведено.

Зауваження. Одержані результати можна перенести на випадок, коли $T = = \infty$. При цьому необхідно припустити, що форми $\bar{f}_i^{(1)}(x)$, $i = \overline{1,n}$, $\overline{\omega}^{(2)}(x)$ мають постійні коефіцієнти (не залежать від часу), а також для системи першого наближення (25) виконуються умови загальності положень [8].

У цьому випадку $F(T, x(T)) = 0$, а умову $V(T, x(T)) = F(T, x(T))$ необхідно замінити умовою $V(t, x) \to 0$ рівномірно відносно t при $x \to 0$, $x \in G$.

Приклад. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= e^t x_2(t) + x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\sin\left(e^{-t} x_1(t)\right) + u(t) + e^{-t/2}\gamma(t), \end{aligned} \tag{42}$$

де $\gamma(t)$ — білий шум з інтенсивністю 1 та математичним сподіванням $M[\gamma(t)] = 0$.

Необхідно вибрати керування $u(t) = \varphi(t, x(t))$ так, щоб воно мінімізувало критерій якості

$$J(x_0, u) = M\left[\int_0^\infty \left(x_2^2 + u^2\right) dt\right], \tag{43}$$

$$x_0 \in G_0 : |x_{i0}| \le 1, \quad i = 1, 2.$$

Застосовуючи перетворення

$$x_1(t) = e^t y_1(t),$$

$$x_2(t) = y_2(t),$$

задачу (42), (43) зведемо до вигляду

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+2} \frac{y_1^{2k-1}}{(2k-1)!} + \overline{u}(t) + e^{-t/2}\gamma(t) = -\sin y_1 + \overline{u}(t) + e^{-t/2}\gamma(t); \end{aligned} \tag{44}$$

$$J(y_0, \overline{u}) = M\left[\int_0^\infty \left(y_2^2 + \overline{u}^2\right) dt\right], \tag{45}$$

де $G_{y0} : |y_{i0}| \le 1$, $i = 1, 2$.

Оскільки задача (44), (45) є стаціонарною, то необхідно спочатку одержати її розв'язок, а потім, застосовуючи обернене перетворення

$$y_1(t) = e^{-t} x_1(t),$$

$$y_2(t) = x_2(t),$$

знайти розв'язок задачі (42), (43).

Функцію $\overline{V}(t, y)$ та керування $\overline{u}(t) = \overline{\varphi}(y(t))$ для задачі (44), (45) будемо шукати у вигляді

$$\overline{V}(t, y) = \overline{V}^{(0)}(t, y) + \overline{V}^{(2)}(y) + \ldots + \overline{V}^{(2s)}(y) + \ldots,$$

$$\overline{\varphi}(y) = \overline{u}^{(1)}(y) + \overline{u}^{(3)}(y) + \ldots + \overline{u}^{(2s-1)}(y) + \ldots,$$

де

$$\overline{V}^{(0)}(t, y) = V_0(t), \qquad \overline{V}^{(2)}(y) = V_{20} y_1^2 + V_{11} y_1 y_2 + V_{02} y_2^2, \ldots,$$

$$\overline{V}^{(2s)}(y) = V_{2s0} y_1^{2s} + V_{2s-11} y_1^{2s-1} y_2 + \ldots + V_{1\,2s-1} y_1 y_2^{2s-1} + V_{0\,2s} y_2^{2s},$$

$$\overline{u}^{(1)}(y) = \tilde{u}_1 y_1 + \tilde{u}_2 y_2, \ldots,$$

$$\overline{u}^{(2s-1)}(y) = \tilde{u}_{2s-1\,0} y_1^{2s-1} + \tilde{u}_{2s-1\,1} y_1^{2s-2} y_2 + \ldots + \tilde{u}_{1\,2s-2} y_1 y_2^{2s-2} + \tilde{u}_{0\,2s-1} y_2^{2s-1}.$$

Розглянемо спочатку лінійну задачу

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= -y_1(t) + \overline{u}(t) + e^{-t/2}\gamma(t), \\ J(y_0, \overline{u}) &= M\left[\int_0^\infty \left(y_2^2 + \overline{u}^2\right)dt\right], \quad y_0 \in G_{y0}, \end{aligned} \tag{46}$$

розв'язуючи яку з використанням рівнянь (21), (23), одержуємо

$$\overline{V}_0(t) = e^{-t}, \quad \overline{V}^{(2)}(y) = V_{20}y_1^2 + V_{02}y_2^2 = y_1^2 + y_2^2,$$
$$\overline{u}(t) = \overline{\varphi}(y(t)) = -y_2(t).$$

Співвідношення для визначення членів $\overline{V}^{(2s)}(y)$, $s = 2, 3, \dots$, у відповідності з (27) будуть мати вигляд

$$(-1)^{s-1}\left(D\overline{V}^{(2s)}(y)\right)_{(46)} = \frac{\partial \overline{V}^{(2)}(y)}{\partial y_2}\frac{y_1^{2s-1}}{(2s-1)!} = \frac{2y_2y_1^{2s-1}}{(2s-1)!}, \quad s = 2, 3, \dots,$$

звідки випливає

$$\overline{V}^{(2s)}(y) = (-1)^{s-1}\frac{2y_1^{2s}}{(2s)!}, \quad s = 2, 3, \dots .$$

В результаті одержуємо такий вираз для функції $\overline{V}(t, y)$:

$$\overline{V}(t, y) = e^{-t} + y_2^2 + 2(-1)^{s+1}\frac{y_1^{2s}}{(2s)!}, \quad s = 1, 2, \dots .$$

У змінних x_i, $i = 1, 2$, функції $V(t, x)$, $u(t) = \varphi(x(t))$ будуть мати вигляд

$$V(t, x) = e^{-t} + x_2^2 + 2(-1)^{s+1}\frac{\left(e^{-t}x_1\right)^{2s}}{(2s)!} = e^{-t} + x_2^2 + 2\left[1 - \cos\left(e^{-t}x_1\right)\right],$$
$$u(t) = -x_2(t).$$

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1965. – 656 с.
2. *Райтенберг Л. Н.* Автоматическое управление. – М.: Физматгиз, 1978. – 552 с.
3. *Тригуб М. В.* Синтез субоптимального управления стохастическими системами одного класса // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 6. – С. 43 – 54.
4. *Альбрехт Е. Г.* Об оптимальной стабилизации нелинейных систем // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, № 5. – С. 836 – 844.
5. *Тригуб М. В.* Приближенно-оптимальная стабилизация одного класса нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 1. – С. 34 – 43.
6. *Тригуб М. В.* Об оптимальном управлении квазилинейными системами // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1280 – 1295.
7. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 436 с.
8. *Кириллова Ф. М.* Аналитическое конструирование регуляторов // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, № 3. – С. 433 – 439.

Одержано 19.11.96