УДК 517.53

А. П. Голуб

Некоторые свойства биортогональных полиномов

При изучении аппроксимаций Паде функций с использованием обобщенных моментных представлений [1] приходится строить и исследовать различные системы биортогональных полиномов. В настоящей статье установлены некоторые общие результаты о биортогональных полиномах.

Отправной точкой для их получения является следующее утверждение, приводимое здесь в несколько более общей форме, чем в первоисточнике.

Теорема 1 (В. К. Дзядык [1]). *Пусть $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ — числовая последовательность такая, что все ее определители Ганкеля отличны от нуля:*

$$H_N = \det S_N = \det \| s_{i+j} \|_{i,j=0}^{N} \neq 0, \quad N = \overline{0, \infty},$$

и пусть в банаховом пространстве X задана последовательность $\{y_i\}_{i=0}^{\infty}$, а в сопряженном к нему пространстве X^* — последовательность функционалов $\{l_j\}_{j=0}^{\infty}$, и при этом справедливы равенства

$$l_j(y_i) = s_{i+j}, \quad i, j = \overline{0, \infty}.$$

Тогда, если при каждом $N = \overline{0, \infty}$ построить обобщенные полиномы

$$Y_0 = \varepsilon_0 y_0, \quad Y_M = \varepsilon_M \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_M \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{M+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{M-1} & s_M & s_{M+1} & \cdots & s_{2M-1} \\ y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_M \end{vmatrix}, \quad M = \overline{1, \infty}, \quad (1)$$

$$L_0 = \varepsilon_0 l_0, \quad L_N = \varepsilon_N \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_N \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{N-1} & s_N & s_{N+1} & \cdots & s_{2N-1} \\ l_0 & l_1 & l_2 & \cdots & l_N \end{vmatrix}, \quad N = \overline{1, \infty}, \quad (1')$$

где $\varepsilon_N := \dfrac{1}{\sqrt{H_N H_{N-1}}}$, $N = \overline{0, \infty}$, $H_{-1} := 1$, *то будут выполняться соотношения биортогональности*

$$L_N(Y_M) = \delta_{M,N}, \quad M, N = \overline{0, \infty}.$$

Построим для указанных выше систем биортогональных полиномов трехчленные рекуррентные соотношения при дополнительных ограничениях, которые в применениях к вопросам рациональной аппроксимации оказались достаточно естественными.

Теорема 2. *Пусть при условиях теоремы* 1 *существует линейный ограниченный оператор* $A : X \to X$ *такой, что*

$$Ay_i = y_{i+1}, \quad i = \overline{0, \infty}.$$

Тогда для биортогональных полиномов (1), (1′) *справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$AY_M = \alpha_M Y_{M+1} + \gamma_M Y_M + \alpha_{M-1} Y_{M-1}, \quad M \geqslant 0,$$

$$A^* L_N = \alpha_N L_{N+1} + \gamma_N L_N + \alpha_{N-1} L_{N-1}, \quad N \geqslant 0,$$

где $A^* : X^* \to X^*$ — *оператор, сопряженный к* A, $\alpha_M = \sqrt{H_{M-1} H_{M+1}}/H_M$, $M \geqslant 0$, $\alpha_{-1} := 0$, $\gamma_M = \tilde{H}_M/H_M + \tilde{H}_{M-1}/H_{M-1}$,

$$\tilde{H}_M := \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_M \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{M+1} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot \\ s_{M-1} & s_M & \cdots & s_{2M-1} \\ s_{M+1} & s_{M+2} & \cdots & s_{2M+1} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Запишем Y_M в виде

$$Y_M = \sum_{i=0}^{M} c_i^{(M)} y_i. \tag{2}$$

Применив к (2) оператор A, получим

$$AY_M = \sum_{i=0}^{M} c_i^{(M)} y_{i+1} = \sum_{i=0}^{M+1} d_i^{(M+1)} Y_i. \tag{3}$$

Аналогично

$$A^* L_N = \sum_{j=0}^{N+1} \tilde{d}_j^{(N+1)} L_j. \tag{4}$$

Чтобы определить коэффициенты $d_i^{(M+1)}$, $i = \overline{0, M+1}$, $\tilde{d}_j^{(N+1)}$, $j = \overline{0, N+1}$, применим к (3) функционалы L_N, $N = \overline{0, \infty}$. Очевидно

$$L_N (AY_M) = \begin{cases} 0 & \text{при } N \geqslant M+2; \\ d_N^{(M+1)} & \text{при } N \leqslant M+1. \end{cases}$$

С другой стороны

$$L_N (AY_M) = (A^* L_N)(Y_M) = \begin{cases} 0 & \text{при } M \geqslant N+2; \\ \tilde{d}_M^{(N+1} & \text{при } M \leqslant N+1. \end{cases}$$

Сравниваем в (3) коэффициенты при y_{M+1}:

$$c_M^{(M)} = d_{M+1}^{(M+1)} c_{M+1}^{(M+1)}.$$

Учитывая, что в силу (1)

$$c_M^{(M)} = \sqrt{\frac{H_{M-1}}{H_M}},$$

получаем

$$d_{M+1}^{(M+1)} = \frac{c_M^{(M)}}{c_{M+1}^{(M+1)}} = \frac{\sqrt{H_{M-1} H_{M+1}}}{H_M}.$$

Аналогично, приравнивая в (4) коэффициенты при l_{N+1}, находим

$$\tilde{d}_{N+1}^{(N+1)} = \frac{\sqrt{H_{N-1}H_{N+1}}}{H_N}.$$

Для окончания доказательства теоремы осталось установить формулу для γ_M, $M = \overline{0, \infty}$. Очевидно

$$\gamma_M = d_M^{(M+1)} = L_M(AY_M) = L_M\left(\sum_{i=0}^{M} c_i^{(M)} y_{i+1}\right) = L_M(c_M^{(M)} y_{M+1} + c_{M-1}^{(M)} y_M) =$$

$$= c_M^{(M)} L_M(y_{M+1}) + c_{M-1}^{(M)} L_M(y_M).$$

Из (1) имеем

$$c_M^{(M)} = \sqrt{\frac{H_{M-1}}{H_M}}, \quad c_{M-1}^{(M)} = \varepsilon_M \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{M-2} & s_M \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{M-1} & s_{M+1} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ s_{M-1} & s_M & \cdots & s_{2M-3} & s_{2M-1} \end{vmatrix}.$$

Легко находим

$$L_M(y_{M+1}) = \varepsilon_M \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_M \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{M+1} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot \\ s_{M-1} & s_M & \cdots & s_{2M-1} \\ s_{M+1} & s_{M+2} & \cdots & s_{2M+1} \end{vmatrix} = \varepsilon_M \tilde{H}_M,$$

$$L_M(y_M) = \varepsilon_M H_M.$$

Получаем

$$\gamma_M = \sqrt{\frac{H_{M-1}}{H_M}} \frac{1}{\sqrt{H_M H_{M-1}}} \tilde{H}_M + \sqrt{\frac{H_M}{H_{M-1}}} \frac{1}{\sqrt{H_M H_{M-1}}} \tilde{H}_{M-1} =$$

$$= \frac{\tilde{H}_M}{H_M} + \frac{\tilde{H}_{M-1}}{H_{M-1}},$$

что и требовалось.

Замечание. В несколько более узкой формулировке аналогичный результат приведен в [2, с. 358].

В приложениях систем биортогональных полиномов к рациональной аппроксимации важным является вопрос нахождения критериев невырожденной биортогонализируемости, более эффективных, чем отличие от нуля определителей Ганкеля. Отчасти ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ — *числовая последовательность, для которой построены обобщенные моментные представления вида*

$$s_{i+j} = \int_0^1 a_i(t)\, b_j(t)\, d\mu(t) = (a_i, b_j)_{L_2([0,1], d\mu(t))}, \quad i, j = \overline{0, \infty},$$

где $\{a_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$, $\{b_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ — *некоторые последовательности непрерывных функций, а* $\mu(t)$ — *неубывающая функция, имеющая бесконечное число точек роста. Тогда для того чтобы* $\forall M, N = \overline{0, \infty}$ *существовали полино-*

мы вида

$$A_M(t)=\sum_{i=0}^{M} c_i^{(M)} a_i(t),\quad c_M^{(M)}\neq 0,$$

$$B_N(t)=\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} b_j(t),\quad c_N^{(N)}\neq 0, \tag{5}$$

обладающие свойствами биортогональности

$$\int_0^1 A_M(t)\,B_N(t)\,d\mu(t)=\delta_{M,N},\quad M,N=\overline{0,\infty},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали две последовательности линейных непрерывных операторов $T_k,\ U_k: L_2([0,1], d\mu(t))\to L_2([0,1], d\mu(t))$ *такие, что*

$$(T_k a_i, U_k b_j)_{L_2}=(a_i, b_j)_{L_2}=s_{i+j},\quad i,j=\overline{0,k},$$

и системы функций $\{(T_k a_i)(t)\}_{i=0}^{M}$, $\{(U_k b_j)(t)\}_{j=0}^{N}$ *являются чебышевскими на* $[0,1]$ *при всех* $M,N=\overline{0,k}$, $k=\overline{0,\infty}$.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что полиномы (5) существуют. Тогда, как легко видеть, отличны от нуля определители $H_N=\det\|s_{i+j}\|_{i,j=0}^{N}$, $N=\overline{0,\infty}$. Но в таком случае согласно теореме 1.1 из [3] можно построить обобщенные моментные представления вида

$$s_{i+j}=\int_0^1 \tilde a_i(t)\,\tilde b_j(t)\,d\mu(t),\quad i,j=\overline{0,\infty},$$

где $\tilde a_i(t)$, $\tilde b_j(t)$ — алгебраические полиномы степеней в точности равных i и j соответственно. Поэтому, если построить конечномерные линейные операторы, обладающие свойствами

$$T_k a_i=\tilde a_i,\quad i=\overline{0,k},$$

$$T_k\varphi=0,\ \text{если}\ \varphi\perp a_i,\ i=\overline{0,k},$$

$$U_k b_j=\tilde b_j,\quad j=\overline{0,k},$$

$$U_k\psi=0,\ \text{если}\ \psi\perp b_j,\quad j=\overline{0,k},$$

то они будут удовлетворять всем условиям теоремы.

Достаточность. Допустим, что системы функций $\{(T_k a_i)(t)\}_{i=0}^{M}$ и $\{(U_k b_j)(t)\}_{j=0}^{N}$ являются чебышевскими. Докажем, что в таком случае их можно биортогонализировать, а именно, что $\forall M,N=\overline{0,k}$, $k=\overline{0,\infty}$, существуют полиномы

$$A_M^T(t)=\sum_{i=0}^{M} c_i^{(M)}(T_k a_i)(t),$$

$$B_N^U(t)=\sum_{j=0}^{N} d_j^{(N)}(U_k b_j)(t), \tag{6}$$

имеющие в точности M и N простых нулей на $(0,1)$ соответственно, и такие, что

$$\int_0^1 A_M^T(t)\,B_N^U(t)\,d\mu(t)=\delta_{M,N}. \tag{7}$$

Очевидно, $\forall M = \overline{0, \infty}$ можно построить не равный тождественно нулю полином $\tilde{A}_M^T(t)$, обладающий свойствами

$$\int_0^1 \tilde{A}_M^T(t)(U_k b_j)(t)\, d\mu(t) = 0, \quad j = \overline{0, M-1}. \tag{8}$$

Предположим, что $\tilde{A}_M^T$ имеет $m < M$ нулей на $(0, 1)$. Тогда, пользуясь чебышевскими свойствами системы функций $\{(U_k b_j)(t)\}_{j=0}^m$ [4, с. 21], можно построить полином $R_m(t)$ по этой системе, имеющий простые нули в нулях $\tilde{A}_M^T(t)$. Но тогда произведение $\tilde{A}_M^T(t) R_m(t)$ будет сохранять знак на $[0, 1]$ и, значит, $\int_0^1 \tilde{A}_M^T(t) R_m(t)\, d\mu(t) \neq 0$, что противоречит равенству (8).

Таким образом, $\tilde{A}_M^T(t)$ имеет M простых нулей на $(0, 1)$ и, значит, в (6) $c_M^{(M)} \neq 0$. Кроме того,

$$\int_0^1 \tilde{A}_M^T(t)(U_k b_M)(t)\, d\mu(t) \neq 0,$$

так как в противном случае мы бы построили полином $R_M(t)$ по системе функций $\{(U_k b_j)(t)\}_{j=0}^M$, имеющий простые нули в нулях $\tilde{A}_M^T(t)$, и снова пришли бы к противоречию.

Аналогично построим не равный тождественно нулю полином $\tilde{B}_N^T(t)$ такой, что

$$\int_0^1 (T_k a_i)(t)\, \tilde{B}_N^T(t)\, d\mu(t) = 0, \quad i = \overline{0, N-1}.$$

После этого, чтобы найти полиномы $A_M^T(t)$, $B_N^U(t)$, удовлетворяющие (7), достаточно произвести нормировку полиномов $\tilde{A}_M^T(t)$ и $\tilde{B}_N^U(t)$. Из (7) же следует, что определители $H_N = \det \| s_{i+j} \|_{i,j=0}^N$, $N = \overline{0, k}$, $k = \overline{0, \infty}$, отличны от нуля, откуда легко заключить, что полиномы (5) действительно существуют. Теорема доказана.

1. *Дзядык В. К.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 3.— С. 297—302.
2. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде.— М. : Мир, 1986.— 502 с.
3. *Дзядык В. К., Голуб А. П.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде.— Киев, 1981.— С. 3—15.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций алгебраическими полиномами.— М. : Наука, 1967.— 512 с.

Ин-т пробл. моделирования в энергетике АН УССР, Киев

Получено 12.12.86