УДК 517.9

А. Ф. Иванов, Т. Кусано

Колеблемость решений одного класса функционально-дифференциальных уравнений первого порядка нейтрального типа

В настоящей работе рассматриваются функционально-дифференциальные уравнения вида

$$\frac{d}{dt}[x(t)+\lambda x(t-\tau)] = \sum_{i=1}^{n} q_i(t) f_i(x(g_i(t))), \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}[x(t)-\lambda x(t-\tau)] + \sum_{i=1}^{N} q_i(t) f_i(x(g_i(t))) = 0 \qquad (2)$$

при следующих предположениях:

а) λ и τ — положительные постоянные;

б) $q_i : [a, \infty) \to (0, \infty)$, $1 \leqslant i \leqslant N$,— непрерывные функции;

в) $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant N$,— непрерывные неубывающие функции, удовлетворяющие условию $yf_i(y) > 0$, $y \neq 0$;

г) $g_i : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, — непрерывные неубывающие функции, удовлетворяющие условию $\lim\limits_{t\to\infty} g_i(t) = \infty$.

Под правильным решением уравнений (1), (2) понимается функция $x : [T_x, \infty) \to \mathbb{R}$ такая, что $\sup\{|x(t)|, t \geqslant T\} > 0$ для произвольного $T \geqslant T_x$, а выражение $x(t) \pm \lambda x(t-\tau)$ принадлежит классу C^1 и удовлетворяет соответствующему уравнению при достаточно больших t. Предполагается, что уравнения (1) и (2) допускают правильные решения. Правильное решение называется колеблющимся, если оно имеет сколь угодно большие нули. В противном случае решение называется неколеблющимся.

Задача о колеблемости (неколеблемости) решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа изучалась в ряде работ (см., например, [1—7]. В частности, у работе [5] получено необходимое и достаточное условие колеблемости всех решений линейного уравнения $x'(t) + px'(t-\tau) + qx(t-\sigma) = 0$, где p, q, τ, σ — постоянные.

Основное содержание настоящей работы составляют следующие утверждения.

Теорема 1. *Предположим, что в дополнение к* а)—г) *выполняются условия* $0 < \lambda < 1$, $g_i(t) > t$ *при* $t \geqslant a$,

$$\int\limits_M^{\infty} \frac{dy}{f_i(y)} < \infty, \quad \int\limits_{-M}^{-\infty} \frac{dy}{f_i(y)} < \infty \tag{3}$$

при каждом $1 \leqslant i \leqslant N$ *и произвольном* $M > 0$.

Все правильные решения уравнения (1) *колеблющиеся тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_a^{\infty} q_i(t)\, dt = \infty. \tag{4}$$

Теорема 2. *Предположим, что в дополнение к* а) — г) *выполняются условия* $0 < \lambda < 1$, $g_i(t) < t$ при $t \geqslant a$,

$$\int\limits_0^{m} \frac{dy}{f_i(y)} < \infty, \quad \int\limits_0^{-m} \frac{dy}{f_i(y)} < \infty \tag{5}$$

при каждом $1 \leqslant i \leqslant N$ *и произвольном* $m > 0$.

Все правильные решения уравнения (2) *колеблющиеся тогда и только тогда, когда выполняется условие* (4).

Теоремы 1, 2 следуют из теорем 3—5, сформулированных ниже, которые дают критерии существования или отсутствия неколеблющихся решений уравнений (1) и (2).

Теорема 3. *Предположим, что в дополнение к* а)—г) $0 < \lambda < 1$. *Если выполняется условие*

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_a^{\infty} q_i(t)\, dt < \infty, \tag{6}$$

то уравнения (1) и (2) *имеют неколеблющиеся решения.*

Доказательство. Рассмотрим сначала уравнение (1). Пусть $c > 0$ — произвольная постоянная. Выберем достаточно большое $T > 0$ так, чтобы

$$T_* = \min\{T - \tau, \inf_{t \geqslant T} g_1(t), \ldots, \inf_{t \geqslant T} g_N(t)\} \geqslant a, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(c/\lambda) \int\limits_T^{\infty} q_i(t)\, dt \leqslant (1-\lambda)\, c/\lambda. \tag{8}$$

Пусть X — множество функций из $C[T_*, \infty)$, которые не убывают при $t \geqslant T_*$ и удовлетворяют условиям $c \leqslant x(t) \leqslant c/\lambda$ при $t \geqslant T$ и $x(t) = x(T)$ при $T_* \leqslant t \leqslant T$. Легко видеть, что X — замкнутое выпуклое подмножество пространства Фреше $C[T_*, \infty)$. Каждому $x \in X$ поставим в соответствие функцию $\tilde{x} : [T_*, \infty) \to \mathbb{R}$, определяемую следующим образом:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{j=0}^{n(t)-1} (-\lambda)^j x(t - j\tau) + \frac{(-\lambda)^{n(t)} x(t)}{1+\lambda}, \quad t > T,$$
$$\tilde{x}(t) = \frac{x(T)}{1+\lambda}, \quad T_* \leqslant t \leqslant T, \tag{9}$$

где $n(t)$ — наименьшее положительное целое число такое, что $T_* < t - n(t)\tau \leqslant T$. Легко видеть, что функция $x(t)$ непрерывна и положительна на $[T_*, \infty)$ и удовлетворяет условию

$$\tilde{x}(t) + \lambda\tilde{x}(t-\tau) = x(t), \quad t \geqslant T. \tag{10}$$

Заметим, что неравенство $\tilde{x}(t) > 0$ следует из условия $0 < \lambda < 1$ и монотонности $x(t)$.

Определим отображение $\Phi : X \to C[T_*, \infty)$ следующим образом:

$$\Phi x(t) = c + \sum_{i=1}^{N} \int_T^t q_i(s) f_i(\tilde{x}(g_i(s)))\, ds, \quad t \geqslant T,$$
$$\Phi x(t) = c, \quad t_* \leqslant t \leqslant T, \tag{11}$$

где $\tilde{x}$ определяется из соотношения (9). (Идея введения функции $\tilde{x}$ содержится в работе [4].) Легко видеть, что если $x \in X$, то $\Phi\ x(t)$ не убывает, а из (7) и неравенства $0 < \tilde{x}(t) < x(t)$ следует $c \leqslant \Phi x(t) \leqslant c + \sum_{i=1}^{N} \int_T^\infty q_i(s) \times f_i(c/\lambda)\, ds \leqslant c/\lambda$, $t \geqslant T$, т. е. $\Phi x \in X \forall x \in X$.

Таким образом, Φ отображает X в себя. Очевидно, что Φ непрерывно и $\Phi(X)$ — относительно компактное множество в топологии пространства $C[T_*, \infty)$. Следовательно, по теореме Шаудера — Тихонова о неподвижной точке существует $x^* \in X$ такое, что $x^* = \Phi x^*$, т. е. $x^*(t) = c + \sum_{i=1}^{N} \int_T^\infty q_i(s) \times f_i(\tilde{x}^*(g_i(s)))\, ds$, $t \geqslant T$. Учитывая (10), получаем $\tilde{x}^*(t) + \lambda\tilde{x}^*(t-\tau) = c + \sum_{i=1}^{N} \int_T^t q_i(s) f_i(\tilde{x}^*(g_i(s)))\, ds$, $t \geqslant T$, а вычисляя производную, видим, что $\tilde{x}^*(t)$ — положительное (следовательно, неколеблющееся) решение уравнения (1). Аналогично строятся отрицательные решения уравнения (1).

Рассмотрим теперь уравнение (2). Пусть $c > 0$ — зафиксировано, и выберем $T > a$ такое, что выполняется условие (7) и неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} f_i\left(\frac{2c}{1-\lambda}\right) \int_T^\infty q_i(t)\, dt \leqslant c/2. \tag{12}$$

Пусть Y — множество функций из $C[T_*, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам $c/2 \leqslant y(t) \leqslant c$ при $t \geqslant T$ и $y(t) = y(T)$ при $T_* \leqslant t \leqslant T$. Следуя работе [4], каждому $y \in Y$ поставим в соответствие функцию $\hat{y} : [T_*, \infty) \to \mathbb{R}$, определяемую следующим образом:

$$\hat{y}(t) = \sum_{j=1}^{n(t)-1} \lambda^j y(t - j\tau) + \frac{\lambda^{n(t)} y(T)}{1-\lambda}, \quad t > T,$$
$$\hat{y}(t) = \frac{y(T)}{1-\lambda}, \quad T_* \leqslant t \leqslant T. \tag{13}$$

Легко проверить, что $\hat{y}(t)$ положительна и непрерывна на $[T_*, \infty)$ и удовлетворяет соотношению

$$\hat{y}(t) - \lambda\hat{y}(t-\tau) = y(t), \quad t \geqslant T. \tag{14}$$

Определим отображение $\Psi: Y \to G[T_*, \infty)$ следующим образом:

$$\Psi y(t) = c - \sum_{i=1}^{N} \int_{T}^{t} q_i(t) f_i(\hat{y}(g_i(s)))\, ds, \quad t \geqslant T,$$
$$\Psi y(t) = c, \quad T_* \leqslant t \leqslant T. \tag{15}$$

Если $y \in Y$, то функция $\hat{y}(t)$ удовлетворяет неравенству $\hat{y}(t) \leqslant 2c/(1-\lambda)$, $t \geqslant T_*$, а из (12) следует, что Ψ отображает Y в себя. Легко проверить, что Ψ — непрерывно, $\Psi(Y)$ — относительно компактно. Следовательно, Ψ имеет в Y неподвижную точку y^*. С учетом (14) заключаем, что $y^*(t)$ удовлетворяет уравнению $\hat{y}^*(t) - \lambda\hat{y}^*(t-\tau) = c - \sum_{i=1}^{N} \int_{T}^{t} q_i(s) f_i(\hat{y}^*(g_i(s)))\, ds$, $t \geqslant T$. Следовательно, $y^*(t)$ — положительное решение уравнения (2). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Предположим, что в дополнение к* а)—г) *выполняются соотношения* (1) *и* $0 < \lambda < 1$. *Если*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} q_i(t)\, dt = \infty, \tag{16}$$

где $A_i = \{t \in [a, \infty): g_i(t) > t\}$, *то все правильные решения уравнения* (1) *колеблющиеся.*

Теорема 5. *Предположим, что в дополнение к* а)—г) *выполняются соотношения* (5) *и* $0 < \lambda < 1$. *Если*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{R_i} q_i(t)\, dt = \infty, \tag{17}$$

где $R_i = \{t \in [a, \infty): g_i(t) < t\}$, *то все правильные решения уравнения* (2) *колеблющиеся.*

Доказательство теоремы 4. Используем здесь метод работы [8] (теорема 1). Пусть x — положительное неосциллирующее решение уравнения (1). Положим

$$y(t) = x(t) + \lambda x(t-\tau). \tag{18}$$

Из уравнения (1) следует, что $y(t)$ монотонно возрастает при достаточно больших t. Используя это, а также (18), имеем $x(t) = y(t) - \lambda y(t-\tau) + \lambda^2 x(t-2\tau) > (1-\lambda)\, y(t)$, так что

$$x(g_i(t)) > (1-\lambda)\, y(g_i(t)), \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{19}$$

при всех достаточно больших $t\,(t \geqslant T)$. Из (19) и уравнения (1) получаем $y'(t) \geqslant \sum_{i=1}^{N} q_i(t) f_i((1-\lambda)\, y(g_i(t)))$, $t \geqslant T$, или

$$z'(t) \geqslant (1-\lambda) \sum_{i=1}^{N} q_i(t) f_i(z(g_i(t))), \quad t \geqslant T, \tag{20}$$

где $z(t) = (1-\lambda)\, y(t)$. Пусть i фиксировано. Рассмотрим интервал $[T, T']$, $T' > T$. Поскольку $f_i(z(t))$ не убывает, то $f_i(z(g_i(t))) \geqslant f_i(z(t))$ при $t \in A_i \cap [T, T']$. Из (20) следует $\int_{T}^{T'} z'(t)\, dt/f_i(z(t)) \geqslant (1-\lambda) \int_{T}^{T'} q_i(t) \times$

$\times [f_i(z(g_i(t)))/f_i(z(t))]\, dt \geqslant (1-\lambda) \int\limits_{A_i \cap [T, T']} q_i(t)\, dt$. Переходя к пределу при $T' \to \infty$, с учетом (3) получаем $\int\limits_{A_i \cap [T, \infty)} q_i(t)\, dt \leqslant (1-\lambda)^{-1} \int\limits_{z(T)}^{\infty} \frac{dy}{f_i(y)} < \infty$.

Поскольку i произвольно, то последнее неравенство противоречит условию (16). Следовательно, уравнение (1) не может иметь положительных решений. Аналогично можно показать, что уравнение (1) не имеет отрицательных решений. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Предположим, что уравнение (2) имеет положительное решение $x(t)$. Положим

$$y(t) = x(t) - \lambda x(t-\tau). \tag{21}$$

Из уравнения (2) следует, что $y(t)$ убывает при достаточно больших t. Покажем, что $y(t)$ остается положительным. Если это не так, то $y(t)$ стремится к отрицательному пределу при $t \to \infty$. С другой стороны, если $y(t)$ — отрицательно, то $x(t) < \lambda x(t-\tau)$, или $x(t+\tau) < \lambda x(t)$. Следовательно, $x(t+n\tau) < \lambda^n x(t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, для произвольного достаточно большого t. Поскольку $\lambda < 1$, то $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Но это противоречит допущению на $y(t)$.

Используя положительность $y(t)$ и неравенство $y(t) \leqslant x(t)$ при больших t, из уравнения (2) следует

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{N} q_i(t) f_i(y(g_i(t))) \leqslant 0, \quad t \geqslant T, \tag{22}$$

при некотором $T > a$. Пусть i — фиксировано. Рассмотрим интервал $[T, T']$, $T' > T$. Поскольку $f_i(y(g_i(t))) \geqslant f(y(t))$ при $t \in R_i \cap [T, T']$, то из (22) следует $-\int\limits_T^{T'} y'(t)\, dt/f_i(y(t)) \geqslant \int\limits_T^{T'} q_i(t) [f_i(y(g_i(t)))/f_i(y(t))]\, dt \geqslant \int\limits_{R_i \cap [T, T']} q_i(t)\, dt$, откуда с учетом (5) получаем $\int\limits_{R_i \cap [T, \infty)} q_i(t)\, dt \leqslant \int\limits_0^{y(T)} dy/f_i(y) < \infty$. Поскольку i — произвольное, то последнее неравенство противоречит условию (17). Следовательно, уравнение (2) не может иметь положительных решений. Аналогично показывается, что уравнение (2) не имеет отрицательных решений. Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 1 следует из теорем 3 и 4, если заметить, что в случае $g_i(t) > t$, $1 \leqslant i \leqslant N$, условие (16) сводится к (4). Поскольку в случае $g_i(t) < t$, $1 \leqslant i \leqslant N$, условие (17) сводится к (4), то теорема 2 следует из теорем 3 и 5.

Пример. Рассмотрим уравнения

$$\frac{d}{dt}[x(t) + \lambda x(t-\tau)] = \alpha t^{\beta} |x(\theta t)|^{\gamma} \operatorname{sgn} x(\theta t), \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt}[x(t) - \lambda x(t-\tau)] + \alpha t^{\beta} |x(\theta t)|^{\gamma} \operatorname{sgn} x(\theta t) = 0, \tag{24}$$

где $0 < \lambda < 1$, $\tau > 0$, α, γ, $\theta > 0$, β — произвольная константа. Уравнения (23) и (24) представляют собой частные случаи уравнений (1) и (2), где $N = 1$, $q_1(t) = \alpha t^{\beta}$, $f_1(y) = |y|^{\gamma} \operatorname{sgn} y$, $g_1(t) = \theta t$.

В случае $\gamma > 1$, $\theta > 1$ из теоремы 1 следует, что все правильные решения уравнения (23) колеблющиеся тогда и только тогда, когда $\beta \geqslant -1$. В случае $\gamma < 1$, $\theta < 1$ из теоремы 2 следует, что все правильные решения уравнения (24) колеблющиеся тогда и только тогда, когда $\beta \geqslant -1$. В случае $\beta < -1$ из теоремы 3 следует, что уравнения (23) и (24) имеют отделенные от нуля неколеблющиеся решения.

1. *Иванов А. Ф.* Об осцилляции решений дифференциально-разностных уравнений первого порядка нейтрального типа.— Киев, 1983.— 17 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.16).
2. *Иванов А. Ф., Кусано Т.* Об осцилляции решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 6.— С. 717—721.
3. *Ladas G., Sficas Y. G.* Oscillations of neutral delay differential equations // Canad. Math. Bull.— 1986.— **29**.— P. 438—445.
4. *Ruan J.* Types and criteria of nonoscillatory solutions for second order linear neutral differential difference equations // Chinese Ann. Math. Ser. A.— 1987.— **8**.— P. 114—124. (Chinese).
5. *Sficas Y. G., Stavroulakis I. P.* Necessary and sufficient conditions for oscillations of neutral differential equations // J. Math. Anal. Appl.— 1987.— **123**.— P. 494—507.
6. *Шевело В. Н., Варех Н. В., Грицай А. Г.* Осцилляторные свойства решений систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— Киев, 1985.— 48 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.10).
7. *Zahariev A. I., Bainov D. D.* On some oscillation criteria for a class of neutral type functional differential equations // J. Austral. Math. Soc. Ser. B.— 1986.— **28**.— P. 224—234.
8. *Kitamura Y., Kusano T.* Oscillation of first—order nonlinear differential equations with deviating arguments // Proc. AMS.— 1980.— **78**.— P. 64—68.

Ин-т математики АН УССР, Киев,
Хиросим. ун-т, Япония

Получено 24.03.88