УДК 517.9

А. Н. Кочубей

Одномерные точечные взаимодействия

1. Пусть $X = \{x_n\}_{-\infty}^{\infty}$ — вещественная последовательность, $\Delta_n = x_{n+1} - x_n$, $0 < \inf \Delta_n \leqslant \sup \Delta_n < \infty$, $q(x)$ — ограниченная измеримая вещественная функция, $A = \{a_n\}_{-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{R}^1$ — произвольная последовательность. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$ рассмотрим оператор $H_A = -d^2/dx^2 + q(x)$ с областью определения $D(H_A)$, состоящей из таких функций f, что f и f' локально абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}^1 \setminus X$, f непрерывна на $\mathbb{R}^1$,

$$f'(x_n + 0) - f'(x_n - 0) = a_n f(x_n), \quad n = 0, \pm 1, \ldots, H_A f \in L_2(\mathbb{R}^1).$$

Оператор H_A интерпретируется как гамильтониан точечного взаимодействия с рассеивающими центрами x_n «силы» a_n с дополнительным взаимодействием q и соответствует эвристической записи

$$H_A = -d^2/dx^2 + \sum a_n \delta(x - x_n) + q.$$

Хотя одномерные точечные взаимодействия в последние годы изучались рядом авторов (см., например, [1—3]), о спектральных свойствах оператора H_A с нефинитной последовательностью A известно мало. Как будет видно из дальнейшего, формальная аналогия с обычным оператором Шредингера оправдывается здесь не полностью. В данной работе для исследования оператора H применяется метод абстрактных граничных условий в теории расширений симметрических операторов.

2. Пусть задана последовательность гильбертовых пространств $\{\mathfrak{H}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ и в каждом пространстве $\mathfrak{H}_n$ задан плотно определенный замкнутый симметрический оператор S_n с равными дефектными числами. Предположим далее, что существуют гильбертово пространство $\mathfrak{H}_*$, такие линейные отображения $\chi_n : \mathfrak{H}_* \to \mathfrak{H}_n$, симметрический оператор S_* и вещественные числа α_n, что $S_n = \alpha_n^2 \chi_n S_* \chi_n^{-1}$, $\|\chi_n u\|_n = \alpha_n^{-1/2} \|u\|_* \forall u \in \mathfrak{H}_*$ ($\|\cdot\|_n, \|\cdot\|_*$ — нормы в $\mathfrak{H}_n, \mathfrak{H}_*$), причем

$$0 < \inf_n \alpha_n \leqslant \sup_n \alpha_n < \infty. \tag{1}$$

Пусть $(\mathcal{H}^*, \Gamma_1^*, \Gamma_2^*)$ — пространство граничных значений (ПГЗ) оператора S_* [4]. Обозначим $\mathcal{H}^n = \mathcal{H}^*$, $\Gamma_1^n = \Gamma_1^* \chi_n^{-1}$, $\Gamma_2^n = \alpha_n \Gamma_2^* \chi_n^{-1}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. Непосредственно проверяется, что $(\mathcal{H}^n, \Gamma_1^n, \Gamma_2^n)$ — ПГЗ оператора S_n.

Рассмотрим ортогональную сумму операторов S_n — симметрический оператор $S = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} S_n$ в пространстве $\mathfrak{H} = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{H}_n$ [5]. Пусть $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^n$, $\Gamma_j f = \{\Gamma_j^n f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $j = 1, 2$, $f = \{f_n\}_{-\infty}^{\infty} \in D(S^*)$ ($D(S^*)$ — область определения сопряженного оператора S^*).

Лемма 1. *Тройка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ представляет собой ПГЗ оператора S.*

Доказательство для случая $\alpha_n \equiv 1$ имеется в [6]. В общем случае доказательство проводится по той же схеме, что и в [6] (с использованием в оценках неравенств (1)). Единственное отличие состоит в следующем. Пусть $F^j = \{F_n^j\} \in \mathcal{H}$, $j = 1, 2$. Для построения вектора $f = \{f_n\} \in D(S^*)$ такого, что $\Gamma_j f = F^j$, $j = 1, 2$, компоненты $f_n \in D(S_n^*)$ следует выбирать так, чтобы $\Gamma_j^n f_n = F_n^j$, $f_n \in \mathfrak{N}_{i\alpha_n^2}(S_n) \dot{+} \mathfrak{N}_{-i\alpha_n^2}(S_n)$. Здесь $\mathfrak{N}_\lambda(S_n)$ — дефектное подпространство оператора S_n.

3. Пусть теперь $\mathfrak{H}_n = L_2(x_n, x_{n+1})$ (так что $\mathfrak{H} = L_2(-\infty, \infty)$), $\mathfrak{H}_* = L_2(0, 1)$, S_n и S_* — минимальные операторы, порожденные выражением $-d^2/dx^2$ соответственно в $\mathfrak{H}_n$ и $\mathfrak{H}_*$. Положим $\alpha_n = \Delta_n^{-1}$, $(\chi_n \varphi)(x) = \varphi(\Delta_n^{-1}(x - x_n))$, $x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}$, $\mathcal{H}^* = \mathbb{C}^2$, $\Gamma_1^n \varphi = \{-\varphi(x_n + 0), \varphi(x_{n+1} - 0)\}$, $\Gamma_2^n \varphi = \{\varphi'(x_n + 0), \varphi'(x_{n+1} - 0)\}$. Пусть $H = S + Q$, где Q — (ограниченный) оператор умножения на функцию q.

Лемма 2. *ПГЗ оператора H может быть выбрано так:*

$$\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{C}^1,$$

$$\Gamma_1 f = \{\ldots, -f(x_{n-1} + 0), f(x_n - 0), -f(x_n + 0), f(x_{n+1} - 0), \ldots\},$$

$$\Gamma_2 f = \{\ldots, f'(x_{n-1} + 0), f'(x_n - 0), f'(x_n + 0), f'(x_{n+1} - 0), \ldots\}.$$

Доказательство сводится к применению леммы 1 с учетом равенства $D(H^*) = D(S^*)$, вытекающего из ограниченности оператора Q.

Утверждение, близкое к лемме 2, содержится в [7]. Заметим [6], что для неограниченного потенциала q утверждение леммы 2, вообще говоря, неверно.

Для дальнейшего удобно сгруппировать ортогональную сумму $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{C}^1$ так, чтобы $\Gamma_j = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}_j^n$, $j = 1, 2$, где $\tilde{\Gamma}_1^n f = \{f(x_n - 0), -f(x_n + 0)\}$, $\tilde{\Gamma}_2^n f = \{f'(x_n - 0), f'(x_n + 0)\}$. Тогда $H_A \supset H$ есть сужение H^* на множество $f \in D(H^*)$, удовлетворяющих условию

$$(K_A - E)\Gamma_1 f + i(K_A + E)\Gamma_2 f = 0, \tag{2}$$

где K_A — унитарный оператор в $\mathscr{H}$, представимый блочно-диагональной бесконечной матрицей с диагональными блоками

$$K_{A,n} = \begin{Vmatrix} -\dfrac{a_n}{2i+a_n} & -\dfrac{2i}{2i+a_n} \\ -\dfrac{2i}{2i+a_n} & -\dfrac{a_n}{2i+a_n} \end{Vmatrix}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots,$$

E — единичный оператор. Отсюда следует [4] самосопряженность оператора H_A (доказанная, впрочем, в [3] при более общих предположениях).

Пусть $\mathfrak{S}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — идеалы Неймана — Шэттена, $R_\lambda(H_A)$ — резольвента оператора H_A ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$), $B = \{b_n\}_{-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{R}^1$ — произвольная последовательность.

Теорема 1. *Для того чтобы $R_\lambda(H_A) - R_\lambda(H_B) \in \mathfrak{S}_p$, достаточно, а в случае, когда последовательности A, B ограничены, и необходимо, чтобы*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n - b_n|^p < \infty \qquad (\textit{если } p < \infty),$$

$$a_n - b_n \to 0 \ \textit{при} \ |n| \to \infty \qquad (\textit{если } p = \infty).$$

Доказательство. По теореме о резольвентной сравнимости расширений [4] $R_\lambda(H_A) - R_\lambda(H_B) \in \mathfrak{S}_p$ в том и только в том случае, когда $K_A - K_B \in \mathfrak{S}_p$. Оператор $K_A - K_B$ представи́м в виде бесконечной блочно-диагональной матрицы с диагональными блоками

$$K_{A,n} - K_{B,n} = \frac{2i(b_n - a_n)}{(2i + b_n)(2i + a_n)} M,$$

где $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Имеем

$$\| K_{A,n} - K_{B,n} \| \leqslant \frac{4|b_n - a_n|}{(b_n^2 + 4)^{1/2}(a_n^2 + 4)^{1/2}} \leqslant |b_n - a_n|.$$

Пусть конечномерный оператор L_j получен из бесконечной матрицы, представляющей $K_A - K_B$, заменой всех диагональных блоков $K_{A,n} - K_{B,n}$ с $|n| > j$ нулевыми матрицами. Тогда

$$\| K_A - K_B - L_j \| \leqslant \sup_{|n|>j} \| K_{A,n} - K_{B,n} \| \leqslant \sup_{|n|>j} |b_n - a_n|.$$

Если $a_n - b_n \to 0$ при $|n| \to \infty$, то $\| K_A - K_B - L_j \| \to 0$ при $j \to \infty$, откуда $K_A - K_B \in \mathfrak{S}_\infty$. Множество s-чисел оператора $K_A - K_B$ состоит из нуля и чисел $\dfrac{4|b_n - a_n|}{(b_n^2+4)^{1/2}(a_n^2+4)^{1/2}}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. Отсюда следует, что если $\sum |a_n - b_n|^p < \infty$, то $K_A - K_B \in \mathfrak{S}_p$, $1 \leqslant p < \infty$.

Пусть теперь последовательности A, B ограничены. Тогда

$$\left| \frac{b_n - a_n}{(2i + b_n)(2i + a_n)} \right| \geqslant \gamma |b_n - a_n|, \quad \gamma > 0. \tag{3}$$

Если $K_A - K_B \in \mathfrak{S}_\infty$, то последовательность диагональных элементов бесконечной матрицы, представляющей оператор $K_A - K_B$, стремится к нулю (так как ортонормированный базис в гильбертовом пространстве образует последовательность, слабо сходящуюся к нулю [8, с. 174]). Из (3) следует, что $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \pm\infty$. Если $K_A - K_B \in \mathfrak{S}_p$, то из приведенного выше описания s-чисел и неравенства (3) находим $\sum |a_n - b_n|^p < \infty$. Теорема доказана.

Отметим, что в случае $q = 0$ достаточность условий теоремы 1 можно вывести также из формулы для $R_\lambda(H_A)$, приведенной в [2].

Из теоремы 1 следует, в частности, что при $a_n \to 0$ существенный спектр оператора H_A совпадает с существенным спектром хорошо изученного оператора H_0 (соответствующего $A = 0$). Другой пример применения теоремы 1 — случай $x_n = n$, $q(x) \equiv q(x+1)$, $b_n \equiv b = \mathrm{const}$; спектр оператора H_B (имеющий зонную структуру) изучен в [9].

Пусть $\tilde{H}_n$ — расширение по Фридрихсу оператора $S_n + Q$, $H_\infty = \bigoplus\limits_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{H}_n$. Спектр H_∞ содержит объединение спектров операторов $\tilde{H}_n$; если $x_n = n$, $q(x) \equiv q(x+1)$, то спектр H_∞ состоит из изолированных собственных значений бесконечной кратности. Оператор H_∞ соответствует граничному условию (2) с $K_\infty = -E$. Диагональные блоки бесконечной матрицы, представляющей оператор $K_A + E$, имеют вид

$$K_{A,n} + E_n = \frac{2i}{2i + a_n} M, \quad n = 0, \pm 1, \ldots .$$

Применяя, как и выше, теорему о резольвентной сравнимости расширений, приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Для того чтобы $R_\lambda(H_A) - R_\lambda(H_\infty) \in \mathfrak{S}_p$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^{-p} < \infty$ (если $p < \infty$), $|a_n| \to \infty$ (если $p = \infty$).*

4. Пусть в определении оператора H_A $A \subset \mathbb{C}^1$, $\operatorname{Im} a_n \geqslant 0$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. Тогда H_A — максимальное диссипативное расширение оператора H, соответствующее граничному условию (2), где K_A — сжатие в $\mathcal{H}$. Теоремы 1 и 2 справедливы и для этого случая, однако для исследования спектра здесь приходится использовать результаты из [10].

Теорема 3. *Если $\operatorname{Im} a_n \to 0$ при $|n| \to \infty$, то невещественная часть σ_I спектра оператора H_A может состоять только из собственных значений конечной кратности, причем для всех $\lambda \in \Pi = \{\lambda \in \mathbb{C}^1 \mid \operatorname{Im}\lambda > 0\}$*

$$\dim \operatorname{Ker}(H_A - \lambda E) = \dim \operatorname{Ker}(H_A^* - \bar{\lambda} E).$$

Если, кроме того, $\operatorname{Im} a_n \leqslant \alpha < 2$ для всех n, и $\sigma_I \neq \Pi$ (последнее выполнено, например, если $\operatorname{Re} a_n \geqslant 0$), то σ_I не имеет невещественных предельных точек.

Доказательство. Пусть $B = \{b_n\}$, $b_n = \operatorname{Re} a_n$. Как и выше, доказывается, что из условия $\operatorname{Im} a_n \to 0$ следует полная непрерывность оператора $K_A - K_B$. Далее

$$K_{A,n}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_n}{2i - a_n} & -\dfrac{2i}{2i - a_n} \\ -\dfrac{2i}{2i - a_n} & \dfrac{a_n}{2i - a_n} \end{pmatrix}.$$

Если $\operatorname{Im} a_n \leqslant \alpha < 2$, то

$$\left|\frac{2i}{2i - a_n}\right| \leqslant \frac{2}{2 - \alpha}, \quad \left|\frac{a_n}{2i - a_n}\right|^2 \leqslant \frac{(\operatorname{Re} a_n)^2 + \alpha^2}{(\operatorname{Re} a_n)^2 + (2 - \alpha)^2} \leqslant \max\left(1, \frac{\alpha^2}{(2 - \alpha)^2}\right),$$

так что

$$\| K_{A,n}^{-1} \| \leqslant C, \quad n = 0, \pm 1, \ldots ,$$

где C не зависит от n, т. е. в этом случае оператор K_A^{-1} ограничен в $\mathcal{H}$. Наконец, если $\operatorname{Re} a_n \geqslant 0$, то для всех $f \in D(H_A)$ $\operatorname{Re}(H_A f, f) \geqslant 0$, так что спектр оператора H_A может лежать только в первом квадранте.

Теперь все утверждения теоремы 3 вытекают из установленных в [10] общих результатов о структуре невещественной части спектра максимального диссипативного расширения симметрического оператора. Теорема доказана.

5. Описанная методика применима и для некоторых потенциалов q с локальными особенностями, например для изучавшегося в [3] потенциала $q(x) = (s_n - 1/4)(\cos x)^{-2}$, $-\pi/2 + n\pi < x < \pi/2 + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \ldots$,

$0 < s_n < 1$. Здесь $x_n = -\pi/2 + n\pi$. В этом случае в определении оператора H_A и формулах для ПГЗ граничные значения f и f' в точках x_n следует заменить их регуляризациями, построенными в [3].

1. *On point* interactions in one dimension / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, W. Kirsch // J. Operator Theory.— 1984.— **12**, N 1.— P. 101—126.
2. *The Schrödinger* operator for a particle in a solid with deterministic and stochastic point interactions / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn et al. // Lect. Notes Math.— 1986.— **1218**.— P. 1—38.
3. *Gesztesy F., Kirsch W.* One-dimensional Schrödinger operators with interactions singular on a discrete set // J. reine und an ew. Math.— 1985.— **362**.— P. 28—50.
4. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 284 с.
5. *Плеснер А. И.* Спектральная теория линейных операторов.— М. : Наука, 1965.— 624 с.
6. *Кочубей А. Н.* Симметрические операторы и неклассические спектральные задачи // Мат. заметки.— 1979.— **25**, № 3.— С. 425—434.
7. *Lee S. J.* Perturbation of operators with application to ordinary differential operators // Indiana Univ. Math. J.— 1979.— **28**, N 2.— P. 291—309.
8. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах.— М. : Мир, 1970.— 25 с.
9. *Гехтман М. М., Станкевич И. В.* Обобщенная задача Кронига—Пенни // Функцион. анализ и его прил.— 1977.— **11**, № 1.— С. 61—62.
10. *Кочубей А. Н.* Характеристические функции симметрических операторов и их расширений // Изв. АН АрмССР. Математика.— 1980.— **15**, № 3.— С. 219—232.

ВГПИ и НИИ «Энергосетьпроект», Киев

Получено 15.07.87