УДК 519.21

С. А. Солнцев

О необходимых и достаточных условиях сходимости к нулю многомерной гауссовской марковской последовательности

Вопросу сходимости к нулю почти наверное (п. н.) гауссовской марковской последовательности (г. м. п.) в конечномерных пространствах посвящен ряд работ [1—4], при этом в одномерном случае получены необходимые и достаточные условия [1]. В настоящей статье этот критерий обобщается на многомерный случай. В качестве следствия показывается, что необходимые для сходимости к нулю п. н. в общем гауссовском случае энтропийные условия В. Н. Судакова [5] при дополнительном предположении марковости являются также и достаточными. Отметим, что в отличных от приводимых здесь терминах проблема сходимости к нулю п. н. гауссовских последовательностей решена М. Талаграном [6]. Тем не менее и другие подходы оказываются эффективными для различных классов гауссовских последовательностей.

Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, — m-мерное евклидово пространство вектор-столбцов с евклидовой нормой $\|\cdot\|$; $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Если A — матрица размерности $m \times m$, то $\|A\|$ — матричная норма, подчиненная евклидовой в $\mathbb{R}^m$; $\mathrm{Sp} A$ — след матрицы A; I — единичная $m \times m$-матрица. Если $(A_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ — конечная последовательность матриц $m \times m$, то полагаем $A_n A_{n-1} \ldots A_2 A_1 = \prod_{k=1}^{n} A_k$; $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathfrak{N}_\infty$ — класс всех неубывающих и неограниченных последовательностей натуральных чисел.

Пусть X, Y — центрированные гауссовские векторы в $\mathbb{R}^m$. Тогда $B(X)$ обозначает ковариационную матрицу случайного вектора X, т. е. $B(X) = MXX^*$ ($*$ — обозначает операцию транспонирования). Полагаем $\mathrm{D}(X/Y) = B(X - \mathrm{M}(X/Y))$.

Под гауссовской марковской последовательностью в $\mathbb{R}^m$ понимаем марковскую последовательность совместно гауссовских случайных векторов со значениями в $\mathbb{R}^m$. Все гауссовские вектора предполагаем центрированными.

Теорема 1. *Пусть $(X_n, n \geqslant 1)$ — г. м. п. в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$. Для того чтобы*

$$\|X_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.}, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\mathrm{Sp}\, B(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

2) *для любой последовательности $(n_k, k \geqslant 1) \in \mathfrak{N}_\infty$*

$$\sum_k \exp\{-\varepsilon/\mathrm{Sp}\mathbf{D}(X_{n_{k+1}}/X_{n_k})\} < \infty$$

при всех $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Необходимость условий 1 и 2 справедлива для любой последовательности гауссовских векторов в $\mathbb{R}^m$, сходящейся п. н. к нулю, и доказывается так же как в одномерном случае [1].

Достаточность. Последовательность гауссовских векторов в $\mathbb{R}^m$ $(X_n, n \geqslant 1)$ является марковской тогда и только тогда, когда найдется такая последовательность неслучайных матриц $(C_n, n \geqslant 2)$ и последовательность $(Z_n, n \geqslant 1)$ из независимых гауссовских векторов в $\mathbb{R}^m$, что

$$X_1 = Z_1, \quad X_n = C_n X_{n-1} + Z_n, \quad n \geqslant 2. \tag{2}$$

Отсюда

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_{ni}, \quad n \geqslant 1, \tag{3}$$

где

$$Q_{nj} = \begin{cases} \prod_{i=j+1}^{n} C_i, & \text{если } 1 \leqslant j < n; \\ I, & \text{если } j = n; \\ 0, & \text{если } j > n. \end{cases}$$

$$Y_{nj} = Q_{nj} Z_j, \quad n \geqslant 1, \quad j \geqslant 1.$$

Будем различать два случая: А) в представлении (3) все матрицы $(C_n, n \geqslant 2)$ невырожденные; Б) среди $(C_n, n \geqslant 2)$ могут быть вырожденные.

Случай А. Если выполнено условие 1, то вследствие гауссовости последовательность $(X_n, n \geqslant 1)$ сходится к нулю по вероятности. Далее, воспользовавшись замечанием 3.3 из [4] получаем, что для каждого $i \geqslant 1$

$$\|Y_{ni}\| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0. \tag{4}$$

В силу конечномерности носителей случайных векторов Z_i, $i \geqslant 1$, сходимость по вероятности в (4) может быть заменена на сходимость п. н.:

$$\|Y_{ni}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.} \tag{5}$$

Положим $A_1 = I$; $A_n = Q_{n1}$, $n \geqslant 2$; $W_1 = Z_1$; $W_k = Q_{k1}^{-1} Z_k$, $k \geqslant 2$. Тогда $X_n = A_n S_n$, $n \geqslant 1$, где $S_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$, $n \geqslant 1$.

Следовательно, $(X_n, n \geqslant 1)$ представляет собой последовательность сумм независимых центрированных гауссовских векторов в $\mathbb{R}^m$, нормированных матрицами. Соотношение (5) означает, что для любого $i \geqslant 1$

$$\| A_n W_i \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.} \tag{6}$$

Замечая, что

$$\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} Y_{n_{k+1}, j} = X_{n_{k+1}} - \mathbf{M}(X_{n_{k+1}} / X_{n_k}),$$

в силу леммы 10 [7] из условия 2 вытекает, что для любой последовательности $(n_k) \in \mathfrak{N}_\infty$ $\| A_{n_{k+1}} (S_{n_{k+1}} - S_{n_k}) \| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ п. н. Совместно с (6) это соотношение обеспечивает выполнение усиленного закона больших чисел в форме Прохорова — Лоэва с операторными нормировками (теорема 5.2 в [4]) $\| X_n \| = \| A_n S_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ п. н. Таким образом, в случае А теорема 1 доказана.

Случай Б. Как видно из авторегрессионного представления (2) г. м. п. (X_n) задается последовательностью неслучайных матриц $(C_n, n \geqslant 2)$ и последовательностью независимых гауссовских векторов $(Z_n, n \geqslant 1)$. Покажем, что если выполнены для всех $i \geqslant 1$ соотношения (5), то можно построить стохастически эквивалентную исходной последовательности $(X_n, n \geqslant 1)$ г. м. п. $(X'_n, n \geqslant 1)$, определяемую последовательностями $(C'_n, n \geqslant 2)$ и $(Z'_n, n \geqslant 1)$ такую, что $\left\| \prod_{i=n+1}^{n+k} C'_i \right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $n \geqslant 1$. Действительно, пусть

$$L_i = \{ h \in \mathbb{R}^m : \| Q_{ni} h \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \}, \quad i \geqslant 1,$$

и Pr_i — матрица ортогонального проектирования на L_i. Положим $Z'_i = Z_i$, $i \geqslant 1$; $C'_i = C_i Pr_{i-1}$, $i \geqslant 2$. И пусть $L(Y)$ обозначает минимальное подпространство $\mathbb{R}^m$, на котором сосредоточен случайный вектор Y. Тогда из определений подпространств L_i и $L(\cdot)$, а также сходимости (5) для всех $i \geqslant 1$ имеют место включения $L(Y_{ni}) \subset L_n$. Следовательно, для всех i, $k \geqslant 1$

$$Pr_i Z_i = Z_i \text{ п. н.}; \; Pr_{i+k} Y_{i+k, i} = Y_{i+k, i} \text{ п. н.}$$

Отсюда для всех $i \geqslant 1$

$$C'_{i+1} Z_i = C_{i+1} Pr_i Z_i = C_{i+1} Z_i \text{ п. н.}$$

и далее по индукции для всех i, $k \geqslant 1$

$$\left(\prod_{j=i+1}^{i+k} C'_j \right) Z_i = Y_{i+k, i} \text{ п. н.}$$

Тогда (3) необходимо приводить к равенствам $X'_n = X_n$ п. н., $n \geqslant 1$. Поэтому без потери общности везде ниже предполагаем, что для всех $i \geqslant 1$

$$\| Q_{ni} \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{7}$$

Пусть теперь для последовательности $(X_n, n \geqslant 1)$ выполнены условия 1, 2 и (7). Построим вспомогательную г. м. п. $(\tilde{X}_n, n \geqslant 1)$: $\tilde{X}_1 = \tilde{Z}_1$; $\tilde{X}_n = \tilde{C}_n \tilde{X}_{n-1} + \tilde{Z}_n$, $n \geqslant r$, положив $\tilde{Z}_n = Z_n$, $n \geqslant 1$; $\tilde{C}_n = C_n + \varepsilon_n I$, $n \geqslant 2$, где $(\varepsilon_n, n \geqslant 2)$ — набор действительных чисел, выбор которых произведем рекуррентно следующим образом. Зададим ε_2 так, чтобы матрица $\tilde{C}_2$ была невырожденной и $0 \leqslant \varepsilon_2 \; \delta_2 \leqslant 1/4$, где $\delta_i = \sup_{k \geqslant 0} \| Q_{i+k, i} \|$, $i \geqslant 2$. Корректность такого выбора гарантируется соотношением (7), так как из него следует, что для всех $i \geqslant 1$ $\delta_i < \infty$. Далее, пусть мы уже последовательно выбрали $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$ так, что матрицы $\tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \ldots, \tilde{C}_n$ невырожденные и для всех $s = 2, 3, \ldots, n$

$$\varepsilon_s \delta_s \Delta_s \leqslant 2^{-s}, \tag{8}$$

где

$$\Delta_s = \sup_{1 \leqslant m \leqslant s-1} \| \tilde{Q}_{s-1,m} \|, \tag{9}$$

а матрицы $\tilde{Q}_{nj}$ определены как Q_{nj} с заменой C_i на $\tilde{C}_i$. Определив Δ_{n+1} соотношением (9), выберем ε_{n+1} так, чтобы $\tilde{C}_{n+1}$ была невырожденной и неравенство (8) выполнялось с $s = n + 1$. Таким образом построенная последовательность $(\tilde{C}_n, n \geqslant 2)$ будет состоять из невырожденных матриц и для всех $s \geqslant 2$ справедливы неравенства (8). Тогда для всех $k, i \geqslant 1$

$$\| \tilde{Q}_{i+k,i} - Q_{i+k,i} \| = \| F_0 G_0 - F_k G_k \| \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} \| F_j G_j - F_{j+1} G_{j+1} \| \leqslant \sum_{s=i+1}^{i+k} 2^{-s} \leqslant 2^{-i}, \tag{10}$$

где $F_j = Q_{i+k,i+k-j}$, $G_j = \tilde{Q}_{i+k-j,i}$. С учетом (10) и (7) для всех $i, m \geqslant 1$ имеем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \| \tilde{Q}_{ki} - Q_{ki} \| \leqslant \| \tilde{Q}_{mi} \| \overline{\lim_{k\to\infty}} \| \tilde{Q}_{k,m} - Q_{k,m} \| + \| \tilde{Q}_{m,i} - Q_{m,i} \| +$$

$$+ \overline{\lim_{k\to\infty}} \| Q_{km} \| \leqslant 2^{-m} \| \tilde{Q}_{mi} \|.$$

Из произвольности m, а также соотношений (7) и (10) следует, что для всех $i \geqslant 1$ $\| \tilde{Q}_{ki} - Q_{ki} \| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Пусть $c_0(\mathbb{R}^m) = \{(u_k, k \geqslant 1) \subset \mathbb{R}^m : \| u_k \| \to \to 0\}$ — пространство последовательностей векторов, сходящихся в норме $\mathbb{R}^m$ к нулю. Если в $c_0(\mathbb{R}^m)$ ввести норму $|||(u_k, k \geqslant 1)||| = \sup_{k\geqslant 1} \| u_k \|$, то $(c_0(\mathbb{R}^m), |||\cdot|||)$ становится сепарабельным банаховым пространством. Положим $\tilde{Y}_{nj} = (\tilde{Q}_{nj} - Q_{nj}) Z_j$. Очевидно, что $(\tilde{Y}_{nj}, n \geqslant 1)$, $j \geqslant 1$, есть последовательность независимых симметричных $c_0(\mathbb{R}^m)$-значных случайных элементов ($c_0(\mathbb{R}^m)$-з. с. э.). Заметим, что

$$\sup_{n\geqslant 1} \mathbf{M} \| Z_n \| = \alpha < \infty. \tag{11}$$

Действительно, так как $C_n Z_{n-1}$ и Z_n, $n > 1$, в авторегрессионном уравнении (2) попарно независимы, то $\operatorname{Sp} B(X_n) \geqslant \operatorname{Sp} B(Z_n)$. С другой стороны, в силу неравенства Ляпунова

$$\mathbf{M} \| Z_n \| \leqslant \sqrt{\mathbf{M} \| Z_n \|^2} = \sqrt{\operatorname{Sp} B(Z_n)}, \ n \geqslant 1.$$

Теперь (11) вытекает из условия 1. Совместно с соотношением (10) это приводит к неравенству

$$\mathbf{M} |||(\tilde{Y}_{ni}, n \geqslant 1)||| \leqslant \mathbf{M} \| Z_i \| \sup_{n\geqslant i} \| \tilde{Q}_{ni} - Q_{ni} \| \leqslant \alpha \cdot 2^{-i}.$$

Следовательно, $\sum_i \mathbf{M} |||(\tilde{Y}_{ni}, n \geqslant 1)||| < \infty$, а значит, ряд $\sum_i (\tilde{Y}_{ni}, n \geqslant 1)$ из независимых $c_0(\mathbb{R}^m)$-з. с. э. $(\tilde{Y}_{ni}, n \geqslant 1)$ сходится п. н. в норме $|||\cdot|||$. Замечая, что $\tilde{X}_n - X_n = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{Y}_{ni}$, $n \geqslant 1$, п. н., получаем

$$\| \tilde{X}_n - X_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.} \tag{12}$$

Отсюда и из условия 1 вытекает сходимость $\operatorname{Sp} B(\tilde{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Далее, зафиксируем произвольную последовательность $(n_k) \in \mathfrak{N}_\infty$. Неравенства (10) приводят к соотношению

$$\sum_{k\geqslant 1} \mathbf{M} \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} Y_{n_{k+1},i} \right\| \leqslant \alpha \sum_k \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} 2^{-i} \leqslant \alpha < \infty.$$

Замечая, что

$$\tilde{X}_{n_{k+1}} - \mathbf{M}(\tilde{X}_{n_{k+1}}/\tilde{X}_{n_k}) = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} (\tilde{Y}_{n_{k+1},i} + Y_{n_{k+1},i}), \quad k \geqslant 1,$$

является последовательностью независимых гауссовских векторов в $\mathbb{R}^m$. опять используя лемму 10 [7], для каждого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_k \exp\{-\varepsilon/\operatorname{Sp} \mathbf{D}(\tilde{X}_{n_{k+1}}/\tilde{X}_{n_k})\} < \infty.$$

Теперь справедливость соотношения (1) будет вытекать из доказанного в случае A (поскольку матрицы $(\tilde{C}_n,\ n \geqslant 2)$ невырожденные) и сходимости (12). Теорема 1 доказана.

Как уже отмечалось, г. м. п. в $\mathbb{R}$ удовлетворяет стохастическому разностному уравнению первого порядка (2). Естественным расширением класса г. м. п. является класс гауссовских последовательностей, которые удовлетворяют стохастическим разностным уравнениям более высокого порядка, а именно класс гауссовских m-марковских последовательностей. Центрированную гауссовскую последовательность $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ называют гауссовской m-марковской, если она удовлетворяет системе стохастических разностных уравнений m-го порядка:

$$\xi_n = a_{1n}\xi_{n-1} + a_{2n}\xi_{n-2} + \ldots + a_{mn}\xi_{n-m} + \lambda_n\gamma_n, \quad n \geqslant 1, \tag{13}$$

где $(\gamma_n,\ n \geqslant 1)$ — последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин, а $(a_{kn} : 1 \leqslant k \leqslant m,\ n \geqslant 1)$, $(\lambda_n,\ n \geqslant 1)$ — некоторые заданные наборы вещественных чисел. Для удобства полагаем $\xi_0 = \xi_1 = \ldots = \xi_{1-m} = 0$. При некоторых ограничениях на элементы массива (a_{kn}) вопрос о сходимости п. н. к нулю таких последовательностей исследовался в работах [2—4, 7]. Теорема 1 позволяет устранить имевшиеся ограничения.

Теорема 2. *Пусть $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ — гауссовская m-марковская последовательность. Для того чтобы $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ п. н., необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $M\xi_n^2 = \sigma_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

2) *для любой последовательности $(n_k,\ k \geqslant 1) \in \mathfrak{N}_\infty$*

$$\sum_{k\geqslant 1} \exp\{-\varepsilon/d(\xi_{n_{k+1}}/\Phi_{n_k})\} \infty$$

при всех $\varepsilon > 0$, где $d(\xi_i/\Phi_{n_k}) = \mathbf{M}(\xi_i - \mathbf{M}(\xi_i/\Phi_{n_k}))^2$ — условная дисперсия гауссовской случайной величины ξ_i относительно Φ_{n_k} — σ-алгебры, порожденной случайными величинами ξ_j, $n_k - m + 1 \leqslant j \leqslant n_k$.

Доказательство. Пусть для определенности обозначений гауссовская m-марковская последовательность $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ задается соотношениями (13). Положим

$$X_n^* = (\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots, \xi_{n-m+1}), \quad Z_n^* = (\lambda_n\gamma_n, 0, \ldots, 0), \quad n \geqslant 1,$$

$$C_n = \left(\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{a_{1n}a_{2n} \cdots a_{mn}} \\ \hline I_{m-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right), \quad n \geqslant 2,$$

где I_{m-1} — единичная матрица размерности $(m-1)\times(m-1)$. В силу (13) последовательность $(X_n, n\geqslant 1)$ удовлетворяет соотношениям (2), т. е. является г. м. п. в $\mathbb{R}^m$. Заметим, что $\operatorname{Sp} B(X_n) = \sum\limits_{i=n+m-1}^{n} \sigma_i^2$, $n\geqslant 1$, и для любой последовательности $(n_k, k\geqslant 1)\in\mathfrak{N}_\infty$

$$\operatorname{Sp}\mathbf{D}(x_{n_{k+1}}/X_{n_k}) = \sum_{i=n_{k+1}-m+1}^{n_{k+1}} d(\xi_i/\Phi_{n_k}), \quad k\geqslant 1.$$

Теперь утверждение теоремы 2 очевидно вытекает из теоремы 1.

Приведем критерий п. н. сходимости к нулю г. м. п. в $\mathbb{R}^m$ в энтропийных терминах. Для формулировки этого утверждения потребуются следующие энтропийные характеристики последовательности гауссовских векторов $(X_n, n\geqslant 1): d(i, j) = \sqrt{\mathbf{M}\| X_i - X_j\|^2}$ — полуметрика на $\mathbb{N}$; $N(\varepsilon)$ — минимальное число шаров $B(s, \varepsilon)=\{t\in\mathbb{N}: d(s,t)\leqslant\varepsilon\}$, $s\in\mathbb{N}$, покрывающих $\mathbb{N}$; $H(\varepsilon)=\ln N(\varepsilon)$ — метрическая энтропия.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $(X_n, n\geqslant 1)$ — *г. м. п. в* $\mathbb{R}^m$. *Для того чтобы*

$$\| X_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.}, \tag{14}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\operatorname{Sp} B(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{15}$$

$$\varepsilon^2 H(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость соотношения (16) непосредственно вытекает из необходимых условий В. Н. Судакова [5] сходимости п. н. гауссовской последовательности к нулю в одномерном случае.

Покажем, что для выполнения (14) достаточно, чтобы выполнялись соотношения (15) и (16).

Заметим, что (16) имеем место тогда и только тогда, когда

$$4^{-r} H(2^{-r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0. \tag{17}$$

Пусть $U_r = \{B(s, 2^{-r}),\ s\in S_r\}$ — система $N(2^{-r})$ шаров, обеспечивающих минимальное в количественном отношении покрытие $\mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную последовательность $(n_k, k\geqslant 1)\in\mathfrak{N}_\infty$ и зафиксируем ее. И пусть $B\in U_r$, $B\cap\{n_k\}\neq\varnothing$. Обозначим через n_i наименьший индекс из (n_k), который принадлежит B: $n_i = \min\{n: n\in(n_k)\cap B\}$. В силу независимости случайных векторов $X_{n_i} - \mathbf{M}(X_n/X_{n_i})$ и $X_n - \mathbf{M}(X_n/X_{n_i})$ для всех $n > n_i$ имеем

$$\operatorname{Sp}\mathbf{D}(X_n/X_{n_i}) = \mathbf{M}\| X_n - \mathbf{M}(X_n/X_{n_i})\|^2 \leqslant \mathbf{M}\| X_{n_i} - \mathbf{M}(X_n/X_{n_i})\|^2 +$$

$$+\mathbf{M}\| X_n - \mathbf{M}(X_n/X_{n_i})\|^2 = \mathbf{M}\| X_{n_i} - X_n\|^2 = d^2(n_i, n)\leqslant 4^{-r+1}.$$

Положим

$$J_r = \{n_i\in(n_k): 4^{-r} < \operatorname{Sp}\mathbf{D}(X_{n_i}/X_{n_{i-1}})\leqslant 4^{-r+1}\}.$$

Таким образом, любой шар B из покрытия U_r содержит не более одного индекса из J_r. Следовательно, $\operatorname{Card} J_r\leqslant\operatorname{Card} U_r = N(2^{-r})$. Отсюда в силу соотношения (17) для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{k\geqslant 1}\exp\{-\varepsilon/\operatorname{Sp}\mathbf{D}(x_{n_{k+1}}/X_{n_k})\} = \sum_r\sum_{n_i\in J_r}\exp\{-\varepsilon/\operatorname{Sp}\mathbf{D}(X_{n_{i+1}}/X_{n_i})\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_r N(2^{-r})\exp(-\varepsilon 4^{r-1}) = \sum_r\exp\{-4^r(\varepsilon/4 - 4^{-r}H(2^{-r}))\} < \infty.$$

Значит, выполнено условие 2 теоремы 1. Следствие 1 доказано.

Пусть $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ — гауссовская m-марковская последовательность. Как было показано в доказательстве теоремы 2, сходимость (ξ_n) к нулю п. н. эквивалентна сходимости к нулю п. н. специальным образом построенной г. м. п. в $\mathbb{R}^m$. Поэтому можно записать следующий энтропийный критерий сходимости к нулю п. н. гауссовской m-марковской последовательности.

Как и раньше, $d(i, j) = \sqrt{\mathbf{M}\,|\xi_i - \xi_j|^2}$ полуметрика на $\mathbb{N}$; $H(\varepsilon)$ — метрическая энтропия, порожденная $d(\cdot, \cdot)$.

Следствие 2. *Для того чтобы*

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. н.},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \varepsilon^2 H(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

1. *Булдыгин В. В.* Усиленные законы больших чисел и сходимость к нулю гауссовских последовательностей // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1978.— Вып. 19.— С. 33—41.
2. *Ядренко О. М.* Об усиленном законе больших чисел с матричными нормировками и условиях сходимости к нулю одного класса гауссовских последовательностей // Некоторые вопросы теории случайных процессов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982.— С. 117—133.
3. *Ядренко О. М.* О сходимости одного класса гауссовских последовательностей // Укр. мат. журн.— 1984.— 36, № 3.— С. 358—364.
4. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* Принципы сжатия c_0-суммирующих матриц и усиленные законы больших чисел с операторными нормировками.— Киев, 1985.— 60 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.68).
5. *Судаков В. Н.* Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений.— Л. : Наука, 1976.— 191 с.
6. *Talagrand M.* La description des processus gaussiens bornes // C. r. Acad. sci : A. 1985.— 301, N 15.— P. 751—753.
7. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А., Ядренко О. М.* Усиленные законы больших чисел с операторными нормировками.— Киев, 1984.— 43 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 84.34).

Киев. политехн. ин-т

Получено 09.06.87