УДК 517.9; 532.5

О. Н. Комаренко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОПЕРАТОРНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧІ ПРО ЗБУРЕНИЙ РУХ ТІЛА З РІДИНОЮ, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ

By using operator methods, we study a boundary-value problem for a motion, which is a perturbation of a uniform rotation about a fixed axle, of a body with cavity partially filled with an ideal liquid. Existence and uniqueness of generalized solutions with finite energy is proved, a sufficient condition for stability of the motion is found, and properties of the spectrum of the problem are studied.

Операторними методами досліджується початково-крайова задача для збуреного руху тіла з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною, відносно рівномірного обертання системи навколо фіксованої осі. Доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків зі скінченною енергією, одержана достатня умова стійкості руху і встановлені деякі властивості спектра задачі.

Задача про рух симетричної дзиги з порожниною, повністю заповненою ідельною рідиною, була розглянута в [1]. Цій задачі присвячена також робота [2] та ряд інших. Важливі питання теорії руху тіла з рідиною розглядаються в [3]. В [4] досліджуються малі збурення обертового руху тіла з рідиною, підвішеного на струні.

Операторними методами досліджувалася задача про малі коливання рівномірно завихреної ідеальної рідини з вільною поверхнею в нерухомій посудині [5]. Ряд задач теорії руху тіла як з ідельною, так і з в'язкою рідиною, які досліджуються операторними методами, зібрані в [6], де наведена значна бібліографія робіт, що мають відношення до розглядуваної задачі та близьких до неї.

Задача про близький до рівномірного обертання навколо осі рух тіла з порожниною, частково заповненою рідиною, розглядалася в роботах [7–9] та ін. В [7] за допомогою функції впливу Пуанкаре методом розділення змінних досліджувався частинний випадок циліндричної порожнини. Використовувалися також наближені методи для оцінки стійкості обертового руху тіла з рідиною, яка має вільну поверхню [9].

1. Формулювання задачі. Вважаємо, що тверде тіло є осесиметричним; порожнина в ньому, яка частково заповнена ідеальною рідиною, має форму тіла обертання і їхні осі симетрії збігаються. Нехай тіло закріплене в деякій точці осі симетрії таким чином, що може обертатися навколо неї, і на нього діють сили тяжіння з прискоренням $\overline{g}$, направленим вертикально вниз.

При вказаних умовах тіло і рідина можуть перебувати в стані стаціонарного обертового руху, а саме: рівномірно обертатися як одне тверде ціле навколо осі симетрії тіла, що займає вертикальне положення, з постійною кутовою швидкістю ω_0. Розглянемо малий збурений рух тіла і рідини відносно вказаного стану рівномірного обертання.

Виберемо нерухому систему координат $Ox'y'z'$ з центром в нерухомій точці тіла і віссю Oz', направленою вертикально вгору. Введемо допоміжну рухому систему координат $Ox_1y_1z_1$, у якої вісь Oz_1 співпадає з віссю Oz' і яка обертається навколо неї з постійною кутовою швидкістю ω_0. Виберемо рухому систему координат $Oxyz$, жорстко зв'язану з тілом, що співпадає з системою $Ox_1y_1z_1$ при вказаному вище рівномірному обертанні тіла з рідиною, і нехай $\overline{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, — орти цієї системи.

Положення системи $Oxyz$ відносно $Ox_1y_1z_1$ при збуреному русі визначається вектором малого повороту $\overline{\delta} = \sum_{i=1}^{3}\delta_i\,\overline{e}_i$, де δ_i, $i = 1, 2, 3$, — кути Ейлера – Крилова, які разом з їхніми похідними вважаємо малими величинами першого порядку. Для векторів кутової швидкості тіла $\overline{\omega}$, кутового прискорення

$\bar{\varepsilon}$ і вектора прискорення сил тяжіння $\bar{g}$ з точністю до величин першого порядку малості одержимо такі вирази в системі $Oxyz$:

$$\bar{\omega} = \omega_0 \bar{e}_3 + \omega_0 \bar{e}_3 \times \bar{\delta} + \frac{d\bar{\delta}}{dt}, \tag{1}$$

$$\bar{\varepsilon} = \omega_0 \bar{e}_3 \times \frac{d\bar{\delta}}{dt} + \frac{d^2 \bar{\delta}}{dt^2}, \quad \bar{g} = -g \bar{e}_3 + g(\delta_2 \bar{e}_1 - \delta_1 \bar{e}_2).$$

Збурений рух рідини характеризується такими величинами: $\bar{w}$ — вектор малих переміщень частинок рідини відносно системи $Oxyz$, P — тиск у рідині, ρ — густина рідини, $\bar{f}$ — інтенсивність масових сил, $\bar{r}$ — радіус-вектор, який визначає положення точок системи, $\bar{v}_1 = \partial \bar{w} / \partial t$ — відносна швидкість частинок рідини.

Позначимо через Σ і Q відповідно вільну поверхню рідини і область, яку вона займає в системі $Oxyz$ при незбуреному обертовому русі. Враховуючи, що тиск на вільній поверхні постійний і дорівнює атмосферному, $P = P_{\text{ат}}$, з рівняння Ейлера руху ідеальної рідини одержимо таке рівняння для Σ:

$$\frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) - g(z - z_0) = 0, \tag{2}$$

і вираз для тиску в рідині

$$P_0 = \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) - g(z - z_0) + P_{\text{ат}}. \tag{3}$$

З рівняння (2) видно, що поверхня Σ буде параболоїдом обертання.

Нехай ξ — відхилення вільної поверхні рідини $\tilde{\Sigma}$ в збуреному русі від поверхні Σ в напрямі зовнішньої нормалі до неї. Функції відхилення $\xi(t)$, переміщення $\bar{w}(t)$ і швидкості $\bar{v}_1(t)$, а також їхні похідні будуть малими величинами першого порядку.

Збурений рух тіла з рідиною в рухомій системі координат $Oxyz$ описується [10] системою лінійних диференціальних рівнянь і крайовими умовами, які мають вигляд

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + \left(\frac{d^2 \bar{\delta}}{dt^2} \times \bar{r}\right) + 2\omega_0 \left(\bar{e}_3 \times \frac{d\bar{w}}{dt}\right) +$$

$$+ \omega_0 \left(\bar{e}_3 \times \frac{d\bar{\delta}}{dt}\right) \times \bar{r} + \rho^{-1} \nabla p_1 = \bar{f} \quad \text{в області} \quad Q, \tag{4}$$

де

$$p_1 = P - P_0 - \rho\omega_0 (\bar{e}_3 \times \bar{r}) \left(\frac{d\bar{\delta}}{dt} \times \bar{r}\right) + \rho\left(\omega_0^2 z + g\right)(y\delta_1 - x\delta_2),$$

$$\operatorname{div} \bar{w} = 0 \quad \text{в області} \quad Q, \tag{5}$$

$$\rho \int_Q \bar{r} \times \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} dQ + \hat{J}_0 \frac{d^2 \bar{\delta}}{dt^2} + \rho\omega_0 \int_Q \bar{e}_3 \times \left(\bar{r} \times \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}\right) dQ + K_2 \frac{\partial \xi}{\partial t} +$$

$$+ \omega_0 (2A - C) \left(\bar{e}_3 \times \frac{d\bar{\delta}}{dt}\right) + \omega_0 \bar{e}_3 \times K_2 \xi + \rho g \int_\Sigma (\bar{r} \times \bar{e}_3)\, \xi \, dS +$$

$$+ \left(\omega_0^2 (C - A) + \text{mag}\right)\left(\delta_1 \bar{e}_1 + \delta_2 \bar{e}_2\right) = \overline{M}_1, \tag{6}$$

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

— тензор інерції тіла з рідиною в стані стаціонарного обертання, який є сумою тензорів інерції тіла і рідини, $\hat{J}_0 = \hat{J}_T + \hat{J}_P$, $\overline{r}_c = -a\overline{e}_3$ — центр ваги системи в цьому стані, оператор $K_2\xi = \rho\omega_0 \int_\Sigma \overline{r} \times (\overline{e}_3 \times \overline{r}) \xi \, dS$; крайові умови:

$$w_n = \xi \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{7}$$

$w_n = (\overline{w} \cdot \overline{n})$, $\overline{n}$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\Sigma + S$,

$$w_n = 0 \quad \text{на твердій стінці} \quad S, \tag{8}$$

$$p_1 = \rho N \xi - \rho\omega_0 (\overline{e}_3 \times \overline{r}) \left(\frac{d\overline{\delta}}{dt} \times \overline{r} \right) + \rho \left(\omega_0^2 z + g \right) (y\delta_1 - x\delta_2) \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{9}$$

де $N = \sqrt{\omega_0^4 \left(x^2 + y^2 \right) + g^2}$. Початкові умови мають вигляд

$$\overline{w}(0) = \overline{w}^{(0)}, \quad \overline{\delta}(0) = \overline{\delta}^{(0)}, \quad \overline{v}_1(0) = \overline{v}_1^{(0)}, \quad \left. \frac{d\overline{\delta}}{dt} \right|_{t=0} = \overline{\delta}^{(1)}, \tag{10}$$

де $\overline{w}^{(0)}$, $\overline{\delta}^{(0)}$, $\overline{v}_1^{(0)}$ і $\overline{\delta}^{(1)}$ — довільні початкові дані.

2. Зведення крайової задачі до операторного рівняння в гільбертовому просторі. Введемо необхідні для подальшого дослідження простори функцій і оператори, а також вкажемо деякі їхні властивості. Нехай $\overline{L}_2$ — гільбертовий простір вектор-функцій $\overline{w} = \sum_{i=1}^3 w_i \overline{e}_i$, в яких скалярні функції w_i будуть задані і сумовні з квадратом в області Q, $L_2(\Sigma)$ — гільбертовий простір скалярних функцій, визначених і сумовних з квадратом на поверхні Σ, $L_{2,\Sigma}$ — підпростір функцій $\xi \in L_2(\Sigma)$, для яких $\int_\Sigma \xi \, dS = 0$.

Далі будемо вважати, що область Q, яку займає рідина в стаціонарному стані рівномірного обертання, ліпшіцова [6]. Ця умова виконується для широкого класу порожнин, частково заповнених рідиною, в яких стінка є гладкою поверхнею.

Для простору вектор-функцій $\overline{L}_2$ має місце розширений розклад Вейля на ортогональні підпростори [6]

$$\overline{L}_2 = \overline{J}_0 \oplus \overline{G}_{h,S} \oplus \overline{G}_{0,\Sigma,h} \oplus \overline{G}_0, \tag{11}$$

де J_0 — підпростір соленоїдальних векторних полів $\overline{w}$ $(\operatorname{div} \overline{w} = 0)$ з нормальною складовою на границі, рівною нулю $(w_n = 0)$, $\overline{G}_{h,S}$ — підпростір потенціальних гармонічних полів $\overline{w}$ з нормальною складовою $w_n = 0$ на S, $\overline{G}_{0,\Sigma,h}$ — підпростір потенціальних гармонічних полів з потенціалами, рівними нулю на Σ, $\overline{G}_0$ — підпростір потенціальних полів з потенціалами, рівними нулю на всій границі.

Позначимо через H^1 простір Соболєва функцій, визначених в Q, які мають узагальнені перші похідні, сумовні з квадратом. Нехай H_Σ^1 — підпростір всіх функцій $\varphi \in H^1$, для яких $\int_\Sigma \varphi \, dS = 0$. Цей підпростір з нормою Діріхле

$$|\varphi|_1^2 = \int_Q |\nabla\varphi|^2 dQ$$

і відповідним скалярним добутком

$$(\varphi, \psi)_1 = \int_Q \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dQ$$

розкладається в ортогональну суму підпросторів [6]

$$H^1_\Sigma = H^1_{h,S} \oplus H^1_{0,\Sigma,h} \oplus H^1_0, \tag{12}$$

де через $H^1_{h,S}$ позначається підпростір гармонічних функцій φ, які задовольняють умову $\partial\varphi/\partial n = 0$ на S, $H^1_{0,\Sigma,h}$ — підпростір гармонічних функцій, рівних нулю на Σ, H^1_0 — підпростір функцій, рівних нулю на всій границі $\Sigma + S$. Функції φ із підпросторів $H^1_{h,S}$, $H^1_{0,\Sigma,h}$, H^1_0 будуть потенціалами для векторних полів відповідно із підпросторів $\overline{G}_{h,S}$, $\overline{G}_{0,\Sigma,h}$, $\overline{G}_0$, причому відображеня $\varphi \to \nabla\varphi$, яке кожній функції φ ставить у відповідність її градієнт $\nabla\varphi$, буде ізометричними відображенням перших підпросторів відповідно на другі.

Нехай γ_Σ — оператор сліду, який кожній функції $\varphi \in H^1_\Sigma$ ставить у відповідність її звуження $\varphi|_\Sigma$ на поверхню Σ. Для ліпшіцових областей Q оператор γ_Σ, що діє з H^1_Σ в $L_{2,\Sigma}$, буде повністю неперервним оператором. Ядром у нього буде підпростір $H^1_{0,\Sigma,h} \oplus H^1_0$. Позначимо через $\overline{\gamma}_\Sigma$ звуження оператора γ_Σ на підпростір гармонічних функцій $H^1_{h,S} \subset H^1_\Sigma$. Для оператора $\overline{\gamma}_\Sigma$, що діє з $H^1_{h,S}$ в $L_{2,\Sigma}$, існує обернений оператор $\overline{\gamma}_\Sigma^{-1}$.

Введемо тепер важливий для розглядуваної задачі оператор T [11], який породжується крайовою задачою Неймана

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в області } Q, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = f \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } S. \tag{13}$$

Нехай $\overline{\gamma}^*_\Sigma$ — оператор, спряжений до визначеного вище оператора сліду $\overline{\gamma}_\Sigma$. Він буде обмеженим оператором, що діє з простору $L_{2,\Sigma}$ в $H^1_{h,S}$. Позначимо через ∂ обернений до нього оператор, $\partial = \overline{\gamma}^{*-1}_\Sigma$. Операторне рівняння

$$\partial\varphi = f \tag{14}$$

відповідає задачі Неймана (13). Розв'язки цього рівняння називаються узагальненими розв'язками задачі Неймана (13). Можна показати, що кожний розв'язок задачі Неймана (13) буде її узагальненим розв'язком, і навпаки, кожний гладкий узагальнений розв'язок буде задовольняти рівняння і крайові умови задачі (13). Позначимо через C суперпозицію операторів $\overline{\gamma}_\Sigma \cdot \overline{\gamma}^*_\Sigma$. Оператор C буде самоспряженим, додатно визначеним і повністю неперервним оператором в гільбертовому просторі $L_{2,\Sigma}$. Обернений до нього оператор $T = C^{-1}$ і буде тим оператором, який ми хотіли ввести і який використовується далі. На елементах $u|_\Sigma \in D(T)$, що є слідами на Σ гладких функцій $u \in H^1_{h,S}$, він діє за правилом

$$u|_\Sigma \xrightarrow{T} \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma.$$

Оператор T необмежений, самоспряжений, додатно визначений в $L_{2,\Sigma}$. Він має дискретний спектр. Областю визначення для оператора $T^{1/2}$ є сукупність всіх слідів $\varphi|_\Sigma$ на Σ функцій $\varphi \in H^1_\Sigma$. Ця множина, яка позначається через $H^{1/2}_\Sigma$, є гільбертовим простором, якщо ввести на ній скалярний добуток за формулою

$$(\xi_1, \xi_2)_+ = \int_Q \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 \, dQ, \quad \xi_1 = \overline{\gamma}_\Sigma \varphi_1, \quad \xi_2 = \overline{\gamma}_\Sigma \varphi_2, \quad \varphi_i \in H^1_{h,S}, \; i = 1, 2.$$

Норму в $H^{1/2}_\Sigma$ можна також визначити рівністю

$$|\xi|_{H^{1/2}_\Sigma} = \min_{\psi|_\Sigma = \xi} |\psi|_1, \quad \psi \in H^1_\Sigma,$$

причому мінімум досягається на $\psi \in H^1_{h,S}$, $\overline{\gamma}_\Sigma \psi = \xi$.

Позначимо через V оператор, який діє з $\overline{G}_{h,S}$ в $L_{2,\Sigma}$ за законом

$$V(\nabla\varphi) = \eta, \tag{15}$$

де $\varphi \in H^1_{h,S}$, $\eta \in T^{1/2}\gamma_\Sigma\varphi$. Оператор V ізометричний.

Застосуємо до гідродинамічного рівняння (4) метод ортогонального проектування [6]. Позначимо через P_i, $i = 1, \ldots, 4$, ортопроектори простору $\overline{L}_2$ відповідно на підпростори розкладу (11). В силу рівняння (5) і умови (8) вектор-функція переміщення $\overline{w}$ належить підпростору $\overline{J}_0 \oplus \overline{G}_{h,S}$ і тому може бути записана у вигляді $\overline{w} = \overline{v} + \nabla\Phi$, де $\overline{v} \in \overline{J}_0$, $\Phi \in H^1_{h,S}$. Визначимо градієнт від функції динамічного тиску p_1 у вигляді $\nabla p_1 = \nabla\varphi_1 + \nabla\psi$, де $\varphi \in H^1_{h,S}$, $\psi \in \in \left(H^1_{0,\Sigma,h} \oplus H^1_0\right)$. Підставимо ці розклади для $\overline{w}$ і ∇p_1 в рівняння (4) і подіємо на нього проекторами P_1, P_2 і $P_5 = P_3 + P_4$. Тоді одержимо рівняння

$$\frac{d^2\overline{v}}{dt^2} + P_1 A_1 \frac{d^2\overline{\delta}}{dt^2} + 2\omega_0 P_1 A_2 \frac{d\overline{v}}{dt} + 2\omega_0 P_1 A_2 \frac{d\,\nabla\Phi}{dt} + P_1 A_3 \frac{d\overline{\delta}}{dt} = P_1 \overline{f}, \tag{16}$$

$$\frac{d^2\nabla\Phi}{dt^2} + P_2 A_1 \frac{d^2\overline{\delta}}{dt^2} + 2\omega_0 P_2 A_2 \frac{d\overline{v}}{dt} + 2\omega_0 P_2 A_2 \frac{d}{dt}\nabla\Phi + $$
$$+ P_2 A_3 \frac{d\overline{\delta}}{dt} + \rho^{-1}\nabla\varphi_1 = P_2 \overline{f}, \tag{17}$$

$$P_5 A_1 \frac{d^2\overline{\delta}}{dt^2} + 2\omega_0 P_5 A_2 \frac{d\overline{v}}{dt} + 2\omega_0 P_5 A_2 \frac{d}{dt}\nabla\Phi + P_5 A_3 \frac{d\overline{\delta}}{dt} + \rho^{-1}\nabla\psi = P_5 \overline{f}, \tag{18}$$

де A_i, $i = 1, 2, 3$, — оператори

$$A_1 \overline{\delta} = \left(\overline{\delta} \times \overline{r}\right), \quad A_2 \overline{v} = \left(\overline{e}_3 \times \overline{v}\right), \quad A_3 \overline{\delta} = \omega_0 \left(\overline{e}_3 \times \overline{\delta}\right) \times \overline{r}. \tag{19}$$

Складова $\nabla\psi$ градієнта ∇p_1 входить тільки в рівняння (18), звідки її можна визначити, якщо будуть знайдені інші невідомі.

Таким чином, задача (4)–(9) зводиться до визначення невідомих $\overline{v}, \nabla\Phi, \varphi_1$, $\overline{\delta}$ з рівнянь (16), (17) і (6) при крайових умовах (7), (9). З крайової умови (7) одержимо, що $\partial\Phi / \partial n = \xi$ на Σ. Введемо нову змінну величину η за допомогою формули $\eta = T^{1/2}\gamma_\Sigma \Phi$. Використовуючи (7), (15), визначимо через неї змінні ξ і $\nabla\Phi$:

$$\xi = T^{1/2}\eta, \quad \nabla\Phi = V^{-1}\eta. \tag{20}$$

Подіємо на обидві частини рівняння (17) оператором V і підставимо замість $\varphi_1|_\Sigma$ його значення, визначене з крайової умови (9). Потім в одержаному рівнянні, а також в рівняннях (16) і (6) зробимо заміну змінних (20). Тоді одержимо систему операторних рівнянь для невідомих $\overline{v}, \eta, \overline{\delta}$, яку запишемо у вигляді одного операторного рівняння в гільбертовому просторі $\mathfrak{F} = \overline{J}_0 \oplus \oplus L_{2,\Sigma} \oplus R_3$. Таким чином зведемо крайову задачу (4)–(9) до наступного операторного рівняння в гільбертовому просторі $\mathfrak{F}$:

$$A^{(2)} \frac{d^2u}{dt^2} + A^{(1)} \frac{du}{dt} + A^{(0)}u = \chi, \tag{21}$$

де $u = \left(\overline{v}, \eta, \overline{\delta}\right) \in \mathfrak{F}$, а коефіцієнти A мають вигляд

$$A^{(2)}u = \left(\overline{v} + P_1A_1\overline{\delta},\ \eta + VP_2A_1\overline{\delta},\ \int\limits_Q \overline{r} \times \overline{v}\, dQ + \int\limits_Q \overline{r} \times V^{-1}\eta\, dQ + \rho^{-1}\hat{J}_0\overline{\delta}\right),$$

$$\begin{gathered} A^{(1)}u = \Big(2\omega_0P_1A_2\overline{v} + 2\omega_0P_1A_2V^{-1}\eta + P_1A_3\overline{\delta},\ 2\omega_0VP_2A_2\overline{v} + \\ + 2\omega_0VP_2A_2V^{-1}\eta + VP_2A_3\overline{\delta} + \omega_0T^{1/2}\theta\left[\delta_1xz + \delta_2yz - \delta_3\left(x^2 + y^2\right)\right], \\ \dot{\omega}_0\,\overline{e}_3\times \int\limits_Q \overline{r}\times\overline{v}\, dQ + \omega_0\,\overline{e}_3\times \int\limits_Q \overline{r}\times V^{-1}\eta\, dQ + \\ + \omega_0 \int\limits_\Sigma \left[-\left(xz\overline{e}_1 + yz\overline{e}_2\right) + \left(x^2 + y^2\right)\overline{e}_3\right]T^{1/2}\eta\, dS + \rho^{-1}\omega_0(2A - C)\left(\overline{e}_3\times\overline{\delta}\right)\Big), \end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered} A^{(0)}u = \Big(0,\ T^{1/2}\theta NT^{1/2}\eta + T^{1/2}\left[\left(y\delta_1 - x\delta_2\right)\left(\omega_0^2 z + g\right)\right], \\ \int\limits_\Sigma \left[\left(y\overline{e}_1 - x\overline{e}_2\right)\left(\omega_0^2 z + g\right)\right]T^{1/2}\eta\, dS + \rho^{-1}\left(\omega_0^2(C - A) + \mathrm{mag}\right)\left(\delta_1\overline{e}_1 + \delta_2\overline{e}_2\right)\Big), \end{gathered}$$

N — оператор множення на функцію (9), θ — проектор простору $L_2(\Sigma)$ на $L_{2,\Sigma}$,

$$\theta\xi = \frac{1}{\operatorname{mes}\Sigma} \int\limits_\Sigma \xi\, dS,$$

$$\chi = \left(P_1\overline{f},\ VP_2\overline{f},\ \rho^{-1}\overline{M}\right). \tag{23}$$

Розглянемо далі задачу Коші для рівняння (21) при початкових умовах

$$\begin{gathered} u(0) = u^{(0)} \equiv \left(\overline{v}^{(0)}, \eta^{(0)}, \overline{\delta}^{(0)}\right), \\ \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = u^{(1)} \equiv \left(\overline{v}^{(1)}, \eta^{(1)}, \overline{\delta}^{(1)}\right). \end{gathered} \tag{24}$$

3. Існування та єдиність розв'язків. Умова стійкості руху системи. Властивості спектра. Оператори рівняння (21) діють у просторі $\mathfrak{F}$ і мають такі властивості.

Лема 1. *Оператор $A^{(2)}$ обмежений самоспряжений і додатно визначений, $A^{(1)}$ обмежений антисиметричний і $A^{(0)}$ необмежений самоспряжений.*

Доведення. Подамо зазначені в лемі оператори в матричній формі відповідно до розкладу простору $\mathfrak{F} = \overline{J}_0 \oplus L_{2,\Sigma} \oplus R_3$. Оператори $A^{(2)}$ і $A^{(1)}$ будуть обмеженими в зв'язку з тим, що обмежені його матричні елементи $A_{ij}^{(k)}$, які визначаються з (22). Використовуючи формули векторної алгебри та враховуючи властивості операторів P_i; T і V, можна показати, що для матричних елементів операторів $A^{(2)}$ і $A^{(0)}$ виконуються рівності $A_{ij}^{(k)*} = A_{ji}^{(k)}$, $i, j = 1, 2, 3$, а для оператора $A^{(1)}$ виконується рівність $A_{ij}^{(1)} = -A_{ji}^{(1)}$, звідки випливає, що оператори $A^{(2)}$ і $A^{(0)}$ симетричні, а $A^{(2)}$ антисиметричний. Оскільки оператор $A^{(2)}$ обмежений симетричний, то його розширення на весь простір буде самоспряженим оператором. Оператор $A^{(0)}$ необмежений симетричний. З визначення (22) цього оператора видно, що його можна записати у вигляді суми двох операторів $A^{(0)} = A_1^{(0)} + A_2^{(0)}$, де оператор

$$A_1^{(0)} u = \left(0,\ T^{1/2}\theta N T^{1/2}\eta,\ 0\right).$$

Очевидно, що оператор $A_1^{(0)}$ буде необмеженим самоспряженим, а оператор $A_2^{(0)}$ самоспряженим обмеженим. Тому, як відомо, оператор $A^{(0)}$ також буде самоспряженим.

За допомогою оператора $A^{(2)}$ визначається кінетична енергія системи, а за допомогою $A^{(0)}$ — потенціальна енергія. Від властивостей оператора $A^{(0)}$ залежить стійкість системи. Встановимо ці властивості і в залежності від них дослідимо задачу Коші для рівняння (21).

Елемент $u_0 = (0,\ 0,\ \overline{e}_3)$ належить ядру оператора $A^{(0)}$. Подамо простір $\mathfrak{F}$ у вигляді прямої суми двох підпросторів $\mathfrak{F} = H \oplus R_1^{(3)}$, де $H = \overline{J}_0 \oplus L_{2,\Sigma} \oplus R_2$, R_2 — двовимірний евклідів простір елементів $\overline{\delta}' = \delta_1 \overline{e}_1 + \delta_2 \overline{e}_2$, $R_1^{(3)}$ — одновимірний підпростір елементів $\tilde{u}_0 = \delta_3 u_3$. Відповідно розіб'ємо розв'язок на дві компоненти

$$u = u_1 + \tilde{u}_0, \quad u_1 = \left\langle \overline{v},\ \eta,\ \overline{\delta}' \right\rangle \in H, \quad \tilde{u}_0 \in R_1^{(3)}.$$

Компоненту $\tilde{u}_0$ визначимо з рівняння кінетичного моменту для твердого тіла відносно осі Oz, яке зводиться до наступного:

$$C_T \frac{d^2 \delta_3}{dt^2} = M_{03}^T. \tag{25}$$

Звідси, враховуючи початкові умови, знаходимо

$$\delta_3(t) = \frac{1}{2C_T} M_{03}^T t^2 + \delta_3^{(1)} t + \delta_3^{(0)}. \tag{26}$$

Запишемо оператори рівняння (21) у матричній формі відповідно до розкладу простору $\mathfrak{F} = H \oplus R_1^{(3)}$:

$$A^{(2)} = \left(\overline{A}_{ij}^{(2)}\right)_{i,j=1}^2, \quad A^{(1)} = \left(\overline{A}^{(1)}\right)_{i,j=1}^2, \quad A^{(0)} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Підставимо $u = u_1 + \tilde{u}_0$ в рівняння (21) і одержимо для компоненти $u_1 \in H$ рівняння

$$B^{(2)} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + B^{(1)} \frac{du_1}{dt} + B^{(0)} u_1 = \chi_1, \tag{28}$$

де операторні коефіцієнти мають вигляд

$$B^{(2)} = \overline{A}_{11}^{(2)}, \quad B^{(1)} = \overline{A}_{11}^{(1)}, \quad B^{(0)} = \overline{A}_{11}^{(0)},$$

$$\chi_1 = \Big(P_1\bar{f} - C_T^{-1}M_{03}^T(\overline{e}_3\times\overline{r}),\ VP_2\bar{f} +$$

$$+ \Big(\rho^{-1}C_T^{-1}M_{03}^T t + \delta_3^{(1)}\Big)\omega_0 T^{1/2}\theta\Big(x^2+y^2\Big),\ M_{01}\overline{e}_1 + M_{02}\overline{e}_2\Big),$$

M_{01}, M_{02} — головні моменти всіх сил, прикладених до системи відносно осей Ox і Oy. Початкові умови для u_1 одержимо з (24). Легко бачити, що оператори рівняння (28) мають такі ж властивості, як і відповідні оператори рівняння (21), визначені в лемі 1.

Зобразимо тепер простір H у вигляді прямої суми двох підпросторів $H = \overline{J}_0 \oplus H_2$, $H_2 = L_{2,\Sigma} \oplus R_2$ і будемо шукати розв'язок у вигляді $u_1 = (\overline{v}; u_2)$, $\overline{v} \in \overline{J}_0$, $u_2 = (\eta,\ \overline{\delta}') \in H_2$. Подамо оператори рівняння (28) у матричній формі відповідно до цього розкладу:

$$B^{(2)} = \left(B_{ij}^{(2)}\right)_{i,j=1}^2, \quad B^{(1)} = \left(B_{ij}^{(1)}\right)_{i,j=1}^2, \quad B^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Оператор B_0 діє в просторі H_2 і згідно з лемою 1 самоспряжений і необмежений. Запишемо його у вигляді

$$B_0 = G_2^* \tilde{B}_0 G_2, \tag{30}$$

де складові оператори мають вигляд

$$G_2 u_2 = \left(B_1^{1/2} T^{1/2}\eta;\ \overline{\delta}'\right),$$

$$\tilde{B}_0 u_2 = \Big(\eta + B_1^{-1/2}\left[\,(y\delta_1 - x\delta_2)\left(\omega_0^2 z + g\right)\right];\ \int_\Sigma (y\overline{e}_1 - x\overline{e}_2)\left(\omega_0^2 z + g\right)B_1^{-1/2}\eta\, dS\ +$$

$$+\ \rho^{-1}\left(\omega_0^2(C-A) + \mathrm{mag}\right)\left(\delta_1\overline{e}_1 + \delta_2\overline{e}_2\right)\Big), \quad B_1 = \theta N. \tag{31}$$

Неважко впевнитися, що B_1 — самоспряжений додатно визначений обмежений оператор в $L_{2,\Sigma}$; G_2 — необмежений, а G_2^{-1} — повністю неперервний оператор в H_2 і $\tilde{B}_0$ — самоспряжений обмежений оператор в H_2.

Запишемо оператор $\tilde{B}_0$ у матричній формі відповідно до розкладу простору $H_2 = L_{2,\Sigma} \oplus R_2$:

$$\tilde{B}_0 = \begin{pmatrix} I & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \tag{32}$$

і введемо оператор

$$B_2 = -B_{21}B_{12} + B_{22}, \tag{33}$$

який діє в двовимірному просторі R_2 і є симетричним.

Можна показати подібно [6], що оператор $\tilde{B}_0$ буде додатно визначеним тоді і тільки тоді, коли додатно визначеним буде оператор B_2. У випадку, коли B_2 не буде додатно визначеним, оператор $\tilde{B}_0$ буде мати стільки ж від'ємних власних значень з урахуванням їх кратностей, що й B_2.

Визначимо властивості оператора B_2 за допомогою квадратичної форми $\left(B_2\overline{\delta}', \overline{\delta}'\right)$, яку зведемо до наступного вигляду:

$$\left(B_2\overline{\delta}', \overline{\delta}'\right) = -\int\limits_{\Sigma} N^{-1}(y\delta_1 - x\delta_2)^2\left(\omega_0^2 z + g\right)^2 dS +$$

$$+ \rho^{-1}\left(\omega_0^2(C-A) + \text{mag}\right)\left(\delta_1^2 + \delta_2^2\right) = \rho^{-1}\left(\omega_0^2 L - D_1\right)\left(\delta_1^2 + \delta_2^2\right), \tag{34}$$

де $L = (C - A) + \text{mag}/\omega_0^2$,

$$D_1 = \frac{\rho}{2}\int\limits_{\Sigma} N^{-1}\left(x^2 + y^2\right)\left(\omega_0^2 z + g\right) dS. \tag{35}$$

З (34) випливає, що оператор B_2 додатно визначений при умові

$$L_1 \equiv \left(\omega_0^2 L - D_1\right) > 0. \tag{36}$$

При умові $L_1 < 0$ він має одне від'ємне двократне власне значення. Випадок $L_1 = 0$ вироджений.

Лема 2. *При умові* $L_1 > 0$ *оператор* B_0 *буде додатно визначеним. При* $L_1 < 0$ *він буде мати два від'ємні власні значення з урахуванням їх кратності, інші точки від'ємної півосі* $(-\infty, 0]$ *будуть регулярними для нього.*

Ця лема доводиться за допомогою квадратичної форми $(B_0 u_2, u_2)$, з урахуванням зображення (30), властивостей операторів B_2, $\tilde{B}_0$ і теореми про максимальні дефінітні підпростори в просторі з індефінітною метрикою [12].

Далі будемо розглядати задачу Коші для рівняння (28) в комплексному гільбертовому просторі, який одержимо після комплексифікації простору H.

1. Розглянемо спочатку випадок, коли виконується умова $L_1 > 0$, при якій оператор B_0 буде додатно визначеним. Зведемо рівняння другого порядку (28) до рівняння першого порядку в більш широкому гільбертовому просторі. Для цього введемо додаткову змінну величину $v_2 \in H_2$, яке буде визначатися наступними рівнянням і початковою умовою:

$$\frac{dv_2}{dt} = B_0^{1/2} u_2, \quad v_2(0) = 0. \tag{37}$$

Згідно з (37) замінимо в рівнянні (28) величину $B_0 u_2$ на $B_0^{1/2}\, dv_2/dt$ і одержимо рівняння, в яке будуть входити тільки другі і перші похідні від невідомих величин і не входитимуть самі ці величини. Розглянемо також наступні рівняння і початкові умови

$$\frac{d^2 v_2}{dt^2} - B_0^{1/2}\frac{du_2}{dt} = 0, \tag{38}$$

$$\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{t=0} = B_0^{1/2} u_2^{(0)}, \quad v_2(0) = 0. \tag{39}$$

Запишемо систему рівнянь (28) і (38) у вигляді одного рівняння в гільбертовому просторі $\tilde{H} = \overline{J}_0 \oplus H_2 \oplus H_2$. Тоді одержимо наступне рівняння першого порядку відносно похідної:

$$S_2\frac{d^2\tilde{z}}{dt^2} - iS_1\frac{d\tilde{z}}{dt} = \chi_2, \tag{40}$$

де $\tilde{z} = (\overline{v}, u_2, v_2) \in \tilde{H}$, $\chi_2 = (\chi_1; 0)$,

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_{11}^{(2)} & B_{12}^{(2)} & 0 \\ B_{21}^{(2)} & B_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad S_1 = i\begin{pmatrix} B_{11}^{(1)} & B_{12}^{(1)} & 0 \\ B_{21}^{(1)} & B_{22}^{(1)} & B_0^{1/2} \\ 0 & -B_0^{1/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Беручи до уваги властивості операторів $B^{(2)}, B^{(1)}, B_0$, які були встановлені вище, неважко впевнитися, що оператор S_2 самоспряжений додатно визначений обмежений, а оператор S_1 самоспряжений необмежений.

Таким чином, при умові $L_1 > 0$ задача Коші для рівняння (28) з початковими умовами для u_1 з (24) зводиться до задачі Коші для рівняння (40) з початковими умовами

$$\tilde{z}(0) = \left(\overline{v}^{(0)}, u_2^{(0)}, 0\right), \quad \frac{d\tilde{z}}{dt}\bigg|_{t=0} = \tilde{z}^{(1)} \equiv \left(\overline{v}^{(1)}, u_2^{(1)}, B_0^{1/2} u_2^{(0)}\right). \tag{42}$$

Зробивши в рівнянні (40) заміну змінної за формулою $\tilde{x} = S_2^{1/2}\, d\tilde{z}/dt$, зведемо його до стандартного вигляду

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} - iF\tilde{x} = \chi_3, \tag{43}$$

де оператор F і права частина χ_3 мають вигляд

$$F = S_2^{-1/2} S_1 S_2^{-1/2}, \quad \chi_3 = S_2^{-1/2} \chi_2. \tag{44}$$

Згідно з зазначеними вище властивостями операторів S_2 і S_1 оператор F буде самоспряженим необмеженим.

Як відомо з теорії операторних рівнянь [13], задача Коші для однорідного рівняння (43) породжує групу унітарних операторів

$$U(t) = \exp(itF), \quad -\infty < t < \infty. \tag{45}$$

Розв'язок неоднорідної задачі Коші визначається за допомогою цієї групи за формулою

$$\tilde{x}(t) = U(t)\tilde{x}(0) + \int_0^t U(t-s)\chi_3(s)\, ds. \tag{46}$$

Звідси, інтегруючи відносно t, одержуємо розв'язок $u_1 = (\overline{v}; u_3)$ задачі Коші для рівняння (28). Він буде неперервно диференційовним відносно t, причому $u_2(t) = (\eta; \overline{\delta}') \in D\left(B_0^{1/2}\right)$, а $B_0^{1/2} u_2(t)$ буде неперервною відносно t функцією. В результаті, приєднуючи до u_1 раніше визначену компоненту $\tilde{u}_0$, одержуємо розв'язок $u = u_1 + \tilde{u}_0$ вихідної задачі (21)–(24).

2. Розглянемо тепер задачу Коші для рівняння (28) у випадку, коли виконується умова $L_1 < 0$. У цьому випадку на основі леми 2 оператор B_0 не буде додатно визначеним і його недодатний спектр буде складатися тільки з двох від'ємних власних значень.

Позначимо через P^- ортопроектор простору H_2 на двовимірний підпростір, натягнений на власні функції, які відповідають цим від'ємним власним значенням. Нехай P^+ — ортопроектор, який відповідає додатній частині спектра оператора B_0. Тоді $P^- + P^+ = I$, де I — одиничний оператор. Введемо оператор $J = P^+ - P^-$, який буде самоспряженим унітарним, $J^2 = I$, і подамо оператор B_0 у вигляді $B_0 = J|B_0|$, де модуль $|B_0|$ буде додатно визначеним оператором. Подібно до розглянутого вище випадку, коли $L_1 > 0$, шляхом введення нової змінної v_2, для якої $dv_2/dt = J|B_0|^{1/2} u_2$, одержимо рівняння в гільбертовому просторі $\tilde{H} = \overline{J}_0 \oplus H_2 \oplus H_2$

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} - iF_1\tilde{x} = \chi_3, \tag{47}$$

де оператор $F_1 = S_2^{-1/2}\,\tilde{S}_1 S_2^{-1/2}$, оператор S_2 визначений в (41) і

$$\tilde{S}_1 = i\begin{pmatrix} B_{11}^{(1)} & B_{12}^{(1)} & 0 \\ B_{21}^{(1)} & B_{22}^{(1)} & |B_0|^{1/2} \\ 0 & -J|B_0|^{1/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Початкові умови для розв'язків рівняння (47) мають вигляд

$$\tilde{x}(0) = S_2^{1/2}\left(\overline{v}^{(1)},\, u_2^{(1)},\, J|B_0|^{1/2} u_2^{(0)}\right). \tag{49}$$

Неважко впевнитися, що оператор F_1 необмежений в $\tilde{H}$ і самоспряжений в індефінітній метриці

$$\left[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\right] = \left(\overline{v}_1, \overline{v}_2\right)_{\overline{L}_2} + \left(u_2^{(1)}, u_2^{(2)}\right)_{H_2} + \left(Jv_2^{(1)}, v_2^{(2)}\right)_{H_2}, \tag{50}$$

де $\tilde{x}_i = \left(\overline{v}_i,\ u_2^{(i)},\ v_2^{(i)}\right)$, $i = 1, 2$. Ця метрика в $\tilde{H}$ перетворює його в простір Понтрягіна H_κ [12] з індексом $\kappa = 2$. Як випливає з відомої теореми [12] про самоспряжені оператори в таких просторах, оператор F_1 може мати комплексний спектр, який буде складатися тільки з однієї пари $\lambda, \overline{\lambda}$, або з двох пар $\lambda_1, \overline{\lambda}_1; \lambda_2, \overline{\lambda}_2$ комплексно спряжених власних значень, сума алгебраїчних кратностей яких не більше 2κ, тобто 4-х.

Позначимо через F_2 оператор iF_1 і доведемо наступну лему.

Лема 3. *Оператор F_2, а також спряжений до нього оператор F_2^* обмежені справа, тобто для них виконуються нерівності*

$$(F_2 v, v)_{\tilde{H}} \le c(v, v)_{\tilde{H}}, \quad v \in D(F_2),$$

$$\left(F_2^* w, w\right)_{\tilde{H}} \le c(w, w)_{\tilde{H}}, \quad w \in D\left(F_2^*\right),$$

де $c = \text{const}$.

Для доведення леми запишемо оператор $\tilde{S}_1$ у вигляді суми двох операторів $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_1^{(1)} + \tilde{S}_1^{(2)}$, де

$$\tilde{S}_1^{(1)} = i\begin{pmatrix} B_{11}^{(1)} & B_{12}^{(1)} & 0 \\ B_{21}^{(1)} & B_{22}^{(1)} & |B_0|^{1/2} P^+ \\ 0 & -P^+|B_0|^{1/2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{S}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |B_0|^{1/2} P^- \\ 0 & P^-|B_0|^{1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи властивості операторів $B^{(1)}, B_0, P^-, P^+$, неважко показати, що оператор $\tilde{S}_1^{(1)}$ самоспряжений необмежений, а оператор $\tilde{S}_1^{(2)}$ обмежений антисиметричний. Враховуючи ці властивості операторів $\tilde{S}_1^{(1)}$ і $\tilde{S}_1^{(2)}$, легко показати, що для F_2 і F_2^* виконуються нерівності леми 3.

На підставі леми 3 і замкненості оператора F_2 оператор $F_3 = F_2 - cI$ буде максимально дисипативним [13] і тому півгрупа $V_1(t)$, яка породжується рівнянням

$$\frac{dv}{dt} = F_3 v,$$

буде стискаючою, $\| V_1(t) \| \le 1$. Легко бачити, що півгрупа для рівняння (47) $U_1(t)$ і півгрупа $V_1(t)$ пов'язані співвідношенням

$$U_1(t) = e^{ct} V_1(t).$$

Звідси випливає, що задача Коші для однорідного рівняння (47) рівномірно коректна, причому $\| U_1(t) \| \le e^{ct}$. Розв'язок неоднорідної задачі (47) визначається за допомогою півгрупи $U_1(t)$ формулою (46).

Для розв'язків задачі Коші, які задовольняють рівняння (21), одержимо співвідношення, що визначає закон балансу енергії:

$$\frac{1}{2}\left(A^{(2)} \frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\right)_{\mathfrak{F}} + \frac{1}{2}\left(\tilde{B}_0 G_2 u_2, G_2 u_2\right)_{H_2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(A^{(2)} u^{(1)}, u^{(1)}\right)_{\mathfrak{F}} + \frac{1}{2}\left(\tilde{B}_0 G_2 u_2^{(0)}, G_2 u_2^{(2)}\right)_{H_2} + \int_0^t \operatorname{Re}\left(\chi, \frac{du}{dt}\right) d\tau. \tag{51}$$

Ліва частина цієї рівності визначає повну егергію системи при збуреному русі, в якій перша і друга складові є відповідно кінетична і потенціальна енергія.

В результаті проведеного вище дослідження доведена така теорема.

Теорема 1. *Задача Коші* (21)–(24) *при довільних початкових даних з просторів* $\overline{v}^{(0)} \in \overline{J}_0$, $\eta^{(0)} \in H_\Sigma^{1/2}$, $\overline{\delta}^{(0)} \in R_3$; $u^{(1)} \in \mathfrak{F}$ *і неперервній відносно* t *правій частині* $\chi \in \mathfrak{F}$ *має єдиний узагальнений розв'язок* $u(t) = (\overline{v}, \eta, \overline{\delta}) \in \in \mathfrak{F}$ *зі скінченною енергією* (51), *який неперервно диференційовний відносно* t *і в якого* $\eta(t) \in H_\Sigma^{1/2}$, *а* $\xi(t) \in T^{1/2}\eta$ *є неперервною відносно* t *функцією.*

Доведемо також наступну теорему.

Теорема 2 (про стійкість руху). *У випадку, коли* $L_1 > 0$ *для узагальнених розв'язків* $u(t) = (\overline{v}, \eta, \overline{\delta})$ *однорідної задачі Коші* (21)–(24) $(\chi = 0)$ *з початковими даними* $\overline{v}^{(0)} \in \overline{J}_0$,, $\eta^{(0)} \in H_\Sigma^{1/2}$, $\overline{\delta}^{(0)} \in R_3$; $u^{(1)} \in \mathfrak{F}$ *справедлива наступна нерівність:*

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{\mathfrak{F}} + \| \tilde{u}_2 \|_{H_2} \le \gamma_1 \left(\left\| u^{(1)} \right\|_{\mathfrak{F}} + \left\| u_2^{(0)} \right\|_{H_2} \right),$$

де $\tilde{u}_2 = (\xi, \overline{\delta}')$, $\xi = T^{1/2}\eta$, γ_1 *— стала додатна величина, яка не залежить від розв'язків* u; $\tilde{u}_2^{(0)} = (\xi^{(0)}, \overline{\delta}'^{(0)})$, $\xi^{(0)} = T^{1/2}\eta^{(0)}$; *і стаціонарний рівномірно обертовий рух системи тіло – рідина навколо осі* Oz_1 *стійкий. Якщо* $L_1 < 0$ *і при цьому оператор* F_1 *в рівнянні* (47) *має комплексні власні значення, то стаціонарний обертовий рух системи буде не стійким.*

Доведення. З викладеного вище випливає, що розв'язки $u(t)$ задачі Коші для однорідного рівняння (21) подаються у вигляді суми двох компонент $u = = u_1 + \tilde{u}_0$, де $\tilde{u}_0 = \delta_3(t)\overline{e}_3$, $\delta_3(t) = \delta_3^{(1)} t + \delta_3^{(0)}$, а компонента $u_1 = (\overline{v}, \eta, \overline{\delta}')$ буде розв'язком неоднорідного рівняння (28) з правою частиною $\chi_1 = (0, \omega_0 \delta_3^{(1)} T^{1/2} \theta(x^2 + y^2), 0)$. Це рівняння має такий частинний розв'язок:

$$w_0(t) = (\overline{v}_0(t), 0, 0), \quad \overline{v}_0(t) = \delta_3^{(1)} t (\overline{e}_3 \times \overline{r}), \tag{52}$$

а функція $\tilde{u}_1 = u_1 - w_0$ буде розв'язком однорідного рівняння (28) при наступних початкових умовах:

$$\tilde{u}_1(0) = u_1^{(0)}, \quad \left.\frac{d\tilde{u}_1}{dt}\right|_{t=0} = u_1^{(1)} - w_0^{(1)}, \tag{53}$$

де

$$w_0^{(1)} = \left.\frac{dw_0}{dt}\right|_{t=0} = \left(\delta_3^{(1)}(\overline{e}_3 \times \overline{r}),\, 0,\, 0\right); \quad u_1^{(0)} = \left(\overline{v}^{(0)},\, \eta^{(0)},\, \overline{\delta}'^{(0)}\right),$$

$u_1^{(1)} = \left(\overline{v}^{(1)}, \eta^{(1)}, \overline{\delta}'^{(1)}\right)$ — початкові дані для u_1. При умові $L_1 > 0$ задача Коші для однорідного рівняння (28) $(\chi_1 = 0)$ зводиться до задачі Коші для однорідного рівняння (43) $(\chi_3 = 0)$, в якого оператор F самоспряжений і породжена цим рівнянням група $U(t)$ унітарна. Використовуючи подання (30) для оператора B_0 і враховуючи властивості його складових операторів, можна показати, що виконується двостороння нерівність

$$\beta_1 \|\tilde{u}_2\|_{H_2} \leq \left\|B_0^{1/2} u_2\right\|_{H_2} \leq \beta_2 \|\tilde{u}_2\|_{H_2}, \tag{54}$$

де константи β_1 і β_2 не залежать від $u_2 \in D\left(B_0^{1/2}\right)$, $u_2 = \left(\eta, \overline{\delta}'\right)$. Враховуючи зв'язок розв'язків u_1, $\tilde{z}$ і $\tilde{x}$ відповідно рівнянь (28), (40), (43) і використовуючи (54), а також враховуючи властивості оператора S_2 і унітарність групи $U(t)$, одержуємо наступну оцінку для розв'язків u_1 однорідного рівняння (28):

$$\left\|\frac{du_1}{dt}\right\|_H + \|\tilde{u}_2\|_{H_2} \leq c_1 \left\|\frac{d\tilde{z}}{dt}\right\|_{\tilde{H}} = c_1 \left\|S^{-1/2}\tilde{x}(t)\right\|_{\tilde{H}} \leq c_2 \|U(t)\tilde{x}(0)\|_{\tilde{H}} =$$

$$= c_2 \|\tilde{x}(0)\|_{\tilde{H}} \leq \gamma_2 \left(\left\|u_1^{(1)}\right\|_H + \left\|\tilde{u}_2^{(0)}\right\|_{H_2}\right), \tag{55}$$

де c_i, γ_2 — константи, які не залежать від розв'язків u_1. Застосуємо оцінку (55) до розв'язку $\tilde{u}_1$, який задовольняє початкові умови (53). Тоді одержимо оцінку

$$\left\|\frac{du_1}{dt}\right\|_H + \|\tilde{u}_2\|_{H_2} \leq \gamma_3 \left(\left\|u^{(1)}\right\|_{\mathfrak{F}} + \left\|\tilde{u}_2^{(0)}\right\|_{H_2}\right). \tag{56}$$

Тепер, враховуючи раніше визначене подання $u = \tilde{u}_1 + w_0 + \tilde{u}_0$ і використовуючи (56), легко одержати оцінку теореми 2. З цієї оцінки випливає, що при малих значеннях початкових даних

$$\left\|u^{(1)}\right\|_{\mathfrak{F}} + \left\|u_2^{(0)}\right\|_{H_2} \leq \varepsilon,$$

де ε — мала додатна величина, похідна від параметрів збуреного руху

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{d\overline{v}}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\overline{\delta}}{dt}\right)$$

і параметр $\tilde{u}_2 = \left(\xi, \overline{\delta}'\right)$ залишаються малими на протязі всього часу, а саме: буде виконуватися нерівність

$$\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{\mathfrak{F}} + \|\tilde{u}_2\|_{H_2} \leq \gamma_1 \varepsilon,$$

що й означає стійкість стаціонарного обертового руху системи навколо осі Oz_1. Вище було встановлено, що у випадку, коли $L_1 < 0$, оператор F_1 в рівнянні (47) самоспряжений в індефінітній метриці і, як відомо [12], такі оператори можуть мати комплексні власні значення $\lambda = a \pm ib$. При наявності коплексних власних значень у оператора F_1 власному значенню $\lambda_1 = a_1 + ib_1$, у якого

$b_1 < 0$, буде відповідати необмежено зростаючий відносно t розв'язок однорідного рівняння (47) $\tilde{x}(t) = e^{i\lambda_1 t}\tilde{v}_0$, де $\tilde{v}_0$ — власна функція оператора F_1, яка відповідає λ_1. Такий розв'язок спричиняє нестійкість стаціонарного обертового руху системи. Теорема доведена.

Можна показати за допомогою граничного переходу, що закон балансу енергії (51) виконується й для узагальнених розв'язків, зазначених у теоремі 1.

Знаходження розв'язків вигляду $u = e^{i\lambda t}v_0$ однорідного рівняння (21) зводиться до наступної спектральної задачі:

$$Z(\lambda)v_0 \equiv \left(-A^{(2)}\lambda^2 + \tilde{A}^{(1)}\lambda + A^{(0)}\right)v_0 = 0,$$

де $\tilde{A}^{(1)} = iA^{(1)}$.

Квадратична операторна в'язка $Z(\lambda)$ буде самоспряженою завдяки самоспряженості операторів, які в неї входять. Можна показати, що при умові $L_1 > 0$ її спектр буде дійсним, а при $L_1 < 0$ вона може мати комплексний спектр, який складається тільки з однієї або з двох пар комплексно спряжених власних значень.

1. *Соболев С. Л.* О движении симметрического волчка с полостью, наполненной жидкостью // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1960. – № 3. – С. 20–55.
2. *Ишлинский А. Ю., Темченко М. Е.* О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью // Там же. – С. 65–75.
3. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 440 с.
4. *Горбачук М. Л., Слепцова Г. П., Темченко М. Е.* Об устойчивости движения подвешенного на струне твердого тела с жидким наполнением // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, № 25. – С. 586–602.
5. *Копачевский Н. Д.* Задача Коши для малых движений идеальной капиллярной вращающейся жидкости // Докл. АН СССР. – 1974. – **219**, № 6. – С. 1310–1313.
6. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. – М.: Наука, 1989. – 413 с.
7. *Костандян Б. А.* Влияние колебаний свободной поверхности на устойчивость вращательных движений волчка, содержащего жидкость // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, № 4 – С. 646–659.
8. *Дяченко М. П.* Про коливання гіроскопу з порожниною, частково заповненою нев'язкою, нестисливою рідиною // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 10. – С. 915–919.
9. *Miles I. W., Troesch B. A.* Surface oscillations of a rotating liquid // J. Appl. Mech. – 1961. – **83**, № 4. – P. 491–496.
10. *Комаренко А. Н.* Уравнения возмущенного движения тела с полостью, частично заполненной жидкостью, вращающихся вокруг оси / Пробл. динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. – С. 10–17.
11. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. – Киев: Наук. думка, 1984. – 229 с.
12. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 352 с.
13. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1987. – 464 с.

Одержано 01.04.94