УДК 517.5

Г. А. Дзюбенко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КОПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ ПОТОЧЕЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

We prove that if a function $f \in C^{(1)}(I)$, $I := [-1; 1]$, changes sign s times on I, $s \in \mathbb{N}$, then for every $n > C$, where constant C depends only on set of the points at which the function changes sign and $k \in \mathbb{N}$, there exists an algebraic polynomial $P_n = P_n(x)$ of degree $\le n$ having theame local sign as $f(x)$ and

$$|f(x) - P_n(x)| \le c(s, k)\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)\omega_k\left(f';\ \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right),\quad x \in I,$$

where $\omega_k(f'; t)$ is the smoothness of kth order modulus of the function f'. We also show that if $f \in C(I)$ and $f(x) \ge 0$, $x \in I$, then for any $n \ge k-1$ there exists a polynomial $P_n = P_n(x)$ of degree $\le n$ such that $P_n(x) \ge 0$, $x \in I$, and $|f(x) - P_n(x)| \le c(k)\,\omega_k\left(f;\ n^{-2} + n^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$, $x \in I$.

Доведено, що коли функція $f \in C^{(1)}(I)$, $I := [-1, 1]$, змінює знак s разів на I, $s \in \mathbb{N}$, тоді для кожного $n > C$, де стала C залежить тільки від множини точок зміни знаку функції і $k \in \mathbb{N}$, існує алгебраїчний многочлен $P_n = P_n(x)$ степеня $\le n$, який локально успадковує знак $f(x)$ і

$$|f(x) - P_n(x)| \le c(s, k)\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)\omega_k\left(f';\ \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right),\quad x \in I,$$

де $\omega_k(f'; t)$ — k-й модуль неперервності функції f'. Також показано, що коли $f \in C(I)$ і $f(x) \ge 0$, $x \in I$, тоді для кожного $n \ge k-1$ існує многочлен $P_n = P_n(x)$ степеня $\le n$ такий, що $P_n(x) \ge 0$, $x \in I$, і $|f(x) - P_n(x)| \le c(k)\,\omega_k\left(f;\ n^{-2} + n^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$, $x \in I$.

Введение. 1. Пусть $I := [-1, 1]$; C — пространство непрерывных функций f: $I \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\| := \max_{x \in I} |f(x)|;$$

$$C^{(r)} := \{f\colon f^{(r)} \in C\},\quad r \in \mathbb{N};\quad C^{(0)} := C;$$

$s \in \mathbb{N}$; $Y = Y_s$ — фиксированный набор из $s+2$ точек y_i, пронумерованных справа налево: $-1 = y_{s+1} < y_s < \ldots < y_1 < y_0 = 1$. Через $\Delta^{(0)}(Y)$ обозначим множество функций $f \in C$ таких, что f не отрицательна на отрезке $[y_{i+1}, y_i]$ при i четном; f не положительна на $[y_{i+1}, y_i]$ при i нечетном. Функции $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ называют копозитивными друг другу (по набору Y). Введем такие обозначения: $\mathcal{P}_n$ — пространство алгебраических многочленов степени $\le n$, $n \in \mathbb{N}$;

$$E_n(f) := \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|f - P_n\|$$

— величина наилучшего равномерного приближения (без ограничений) функции $f \in C$ (произвольными) многочленами $P_n \in \mathcal{P}_n$;

$$E_n^{(0)}(f; Y) := \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)} \|f - P_n\|$$

— величина наилучшего равномерного приближения функции $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ многочленами $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$. Очевидно,

$$E_n(f) \le E_n^{(0)}(f; \{-1, 1\}) \le 2E_n(f). \tag{1}$$

Напомним, что k-м модулем непрерывности функции $f \in C$ называется функция

$$\omega_k(f; t) := \omega_k(f; t; I) := \sup_{h \in [0, t]} \sup_{x \in [-1, 1-kh]} \left| \sigma_h^k(f; x) \right|$$

при $t \in [0, 2/k]$; $\omega_k(f; t) \equiv \omega_k(f; 2/k)$ при $t \ge 2/k$; где

$$\sigma_h^k(f; x) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih)$$

— k-я разность функции f в точке x с шагом h.

Известны следующие результаты приближения функции $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ многочленами $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$. Первые оценки такого приближения имеются в работах [1] и [2].

Левиатан [3] установил оценку

$$E_n^{(0)}(f; Y) \le B_s \omega_1(f; n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

здесь и далее во введении $B_\alpha N_\alpha$ и $B_{\alpha,\beta}, N_{\alpha,\beta}$ обозначают различные положительные постоянные, которые зависят только от α и соответственно α, β. Ху, Левиатан и Ю [4] усилили оценку (2), установив

$$E_n^{(0)}(f; Y) \le B_Y \omega_2(f; n^{-1}), \quad n > N_Y. \tag{3}$$

К. А. Копотун [5] для каждого $n > N_Y$ доказал справедливость неравенства

$$|f(x) - P_n(x)| \le B_s \omega_3(f; \rho_n(x)), \quad x \in I, \tag{4}$$

где

$$\rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{n}, \quad x \in I, \ n \in \mathbb{N}.$$

Из (4) вытекает оценка

$$E_n^{(0)}(f; Y) \le B_Y \omega_3(f; n^{-1}), \quad n > N_Y, \tag{5}$$

которую доказали также Ху и Ю [6]. Оценка (5) (а значит, и (4)) является окончательной в том смысле, что существует функция $f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$, для которой

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{E_n^{(0)}(f; Y)}{\omega_4(f; n^{-1})} = \infty; \tag{6}$$

этот результат принадлежит Цу [7, 8].

Для классов дифференцируемых функций Левиатан [3] (для $r \le 2$) и Ю [9] (для $r > 2$) показали: если $f \in C^{(r)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$ и n достаточно большое, то существует многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$ такой, что

$$E_n^{(0)}(f;Y) \le B_{Y,r} n^{-r} \omega_1(f^{(r)}; n^{-1}). \tag{7}$$

В [10] усилена оценка (7). Точнее, для $f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$, $k \in \mathbb{N}$ и каждого $n > N_{Y,k}$ построен многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$ такой, что

$$E_n^{(0)}(f;Y) \le B_{Y,k} n^{-1} \omega_k(f'; n^{-1}). \tag{8}$$

Итак, с учетом оценки

$$E_k^{(0)}(f;Y) \le B_{Y,k} \omega_k(f'; k^{-1}) \tag{9}$$

при всех $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $k \in \mathbb{N}$ были выяснены все случаи, когда для $f \in \in C^{(r)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$ неравенство

$$E_n^{(0)}(f;Y) \le B_{Y,k,r} (1/n)^r \omega_k(f^{(r)}; 1/n), \quad n \ge k+r-1, \tag{10}$$

выполняется (это случаи $r=0,\ k \le 3$ и $r \ge 1,\ k \ge 1$), и когда оно не выполняется ($r=0,\ k \ge 4$).

2. Основным результатом этой работы является теорема 1. Обозначим

$$\Pi(x) := \Pi(x;Y) := \prod_{i=1}^{s} (x-y_i).$$

Теорема 1. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$. *Если* $f \in C^{(1)}$ *и* $f(x)\Pi(x) \ge 0, x \in I$, *то для каждого натурального* $n > N_{Y,k}$ *найдется алгебраический многочлен* $P_n = P_n(x)$ *степени* $\le n$ *такой, что*

$$P_n(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in I, \tag{11}$$

$$|f(x) - P_n(x)| \le B_{s,k} \rho_n(x) \omega_k(f'; \rho_n(x)), \quad x \in I. \tag{12}$$

Для $k = 1, 2$ теорема 1 следует из отмеченного выше результата К. А. Копотуна (см. (4)).

В доказательстве теоремы 1 используются многочлены, аналогичные многочленам из [11].

Теорема 2. *Пусть* $r \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$. *Если* $f \in C^{(r)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$, *то при каждом натуральном* $n \ge k+r-1$ *существует многочлен* $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$ *такой, что*

$$|f(x) - P_n(x)| \le B_{Y,k,r} \rho_n^r(x) \omega_k(f^{(r)}; \rho_n(x)), \quad x \in I, \tag{13}$$

где $B_{Y,k,r} = \mathrm{const}$ *зависит только от* Y, k *и* r.

Теорема 2 является простым следствием теоремы 1 и неравенства (9). Случай $r = 0$ не включен в формулировку теоремы 2, так как он содержится в [5, 7, 8] (см. (4), (6)). Заметим, что при $s = 0$ оценка (10) справедлива для всех $k \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что следует из тривиального неравенства (1). При этом оценка (13) не является очевидной для „чисто" позитивного приближения. Тем не менее нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$. *Если* $f \in C$ *и* $f(x) \ge 0$, $x \in I$, *то при каждом натуральном* $n \ge k-1$ *найдется многочлен* $P_n \in \mathcal{P}_n$ *такой, что* $P_n(x) \ge 0$, $x \in I$, *и*

$$|f(x)-P_n(x)| \le B_k\omega_k(f;\rho_n(x)), \quad x\in I. \tag{14}$$

Теорему 3 докажем в конце работы.

Вспомогательные факты. 1. Всюду далее $n\in\mathbb{N}$; $c_i:=c_i(k,s)$ — различные положительные постоянные, которые могут зависеть только от фиксированных $k\in\mathbb{N}$ и $s\in\mathbb{N}$; $\varphi=\varphi(t)$ — k-мажоранта, т. е. $\varphi=\varphi(t)$ — непрерывная и не убывающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\varphi(0)=0$ и $t^{-k}\varphi(t)$ не возрастает при $t>0$. Множество всех k-мажорант обозначим через Φ^k.

Известно (см., например, [12], теорема 2.1), что для любого k-го модуля непрерывности $\omega_k(g;t)$ функции $g\in C$ существует k-мажоранта φ, для которой справедлива оценка

$$\omega_k(g;t) \le \varphi(t) \le 2^k\omega_k(g;t), \quad t\ge 0. \tag{15}$$

Обозначим $L_k(x;g):=L_k(x;g;I)$ многочлен Лагранжа степени $\le k$, который интерполирует функцию $g\in C$ в равноотстоящих точках $-1+2\nu/k$, $\nu=0,\ldots,k$, отрезка I;

$$\beta := \arccos x, \quad x\in I; \qquad \alpha := \arccos y, \quad y\in I;$$

$$D_{6k+1,n,3k}(y,x) := \frac{1}{(6k)!}\frac{\partial^{6k+1}}{\partial x^{6k+1}}(x-y)^{6k}\int\limits_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} J_{n,3k}(t)\,dt$$

— полиномиальное ядро типа Дзядыка (см., например, [12], § 15), где

$$J_{n,3k}(t) = \frac{1}{\gamma_{n,3k}}\left[\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right]^{2(3k+1)},$$

$$\gamma_{n,3k} = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2(3k+1)}dt$$

— ядро типа Джексона.

С целью упрощения записи будем писать ρ вместо $\rho_n(x)$, т. е. всюду далее $\rho=\rho_n(x)$.

Лемма 1. *Если* $g\in C^{(1)}$, *то многочлен*

$$\mathcal{D}(x;g) := \int\limits_{-1}^{1}(g(y)-L_k(y;g))D_{6k+1,n,3k}(y,x)\,dy + L_k(x;g) \tag{16}$$

степени $\le(3k+1)(n-1)-1$ *при всех* $x\in I$ *удовлетворяет неравенствам*

$$|g(x)-\mathcal{D}(x;g)| \le c_1\rho\,\varphi(\rho), \tag{17}$$

$$|g'(x)-\mathcal{D}'(x;g)| \le c_2\varphi(\rho). \tag{18}$$

Лемма 1 является простым следствием леммы 15.3 из [12].

2. Положим

$$K_n^*(x;Y) := \min_{i=1,\ldots,s}\frac{|x-y_i|}{\rho_n(y_i)},$$

$$K(x) := K_n(x;Y) := \min\{1;\, K_n^*(x;Y)\}. \tag{19}$$

Воспользуемся обозначениями и некоторыми предложениями из ([12], § 15). Для каждого $j=1,\ldots,n$ обозначим

$$x_j := x_{j,n} := \cos(j\pi/n), \quad x_0 := 1, \quad I_j := I_{j,n} := [x_{j,n}, x_{j-1,n}],$$

$$h_j := h_{j,n} := x_{j-1,n} - x_{j,n}$$

Справедливы неравенства

$$\rho < h_j < 5\rho, \quad x \in I_j, \tag{20}$$

$$h_{j\pm 1} < 3h_j, \tag{21}$$

$$\rho_n^2(y) < 4\rho(|x-y|+\rho), \quad x, y \in I, \tag{22}$$

$$2(|x-y|+\rho) > |x-y| + \rho_n(y) > (|x-y|+\rho)/2, \quad x, y \in I. \tag{23}$$

Выберем натуральное число $N(Y)$ так, чтобы при каждом $n \ge N(Y)$ любой отрезок $[y_{i+1}, y_i]$, $i = 0, \dots, s$, содержал, по крайней мере, три различных отрезка I_j и всюду далее считаем $n \ge N(Y)$. Обозначим

$$O_i := O_{i,n} := \begin{cases} (x_{j+1}, x_{j-1}), & \text{если } y_i = x_j, \\ (x_{j+1}, x_{j-2}), & \text{если } y_i \in (x_j, x_{j-1}), \end{cases}$$

$$O := O(n; Y) := \bigcup_{i=1}^{s} O_i.$$

Будем писать $j \in H$, если $I_j \cap O = \varnothing$, $j = 1, \dots, n$.

Легко проверить справедливость неравенства

$$\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(y)}\right| \le \left(\frac{|x-y|}{\rho_n(y)} + 1\right)^s, \quad x \in I,\ y \in I \setminus O. \tag{24}$$

Для каждого $j = 1, \dots, n$ обозначим

$$\beta_j^0 := \beta_{j,n}^0 := \begin{cases} (j-1/4)\pi/n, & \text{если } j < n/2, \\ (j-3/4)\pi/n, & \text{если } j \ge n/2, \end{cases}$$

$$\overline{\beta}_j := \overline{\beta}_{j,n} := (j-1/2)\pi/n;$$

$$x_j^0 := x_{j,n}^0 := \cos\beta_j^0, \quad \overline{x}_j := \overline{x}_{j,n} := \cos\overline{\beta}_j;$$

$$t_j(x) := t_{j,n}(x) := \left(x - x_j^0\right)^{-2} \cos^2 2n \arccos x +$$

$$+ \left(x - \overline{x}_j\right)^{-2} \sin^2 2n \arccos x$$

— алгебраический многочлен степени $4n-2$; для $j \in H$

$$d_j := d_{j,n}(Y) := \int_{-1}^{1} t_j^{6ks}(y)\Pi(y)\,dy,$$

$$T_j(x) := T_{j,n}(x; Y) := \frac{1}{d_j} \int_{-1}^{x} t_j^{6ks}(y)\Pi(y)\,dy;$$

$$\Gamma_j(x) := \Gamma_{j,n}(x; Y) := \left(\frac{h_j}{|x-x_j| + h_j}\right)^{12ks} \left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right|.$$

Лемма 2. *Если* $j \in H$, *то*

$$\operatorname{sign} d_j = \operatorname{sign} \Pi(x_j), \tag{25}$$

$$T_j'(x)\,\Pi(x)\operatorname{sign} d_j \geq 0, \quad x \in I, \tag{26}$$

$$\left|T_j'(x)\right| \leq c_3 \frac{1}{h_j}\Gamma_j(x), \quad x \in I, \tag{27}$$

$$\left|T_j'(x)\right| \geq c_4 \frac{1}{h_j}\Gamma_j(x), \quad x \in I, \tag{28}$$

в частности, для $\varphi \in \Phi^k$

$$h_j \varphi(h_j)\left|T_j'(x)\right| \geq c_5 \varphi(\rho)\left(\frac{\rho}{\operatorname{dist}(x, I_j) + \rho}\right)^{24ks+k+s} K(x), \quad x \in I. \tag{29}$$

Лемма 2 доказывается так же, как лемма 17.2 из [12], с помощью неравенств (20)–(24) и оценок

$$\min\left\{\frac{1}{\left(x - x_j^0\right)^2}, \frac{1}{\left(x - \bar{x}_j\right)^2}\right\} \leq t_j(x) \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{1}{\left(x - x_j^0\right)^2}, \frac{1}{\left(x - \bar{x}_j\right)^2}\right\}, \quad x \in I,$$

$$t_j(x) \leq 10^3\, h_j^{-2}, \quad x \in I_j, \tag{30}$$

$$\left|\int\limits_{I \setminus I_j} t_j^{6ks}(y)\,\Pi(y)\,dy\right| < \frac{1}{2}\left|\int\limits_{I_j} t_j^{6ks}(y)\,\Pi(y)\,dy\right|, \quad j \in H.$$

3. Для каждого $i = 1, \ldots, s$ определим $\mathcal{T}_i(x) := T'_{j_i, n}(x; Y \setminus \{y_i\})$, где j_i обозначает индекс $j = 1, \ldots, n$, при котором $y_i \in I_{j_i}$ (если таких индексов два, то выберем меньший из них).

Лемма 3. *Если* $g \in C^{(1)}$ *и* $g(y_i) = 0$ *при всех* $i = 1, \ldots, s$, *то многочлен*

$$\mathfrak{Q}(x; g) := \mathfrak{Q}_n(x; g; Y) := \mathfrak{D}(x; g) - \sum_{i=1}^{s} \frac{\mathfrak{D}(y_i; g)}{\mathcal{T}_i(y_i)}\mathcal{T}_i(x) \tag{31}$$

степени $< 24ksn$ *для любых* $x \in I$ *удовлетворяет неравенству*

$$|g(x) - \mathfrak{Q}(x; g)| \leq c_6 \rho\, \varphi(\rho)\, K(x); \tag{32}$$

в частности,

$$\mathfrak{Q}(y_i; g) = 0, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. С учетом (20)–(23) для каждого $i = 1, \ldots, s$ согласно (17) и соответственно (28), (24) находим

$$|\mathfrak{D}(y_i; g)| = |g(y_i) - \mathfrak{D}(y_i; g)| \leq c_1 \rho_n(y_i)\, \varphi(\rho_n(y_i)) \leq$$

$$\leq c_7 h_{j_i}\left(\frac{|x - y_i| + \rho}{\rho}\right)^{k/2} \varphi(\rho), \quad x \in I, \tag{33}$$

$$|\mathcal{T}_i(y_i)| \geq c_8 / h_{j_i}. \tag{34}$$

Обозначим

$$\alpha(x) := \sum_{i=1}^{s} \frac{\mathcal{D}(y_i;\, g)}{\mathcal{T}_i(y_i)} \mathcal{T}_i(x).$$

Из (33), (34), (27), (24) и (20)–(23) для любых $x \in I$ вытекает неравенство

$$|\alpha(x)| \leq c_9 \varphi(\rho) \sum_{i=1}^{s} h_{j_i} \left(\frac{|x - y_i| + \rho}{\rho} \right)^{k/2} \times$$

$$\times \left(\frac{h_{j_i}}{|x - x_{j_i}| + h_{j_i}} \right)^{12ks} \left| \frac{\Pi(x;\, Y \setminus \{y_i\})}{\Pi(x_{j_i};\, Y \setminus \{y_i\})} \right| \leq$$

$$\leq c_{10} \varphi(\rho) \sum_{i=1}^{s} h_{j_i} \left(\frac{h_{j_i}}{|x - x_{j_i}| + \rho} \right)^{12ks - k - s + 1} \leq$$

$$\leq c_{11} \rho^2 \varphi(\rho) \sum_{i=1}^{s} \frac{h_{j_i}}{\left(|x - x_{j_i}| + \rho \right)^2} \leq 2 c_{11} \rho \varphi(\rho). \tag{35}$$

С учетом определения (19) из (35) и (17) следует оценка (32) для всех $x \in I \setminus O$.

С помощью неравенства В. К. Дзядыка [13] для модуля производной алгебраического многочлена имеем

$$|\alpha_i'(x)| \leq c_{12} \varphi(\rho), \quad x \in I. \tag{36}$$

Теперь, если $x \in O_i$, $i = 1, \ldots, s$, то из (36), (18) и равенства $g(y_i) = \mathfrak{Q}(y_i;\, g) = 0$ вытекает

$$|g(x) - \mathfrak{Q}(x;\, g)| = \left| \int_{y_i}^{x} \left(g'(y) - \mathfrak{Q}'(y;\, g) \right) dy \right| \leq$$

$$\leq |x - y_i| (c_2 + c_{12}) \varphi(\rho) \leq c_{13} \rho \varphi(\rho) K(x).$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Многочлен*

$$\mathcal{U}(x) := \mathcal{U}_n(x;\, Y) := \sum_{j \in H} h_j^2 \varphi(h_j) T_{j,n}'(x;\, Y) \operatorname{sign} d_j \tag{37}$$

степени $< 24ksn$ *для любых* $x \in I$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\mathcal{U}(x) \Pi(x) \geq 0, \tag{38}$$

$$|\mathcal{U}(x)| \leq c_{14} \rho \varphi(\rho), \tag{39}$$

$$|\mathcal{U}(x)| \geq c_{15} \rho \varphi(\rho) K(x). \tag{40}$$

Доказательство. Из (26) следует (38). Неравенство (39) вытекает из (27), (24), (20)–(23):

$$|\mathcal{U}(x)| \leq c_{16} \sum_{j \in H} h_j \varphi(h_j) \Gamma_j(x) \leq$$

$$\leq c_{17}\varphi(\rho)\sum_{j\in H}h_j\left(\frac{|x-x_j|+\rho}{\rho}\right)^{k/2}\left(\frac{h_j}{|x-x_j|+\rho}\right)^{12ks-s}\leq$$

$$\leq c_{18}\varphi(\rho)\sum_{j\in H}h_j\left(\frac{h_j}{|x-x_j|+\rho}\right)^{12ks-k-s}\leq c_{14}\rho\varphi(\rho),\quad x\in I.$$

Для фиксированного $x\in I\setminus O$ через j^* обозначим любой (их может быть два) индекс $j\in H$ такой, что $x\in I_{j^*}$; если $x\in O_i, i=1,\ldots,s$, то положим $j^*:=j_i+2$, где индекс j_i определен в начале п. 3. Таким образом, $j^*\in H$ при любом $x\in I$. Из (29), (20)–(23) получаем (40):

$$|\mathfrak{U}(x)|\geq c_{19}\varphi(\rho)K(x)\sum_{j\in H}h_j\left(\frac{\rho}{\operatorname{dist}(x,I_j)+\rho}\right)^{24ks+k+s}\geq$$

$$\geq c_{20}\varphi(\rho)K(x)h_{j^*}\geq c_{15}\rho\varphi(\rho)K(x),\quad x\in I.$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство *теоремы* 1. Из лемм 3 и 4 вытекает, что многочлен $P_n(x):=\mathfrak{Q}(x;f)+c_6\mathfrak{U}(x)/c_{15}$ степени $<24ksn$ удовлетворяет неравенствам (11) и (12). Действительно, с учетом (15) и (19) из (32) и (39) вытекает оценка (12) $(B_{s,k}=2^k(c_6+c_{14}c_6/c_{15}))$; а неравенство (11) следует из (32), (40) и (38). Теорема 1 доказана $(N_{Y,k}:=24ksN(Y))$.

Доказательство *теоремы* 3. Пусть $R_n(x)$ обозначает многочлен наилучшего (без ограничений) приближения функции $f\in C$ и

$$|f(x)-R_n(x)|\leq c\omega_k(f;\rho_n(x)),\quad x\in I,\quad n\geq k-1. \tag{41}$$

Воспользуемся многочленом

$$\overline{T}_j(x):=\frac{\int_{-1}^{x}t_j^{4k}(y)\,dy}{\int_{-1}^{1}t_j^{4k}(y)\,dy}$$

степени $8k(2n-1)+1$. Обозначим $\psi=\psi(t)$ k-мажоранту, т. е. $\psi\in\Phi^k$ и $\omega_k(f;t)\leq\psi(t)\leq 2^k\omega_k(f;t)$. Аналогично лемме 4 нетрудно показать, что неотрицательный на I многочлен

$$U(x):=\sum_{j=1}^{n}h_j\psi(h_j)\overline{T}_j'(x)$$

при всех $x\in I$ удовлетворяет неравенствам

$$c_{21}\psi(\rho)\leq U(x)\leq c_{22}\psi(\rho). \tag{42}$$

Действительно, оценки (42) вытекают из (20)–(23) и оценок

$$c_{23}\left(\frac{h_j}{|x-x_j|+h_j}\right)^{8k}\leq h_j\overline{T}_j'(x)\leq c_{24}\left(\frac{h_j}{|x-x_j|+h_j}\right)^{8k},$$

$$c_{25}\psi(\rho)\left(\frac{\rho}{|x-x_j|+\rho}\right)^{20k}\leq h_j\psi(h_j)\overline{T}_j'(x)\leq$$

$$\le c_{17}\varphi(\rho)\sum_{j\in H}h_j\left(\frac{|x-x_j|+\rho}{\rho}\right)^{k/2}\left(\frac{h_j}{|x-x_j|+\rho}\right)^{12ks-s}\le$$

$$\le c_{18}\,\varphi(\rho)\sum_{j\in H}h_j\left(\frac{h_j}{|x-x_j|+\rho}\right)^{12ks-k-s}\le c_{14}\rho\,\varphi(\rho),\quad x\in I.$$

Для фиксированного $x\in I\setminus O$ через j^* обозначим любой (их может быть два) индекс $j\in H$ такой, что $x\in I_{j^*}$; если $x\in O_i,\ i=1,\ldots,s$, то положим $j^*:=j_i+2$, где индекс j_i определен в начале п. 3. Таким образом, $j^*\in H$ при любом $x\in I$. Из (29), (20)–(23) получаем (40):

$$|\mathcal{U}(x)|\ge c_{19}\,\varphi(\rho)K(x)\sum_{j\in H}h_j\left(\frac{\rho}{\operatorname{dist}(x,I_j)+\rho}\right)^{24ks+k+s}\ge$$

$$\ge c_{20}\,\varphi(\rho)K(x)h_{j^*}\ge c_{15}\rho\,\varphi(\rho)K(x),\quad x\in I.$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство *теоремы* 1. Из лемм 3 и 4 вытекает, что многочлен $P_n(x):=\mathcal{Q}(x;f)+c_6\mathcal{U}(x)/c_{15}$ степени $<24ksn$ удовлетворяет неравенствам (11) и (12). Действительно, с учетом (15) и (19) из (32) и (39) вытекает оценка (12) $(B_{s,k}=2^k(c_6+c_{14}c_6/c_{15}))$; а неравенство (11) следует из (32), (40) и (38). Теорема 1 доказана $(N_{Y,k}:=24ksN(Y))$.

Доказательство *теоремы* 3. Пусть $R_n(x)$ обозначает многочлен наилучшего (без ограничений) приближения функции $f\in C$ и

$$|f(x)-R_n(x)|\le c\,\omega_k(f;\rho_n(x)),\quad x\in I,\quad n\ge k-1. \tag{41}$$

Воспользуемся многочленом

$$\overline{T}_j(x):=\frac{\int_{-1}^{x}t_j^{4k}(y)\,dy}{\int_{-1}^{1}t_j^{4k}(y)\,dy}$$

степени $8k(2n-1)+1$. Обозначим $\psi=\psi(t)$ k-мажоранту, т. е. $\psi\in\Phi^k$ и $\omega_k(f;t)\le\psi(t)\le 2^k\omega_k(f;t)$. Аналогично лемме 4 нетрудно показать, что неотрицательный на I многочлен

$$U(x):=\sum_{j=1}^{n}h_j\psi(h_j)\overline{T}_j'(x)$$

при всех $x\in I$ удовлетворяет неравенствам

$$c_{21}\psi(\rho)\le U(x)\le c_{22}\psi(\rho). \tag{42}$$

Действительно, оценки (42) вытекают из (20)–(23) и оценок

$$c_{23}\left(\frac{h_j}{|x-x_j|+h_j}\right)^{8k}\le h_j\overline{T}_j'(x)\le c_{24}\left(\frac{h_j}{|x-x_j|+h_j}\right)^{8k},$$

$$c_{25}\psi(\rho)\left(\frac{\rho}{|x-x_j|+\rho}\right)^{20k}\le h_j\psi(h_j)\overline{T}_j'(x)\le$$

$$\leq \; c_{26}\psi(\rho)\frac{\rho h_j}{\left(\left|x-x_j\right|+\rho\right)^2}, \quad x \in I,$$

аналогичных (27), (28).

Для $n \geq \max\{4; k-1\}$ обозначим

$$P_n^*(x) \;:=\; R_n(x) \;+\; c\,\mathfrak{U}(x)/\,c_{21}$$

многочлен степени $8k(2n-1)+1$, где c и R_n такие же, как и в (41). Согласно (41) и (42) имеем

$$P_n^*(x) \;\geq\; 0, \quad x \in I, \tag{43}$$

$$|f(x) - P_n^*(x)| \;\leq\; c(1+2^k c_2/\,c_1)\omega_k(f;\rho_n(x)), \quad x \in I. \tag{44}$$

Из (43) и (44) вытекает, что теорема 3 справедлива для $n \geq 8k\left(2(k+3)-1\right)+1$. Если $k-1 \leq n < 8k\left(2(k+3)-1\right)+1$, то теорема 3 является следствием тривиального факта (1). Теорема 3 доказана.

1. *Passow E., Raymon J.* Copositive polynomial approximation // J. Approx. Theory. – 1974. – **12**. – P. 299–304.
2. *Roulier J. A.* The degree of copositive approximation // Ibid. – 1977. – **19**. – P. 253–258.
3. *Leviatan D.* The degree of copositive approximation by polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – **88**. – P. 101–105.
4. *Hu Y. K., Leviatan D., Yu X. M.* Copositive polynomial approximation in $C[-1, 1]$ //J. Analysis. – 1993. – **1**. – P. 85–90.
5. *Kopotun K. A.* On copositive approximation by algebraic polynomials // Anal. Math. – (to appear).
6. *Hu. Y. K., Yu X. M.* The degree and algorithm of copositive approximation // SIAM Anal. – (to appear).
7. *Zhou S. P.* On copositive approximation // (to appear).
8. *Zhou S. P.* A counter example in copositive approximation // Israel J. Math. – 1992. – **78**. – P. 75–83.
9. *Yu X. M.* Degree of copositive polynomial approximation // Chin. Ann. Math. – 1989. – **10**. – P. 409–415.
10. *Hu. Y. K., Leviatan D., Yu X. M.* Copositive polynomial and spline approximation // J. Approx. Theory. – 1995. – **80**. – P. 204–218.
11. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevchuk I. A.* Piecewise monotone pointwise approximation. – Marseille, 1994. – (Preprint / CNRS Lumini; CPT-94/P.3121).
12. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 225 с.
13. *Дзядык В. К.* О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию (Lip α, $(0 < \alpha < 1)$) на конечном отрезке вещественной оси // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – **20**, № 2. – С. 623–642.

Получено 06.01.95