УДК 517.2

С. В. Кузнецов

О сходимости метрических проекций

Многочисленные задачи, возникающие в теории приближений, приводят к необходимости построения метрической проекции некоторого элемента $g \in L^p(X, d\lambda)$, $1 < p < \infty$, на выпуклое и компактное в $L^p(X, d\lambda)$ множество K, где X — локально компактное пространство, а $d\lambda$ — ограниченная на X мера Радона. В то время как в теоретических вопросах $d\lambda$ чаще всего представляет собой непрерывную меру, для которой любое одноточечное множество из X пренебрежимо, на практике в качестве меры $d\lambda$ обычно выбирается дискретная мера, или последовательность дискретных мер, сходящаяся в некоторой топологии к исходной мере. В этих условиях представляет интерес поведение метрических проекций, соответствующих выбору различных мер на X. При этом, естественно, элемент g и компакт K должны иметь смысл для всех пространств $L^p(d\lambda)$, соответствующих рассматриваемым мерам на X.

Ниже используются следующие функциональные пространства: $\mathcal{K}(X)$ — пространство непрерывных функций с компактным в X носителем, наделенное топологией индуктивного предела; $C(X)$ — пространство непрерывных на X функций; $C_u^b(X)$ — пространство непрерывных и ограниченных на X функций, нижний индекс u относится к топологии равномерной сходимости.

Теорема. *Пусть* $(d\lambda_n)$ — *последовательность положительных ограниченных радоновых мер на* X, *просто сходящаяся на тотальном в* $\mathcal{K}(X)$ *подмножестве к ограниченной радоновой мере* $d\lambda_0$ *и* $\lambda_n(1) \to \lambda_0(1)$, $n \to \infty$. *Если* K *компактно и выпукло в* $C_u^b(X)$ *и сужения на* K *канонических вложений* $\alpha_j: C_u^b \to L^p(d\lambda_j)$, $j = 0, 1, \ldots, 1 < p < \infty$, *инъективны, то для любого* $g \in C^b(X)$ *последовательность метрических проекций* $(\alpha_0\alpha_n^{-1}\mathrm{Pr}_{\alpha_n(K), d\lambda_n}(\alpha_n(g)))$ *сходится к* $\mathrm{Pr}_{\alpha_0(K), d\lambda_0}(\alpha_0(g))$ *в топологии* $L^p(d\lambda_0)$, $1 < p < \infty$.

Доказательство. Заметим, что условие теоремы обеспечивает гомеоморфность на K канонических вложений α_j, $j = 0, 1, \ldots$ Это позволяет отождествить K со своим образом в каждом из пространств $L^p(d\lambda_j)$. Аналогичное отождествление будет использоваться для элемента $g \in C^b(X)$.

Множество K, будучи компактным и выпуклым, является чебышевским в каждом из пространств $L^p(d\lambda_j)$, $1 < p < \infty$ [1], так что операторы метрической проекции на K однозначно определены. Обозначим метрическую проекцию g на K в $L^p(d\lambda_j)$ через y_j. Из определения метрической проекции следует

$$\rho_{d\lambda_n}(y_n, g) \leqslant \rho_{d\lambda_n}(y_0, g), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

$$\rho_{d\lambda_0}(y_0, g) \leqslant \rho_{d\lambda_0}(y_n, g), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где через ρ с соответствующим индексом обозначено расстояние в соответствующих L^p-топологиях.

Множество $\Lambda = \bigcup_{j=0}^{\infty} d\lambda_j$ ограничено в широкой топологии в пространстве M^b ограниченных радоновых мер. В силу бочечности $\mathcal{K}(X)$ Λ — равностепенно непрерывно, откуда вытекает широкая сходимость $d\lambda_n \to d\lambda_0$.

В силу одного результата Бурбаки [2] (гл. IX, § 5, предложение 9) широкая сходимость последовательности $(d\lambda_n)$ и условие $\lambda_n(1) \to \lambda_0(1)$ влекут за собой узкую сходимость $d\lambda_n \to d\lambda_0$. Напомним, что узкая топология в пространстве ограниченных радоновых мер,— это слабая топология относительно двойственности $\langle M^b, C_u^b\rangle$. Предыдущий результат обеспечивает ограниченность множества Λ в узкой топологии. Поскольку C_u^b бочечно, применима теорема Банаха—Штейнгауза, в силу которой ограниченность Λ и узкая сходимость $d\lambda_n \to d\lambda_0$ влекут за собой сходимость $d\lambda_n \to d\lambda_0$ в топологии Аренса.

Принимая во внимание, что $y_j \in K$ и K компактно, из предыдущих рассуждений получаем

$$\rho_{d\lambda_0}(y_0, g) - \varepsilon < \rho_{d\lambda_n}(y_0, g) < \rho_{d\lambda_0}(y_0, g) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad n > N. \tag{3}$$

Из неравенства (1), (3) следует

$$\rho_{d\lambda_n}(y_n, g) < \rho_{d\lambda_0}(y_0, g) + \varepsilon. \tag{4}$$

Еще раз используя сходимость $(d\lambda_n)$ к $d\lambda_0$ в топологии Аренса, из (4) получаем

$$\rho_{d\lambda_0}(y_n, g) < \rho_{d\lambda_0}(y_0, g) + 2\varepsilon, \quad n > N'. \tag{5}$$

Неравенства (2), (5) показывают, что последовательность (y_n) — минимизирующая на K. Поскольку пространства L^p при любом p, $1 < p < \infty$, равномерно выпуклы [1], K является аппроксимативно компактным, что обеспечивает сходимость $y_n \to y_0$ в $L^p(d\lambda_0)$.

С учетом гомеоморфности вложений α_j на K, из доказанной теоремы немедленно вытекает такое следствие.

Следствие. *Последовательность метрических проекций* (y_n) *сходится к* y_0 *в топологии равномерной сходимости.*

З а м е ч а н и е. Формулировка теоремы допускает небольшое изменение, если отказаться от условий простой секвенциальной сходимости и $\lambda_n(1) \to \lambda_0(1)$, $n \to \infty$, и заменить эти условия простой сходимостью некоторого фильтра в M^b на тотальном в C_u^b подмножестве и ограниченностью этого фильтра в узкой топологии.

П р и м е р. Пусть $X = [a, b]$ — ограниченный интервал в R^1, $(d\lambda_n)$ — последовательность положительных дискретных мер, просто сходящаяся к мере Лебега $d\lambda_0$ на тотальном в $C_u^\pi(X)$ подмножестве, порожденном тригонометрическими полиномами. Здесь $C_u^\pi(X)$ — пространство непрерывных периодических функций, нижний индекс u указывает на топологию равномерной сходимости. Если последовательность $(d\lambda_n)$ ограничена (что имеет место для мер $d\lambda_n$, отвечающих квадратурам Чебышева), то последовательность соответствующих метрических проекций на любое выпуклое и компактное подмножество $K \subset C_u^\pi(X)$ сходится.

1. *Власов Л. П.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Успехи мат. наук.— 1973.— **28**, № 6.— С. 3—66.
2. *Бурбаки Н.* Интегрирование.— М. : Наука, 1977.— 600 с.

Моск. инж.-строит. ин-т Получено 05.11.87